Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 5×5 è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
   B) l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme dei numeri reali diversi da 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

2) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante nullo. Allora
   A) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ non è una matrice regolare.
   B) la matrice $A + B + C$ non è regolare.
   C) A^{100} è la matrice nulla.
   D) A, B e C sono invertibili.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni reali del tipo $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali 8×8 con tutti gli elementi uguali è un sottospazio vettoriale di $M_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme $\{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme delle successioni reali convergenti, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y, z) = 4x - 5y + z$ è una trasformazione lineare.
   B) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $\mathbb{R}$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua traccia ha dimensione 3.
   C) $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\rho(A) = n$.
   D) se A è una matrice reale $n \times n$ invertibile allora ha determinante uguale a 1.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $m = n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.
   B) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) > \rho(C)$.
   C) il rango di C non può essere strettamente inferiore al rango di A.
   D) se $m < n$ ed $\mathbf{S}$ è omogeneo allora il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) T non può ammettere più di n autovalori distinti.
   B) se T è diagonalizzabile e biunivoco allora anche T^{-1} è diagonalizzabile.
   C) se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.
   D) se A è una matrice reale simmetrica allora T è diagonalizzabile.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
   B) se $u, v \in V$ allora $\langle u + 2v, u - v \rangle = \langle u, u \rangle - 2\langle v, v \rangle$.
   C) se U è un sottospazio vettoriale di V di dimensione h il complemento ortogonale di U ha dimensione $n - h$.
   D) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\| \leq \|u + v\|$.

8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x = 2$ e $z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(8, 2)$, $(12, -6)$ è $(10, -2)$.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4, 2)$ e la retta di equazione $2x - y = 4$ è 1.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(0, 2, 0)$, $(-2, 0, -4)$, $(0, 2, -2)$ è 3.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se T non è un automorfismo allora le matrici A e B sono entrambe non invertibili.
   B) T è iniettivo se e solo se 0 non è un autovalore di T.
   C) T e T^2 ammettono gli stessi autovettori.
   D) A e B sono necessariamente uguali.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1,0,1)$,$(1,1,0)$,$(0,1,1)$,$(0,0,0)$ è $1/3$.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 - 8x = 0$ è una parabola.
   C) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3,2,1)$ rispetto al punto $(1,3,2)$ è il punto $(4,5,3)$.
   D) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge (u \wedge u)$ è il vettore nullo.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = t, y = -t, z = -t$ e $x - y - z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A, B \in M_n(I\!R)$ allora $\det(A + B) = \det(A - B)$.
   B) la funzione $F : M_2(I\!R) \to M_2(I\!R)$ definita da $F(A) = 5A$ è una trasformazione lineare.
   C) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 3 e lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 2×2 sono fra loro isomorfi.
   D) se una matrice reale 7×7 ha determinante non nullo allora tutti i suoi elementi sono non nulli.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A \cdot 2B \cdot 3C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   B) se A ha una colonna con tutti gli elementi uguali fra loro allora A non è regolare.
   C) se $B = {}^tA$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
   D) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $A^5 \cdot B^5 = B^5 \cdot A^5$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se due gruppi sono isomorfi hanno lo stesso numero di elementi.
   B) ogni spazio vettoriale $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è un campo rispetto alle operazioni $+, \cdot$.
   C) l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto allora $m = n$.
   B) se $m = n$ e le colonne di A sono tutte diverse fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   C) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare non omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   D) può accadere che A abbia rango 8 e C abbia rango 9.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ che sono costanti nell'intervallo $[0, 1]$ è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : xyz = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.
   D) se un insieme di 4 quaterne ordinate di numeri reali è un sistema di generatori per $I\!R^4$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $I\!R^4$.

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v \in V$ e $\langle u - v, w \rangle = 0$ per ogni $w \in V$, allora $u = v$.
   B) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori di V di norma 1 a due a due ortogonali allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   C) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
   D) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle < 0$ se e solo se u è il vettore nullo.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante nullo. Allora
   A) A, B e C sono invertibili.
   B) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ non è una matrice regolare.
   C) la matrice $A + B + C$ non è regolare.
   D) A^{100} è la matrice nulla.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $m < n$ ed $\mathbf{S}$ è omogeneo allora il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   B) il rango di C non può essere strettamente inferiore al rango di A.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) > \rho(C)$.
   D) se $m = n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.

3) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se A è una matrice reale simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   B) se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.
   C) se T è diagonalizzabile e biunivoco allora anche T^{-1} è diagonalizzabile.
   D) T non può ammettere più di n autovalori distinti.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle < 0$ se e solo se u è il vettore nullo.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
   C) se $u, v \in V$ e $\langle u - v, w \rangle = 0$ per ogni $w \in V$, allora $u = v$.
   D) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori di V di norma 1 a due a due ortogonali allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali convergenti, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   B) l'insieme delle funzioni reali del tipo $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle matrici reali 8×8 con tutti gli elementi uguali è un sottospazio vettoriale di $M_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme $\{(1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1), (0,1,1,0), (0,1,0,1), (0,0,1,1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se A è una matrice reale $n \times n$ invertibile allora ha determinante uguale a 1.
   B) $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\rho(A) = n$.
   C) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $\mathbb{R}$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua traccia ha dimensione 3.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y, z) = 4x - 5y + z$ è una trasformazione lineare.

7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = t, y = -t, z = -t$ e $x - y - z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge (u \wedge u)$ è il vettore nullo.
   B) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(1, 3, 2)$ è il punto $(4, 5, 3)$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 0, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(0, 1, 1)$,$(0, 0, 0)$ è $1/3$.
   D) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 - 8x = 0$ è una parabola.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri reali diversi da 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme delle matrici reali 5×5 è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
   C) l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4,2)$ e la retta di equazione $2x - y = 4$ è 1.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(0,2,0)$, $(-2,0,-4)$, $(0,2,-2)$ è 3.
   D) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(8,2)$, $(12,-6)$ è $(10,-2)$.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) può accadere che A abbia rango 8 e C abbia rango 9.
   B) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare non omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   C) se $m = n$ e le colonne di A sono tutte diverse fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   D) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto allora $m = n$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   B) ogni spazio vettoriale $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è un campo rispetto alle operazioni $+, \cdot$.
   C) se due gruppi sono isomorfi hanno lo stesso numero di elementi.
   D) l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B sono necessariamente uguali.
   B) T e T^2 ammettono gli stessi autovettori.
   C) T è iniettivo se e solo se 0 non è un autovalore di T.
   D) se T non è un automorfismo allora le matrici A e B sono entrambe non invertibili.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x = 2$ e $z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v \in V$ allora $\langle u + 2v, u - v \rangle = \langle u, u \rangle - 2\langle v, v \rangle$.
   B) se U è un sottospazio vettoriale di V di dimensione h il complemento ortogonale di U ha dimensione $n - h$.
   C) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\| \leq \|u + v\|$.
   D) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se un insieme di 4 quaterne ordinate di numeri reali è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^4$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $\mathbb{R}^4$.
   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono costanti nell'intervallo $[0, 1]$ è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $A^5 \cdot B^5 = B^5 \cdot A^5$.
   B) se A ha una colonna con tutti gli elementi uguali fra loro allora A non è regolare.
   C) se $A \cdot 2B \cdot 3C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   D) se $B = {}^tA$ allora A e B hanno lo stesso determinante.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se una matrice reale 7×7 ha determinante non nullo allora tutti i suoi elementi sono non nulli.
   B) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 3 e lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 2×2 sono fra loro isomorfi.
   C) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = 5A$ è una trasformazione lineare.
   D) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det(A - B)$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $A^5 \cdot B^5 = B^5 \cdot A^5$.
   B) se $A \cdot 2B \cdot 3C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   C) se A ha una colonna con tutti gli elementi uguali fra loro allora A non è regolare.
   D) se $B = {}^tA$ allora A e B hanno lo stesso determinante.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se un insieme di 4 quaterne ordinate di numeri reali è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^4$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $\mathbb{R}^4$.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono costanti nell'intervallo $[0, 1]$ è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x = 2$ e $z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $\mathbb{R}$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua traccia ha dimensione 3.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y, z) = 4x - 5y + z$ è una trasformazione lineare.
   C) se A è una matrice reale $n \times n$ invertibile allora ha determinante uguale a 1.
   D) $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\rho(A) = n$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) > \rho(C)$.
   B) se $m = n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.
   C) se $m < n$ ed $\mathbf{S}$ è omogeneo allora il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   D) il rango di C non può essere strettamente inferiore al rango di A.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile e biunivoco allora anche T^{-1} è diagonalizzabile.
   B) T non può ammettere più di n autovalori distinti.
   C) se A è una matrice reale simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   D) se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v \in V$ allora $\langle u + 2v, u - v \rangle = \langle u, u \rangle - 2\langle v, v \rangle$.
   B) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\| \leq \|u + v\|$.
   C) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
   D) se U è un sottospazio vettoriale di V di dimensione h il complemento ortogonale di U ha dimensione $n - h$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4, 2)$ e la retta di equazione $2x - y = 4$ è 1.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(0, 2, 0)$, $(-2, 0, -4)$, $(0, 2, -2)$ è 3.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(8, 2)$, $(12, -6)$ è $(10, -2)$.
   D) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   B) se due gruppi sono isomorfi hanno lo stesso numero di elementi.
   C) ogni spazio vettoriale $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è un campo rispetto alle operazioni $+, \cdot$.
   D) l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
   B) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle < 0$ se e solo se u è il vettore nullo.
   C) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori di V di norma 1 a due a due ortogonali allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   D) se $u, v \in V$ e $\langle u - v, w \rangle = 0$ per ogni $w \in V$, allora $u = v$.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) T è iniettivo se e solo se 0 non è un autovalore di T.
   B) se T non è un automorfismo allora le matrici A e B sono entrambe non invertibili.
   C) T e T^2 ammettono gli stessi autovettori.
   D) A e B sono necessariamente uguali.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante nullo. Allora
   A) la matrice $A + B + C$ non è regolare.
   B) A^{100} è la matrice nulla.
   C) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ non è una matrice regolare.
   D) A, B e C sono invertibili.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali 5×5 è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
   D) l'insieme dei numeri reali diversi da 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = t, y = -t, z = -t$ e $x - y - z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro ortogonali.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(1, 3, 2)$ è il punto $(4, 5, 3)$.
   B) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge (u \wedge u)$ è il vettore nullo.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 - 8x = 0$ è una parabola.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 0, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(0, 1, 1)$,$(0, 0, 0)$ è 1/3.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = 5A$ è una trasformazione lineare.
   B) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det(A - B)$.
   C) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 3 e lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 2×2 sono fra loro isomorfi.
   D) se una matrice reale 7×7 ha determinante non nullo allora tutti i suoi elementi sono non nulli.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 8×8 con tutti gli elementi uguali è un sottospazio vettoriale di $M_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme $\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   C) l'insieme delle funzioni reali del tipo $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle successioni reali convergenti, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $m = n$ e le colonne di A sono tutte diverse fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   B) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto allora $m = n$.
   C) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare non omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   D) può accadere che A abbia rango 8 e C abbia rango 9.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se A ha una colonna con tutti gli elementi uguali fra loro allora A non è regolare.
   B) se $B = {}^tA$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
   C) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $A^5 \cdot B^5 = B^5 \cdot A^5$.
   D) se $A \cdot 2B \cdot 3C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : xyz = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.
   C) se un insieme di 4 quaterne ordinate di numeri reali è un sistema di generatori per $I\!R^4$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $I\!R^4$.
   D) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ che sono costanti nell'intervallo $[0, 1]$ è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(I\!R)$ ad $I\!R$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua traccia ha dimensione 3.
   B) $A \in M_n(I\!R)$ è invertibile se e solo se $\rho(A) = n$.
   C) la funzione $F : I\!R^3 \to I\!R$ definita come $F(x, y, z) = 4x - 5y + z$ è una trasformazione lineare.
   D) se A è una matrice reale $n \times n$ invertibile allora ha determinante uguale a 1.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) > \rho(C)$.
   B) il rango di C non può essere strettamente inferiore al rango di A.
   C) se $m = n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.
   D) se $m < n$ ed $\mathbf{S}$ è omogeneo allora il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge (u \wedge u)$ è il vettore nullo.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1,0,1)$,$(1,1,0)$,$(0,1,1)$,$(0,0,0)$ è 1/3.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 - 8x = 0$ è una parabola.
   D) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3,2,1)$ rispetto al punto $(1,3,2)$ è il punto $(4,5,3)$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) ogni spazio vettoriale $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è un campo rispetto alle operazioni $+, \cdot$.
   B) l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) se due gruppi sono isomorfi hanno lo stesso numero di elementi.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile e biunivoco allora anche T^{-1} è diagonalizzabile.
   B) se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.
   C) T non può ammettere più di n autovalori distinti.
   D) se A è una matrice reale simmetrica allora T è diagonalizzabile.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle < 0$ se e solo se u è il vettore nullo.
   B) se $u, v \in V$ e $\langle u - v, w \rangle = 0$ per ogni $w \in V$, allora $u = v$.
   C) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori di V di norma 1 a due a due ortogonali allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   D) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = t, y = -t, z = -t$ e $x - y - z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto allora $m = n$.
   B) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare non omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   C) può accadere che A abbia rango 8 e C abbia rango 9.
   D) se $m = n$ e le colonne di A sono tutte diverse fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.

2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x = 2$ e $z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 5×5 è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
   B) l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme dei numeri reali diversi da 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4, 2)$ e la retta di equazione $2x - y = 4$ è 1.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(8, 2)$, $(12, -6)$ è $(10, -2)$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(0, 2, 0)$, $(-2, 0, -4)$, $(0, 2, -2)$ è 3.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni reali del tipo $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$ con $a, b \in I\!R$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali 8×8 con tutti gli elementi uguali è un sottospazio vettoriale di $M_8(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle successioni reali convergenti, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   D) l'insieme $\{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante nullo. Allora
   A) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ non è una matrice regolare.
   B) la matrice $A + B + C$ non è regolare.
   C) A, B e C sono invertibili.
   D) A^{100} è la matrice nulla.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se T non è un automorfismo allora le matrici A e B sono entrambe non invertibili.
   B) T e T^2 ammettono gli stessi autovettori.
   C) A e B sono necessariamente uguali.
   D) T è iniettivo se e solo se 0 non è un autovalore di T.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A, B \in M_n(I\!R)$ allora $\det(A + B) = \det(A - B)$.
   B) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 3 e lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 2×2 sono fra loro isomorfi.
   C) se una matrice reale 7×7 ha determinante non nullo allora tutti i suoi elementi sono non nulli.
   D) la funzione $F : M_2(I\!R) \to M_2(I\!R)$ definita da $F(A) = 5A$ è una trasformazione lineare.

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se U è un sottospazio vettoriale di V di dimensione h il complemento ortogonale di U ha dimensione $n - h$.
   B) se $u, v \in V$ allora $\langle u + 2v, u - v \rangle = \langle u, u \rangle - 2\langle v, v \rangle$.
   C) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
   D) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\| \leq \|u + v\|$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 8×8 con tutti gli elementi uguali è un sottospazio vettoriale di $M_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle successioni reali convergenti, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   C) l'insieme $\{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme delle funzioni reali del tipo $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x = 2$ e $z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4, 2)$ e la retta di equazione $2x - y = 4$ è 1.
   B) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(8, 2)$, $(12, -6)$ è $(10, -2)$.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(0, 2, 0)$, $(-2, 0, -4)$, $(0, 2, -2)$ è 3.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se A è una matrice reale $n \times n$ invertibile allora ha determinante uguale a 1.
   B) $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\rho(A) = n$.
   C) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y, z) = 4x - 5y + z$ è una trasformazione lineare.
   D) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $\mathbb{R}$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua traccia ha dimensione 3.

5) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) se $m < n$ ed **S** è omogeneo allora il sistema **S** ammette infinite soluzioni.
   B) il rango di C non può essere strettamente inferiore al rango di A.
   C) se $m = n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.
   D) **S** ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) > \rho(C)$.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se A è una matrice reale simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   B) se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.
   C) T non può ammettere più di n autovalori distinti.
   D) se T è diagonalizzabile e biunivoco allora anche T^{-1} è diagonalizzabile.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v \in V$ allora $\langle u + 2v, u - v \rangle = \langle u, u \rangle - 2\langle v, v \rangle$.
   B) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
   C) se U è un sottospazio vettoriale di V di dimensione h il complemento ortogonale di U ha dimensione $n - h$.
   D) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\| \leq \|u + v\|$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme dei numeri reali diversi da 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali 5×5 è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.

9) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante nullo. Allora
   A) la matrice $A + B + C$ non è regolare.
   B) A, B e C sono invertibili.
   C) A^{100} è la matrice nulla.
   D) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ non è una matrice regolare.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = t, y = -t, z = -t$ e $x - y - z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
   B) se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori di V di norma 1 a due a due ortogonali allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   C) se $u, v \in V$ e $\langle u - v, w \rangle = 0$ per ogni $w \in V$, allora $u = v$.
   D) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle < 0$ se e solo se u è il vettore nullo.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $B = {}^tA$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
   B) se $A \cdot 2B \cdot 3C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   C) se A ha una colonna con tutti gli elementi uguali fra loro allora A non è regolare.
   D) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $A^5 \cdot B^5 = B^5 \cdot A^5$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) se due gruppi sono isomorfi hanno lo stesso numero di elementi.
   C) ogni spazio vettoriale $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è un campo rispetto alle operazioni $+, \cdot$.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono costanti nell'intervallo $[0,1]$ è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) se un insieme di 4 quaterne ordinate di numeri reali è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^4$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $\mathbb{R}^4$.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) T è iniettivo se e solo se 0 non è un autovalore di T.
   B) se T non è un automorfismo allora le matrici A e B sono entrambe non invertibili.
   C) T e T^2 ammettono gli stessi autovettori.
   D) A e B sono necessariamente uguali.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $m = n$ e le colonne di A sono tutte diverse fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   B) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto allora $m = n$.
   C) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare non omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   D) può accadere che A abbia rango 8 e C abbia rango 9.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = 5A$ è una trasformazione lineare.
   B) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det(A - B)$.
   C) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 3 e lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 2×2 sono fra loro isomorfi.
   D) se una matrice reale 7×7 ha determinante non nullo allora tutti i suoi elementi sono non nulli.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3,2,1)$ rispetto al punto $(1,3,2)$ è il punto $(4,5,3)$.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 - 8x = 0$ è una parabola.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1,0,1)$,$(1,1,0)$,$(0,1,1)$,$(0,0,0)$ è $1/3$.
   D) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge (u \wedge u)$ è il vettore nullo.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se A è una matrice reale $n \times n$ invertibile allora ha determinante uguale a 1.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y, z) = 4x - 5y + z$ è una trasformazione lineare.
   C) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $\mathbb{R}$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua traccia ha dimensione 3.
   D) $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\rho(A) = n$.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se A è una matrice reale simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   B) T non può ammettere più di n autovalori distinti.
   C) se T è diagonalizzabile e biunivoco allora anche T^{-1} è diagonalizzabile.
   D) se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle < 0$ se e solo se u è il vettore nullo.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
   C) se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori di V di norma 1 a due a due ortogonali allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   D) se $u, v \in V$ e $\langle u - v, w \rangle = 0$ per ogni $w \in V$, allora $u = v$.

4) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) se $m < n$ ed **S** è omogeneo allora il sistema **S** ammette infinite soluzioni.
   B) se $m = n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.
   C) **S** ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) > \rho(C)$.
   D) il rango di C non può essere strettamente inferiore al rango di A.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = t, y = -t, z = -t$ e $x - y - z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro ortogonali.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge (u \wedge u)$ è il vettore nullo.
   B) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(1, 3, 2)$ è il punto $(4, 5, 3)$.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 - 8x = 0$ è una parabola.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 0, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(0, 1, 1)$,$(0, 0, 0)$ è $1/3$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri reali diversi da 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme delle matrici reali 5×5 è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante nullo. Allora
   A) A, B e C sono invertibili.
   B) A^{100} è la matrice nulla.
   C) la matrice $A + B + C$ non è regolare.
   D) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ non è una matrice regolare.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali convergenti, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   B) l'insieme $\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   C) l'insieme delle matrici reali 8×8 con tutti gli elementi uguali è un sottospazio vettoriale di $M_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle funzioni reali del tipo $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se A ha una colonna con tutti gli elementi uguali fra loro allora A non è regolare.
   B) se $B = {}^tA$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
   C) se $A \cdot 2B \cdot 3C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   D) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $A^5 \cdot B^5 = B^5 \cdot A^5$.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) T è iniettivo se e solo se 0 non è un autovalore di T.
   B) se T non è un automorfismo allora le matrici A e B sono entrambe non invertibili.
   C) A e B sono necessariamente uguali.
   D) T e T^2 ammettono gli stessi autovettori.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v \in V$ allora $\langle u + 2v, u - v \rangle = \langle u, u \rangle - 2\langle v, v \rangle$.
   B) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
   C) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\| \leq \|u + v\|$.
   D) se U è un sottospazio vettoriale di V di dimensione h il complemento ortogonale di U ha dimensione $n - h$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono costanti nell'intervallo $[0, 1]$ è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) se un insieme di 4 quaterne ordinate di numeri reali è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^4$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $\mathbb{R}^4$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) ogni spazio vettoriale $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è un campo rispetto alle operazioni $+, \cdot$.
   B) l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) se due gruppi sono isomorfi hanno lo stesso numero di elementi.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x = 2$ e $z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $m = n$ e le colonne di A sono tutte diverse fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   B) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto allora $m = n$.
   C) può accadere che A abbia rango 8 e C abbia rango 9.
   D) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare non omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = 5A$ è una trasformazione lineare.
   B) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det(A - B)$.
   C) se una matrice reale 7×7 ha determinante non nullo allora tutti i suoi elementi sono non nulli.
   D) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 3 e lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 2×2 sono fra loro isomorfi.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4, 2)$ e la retta di equazione $2x - y = 4$ è 1.
   B) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(8, 2)$, $(12, -6)$ è $(10, -2)$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(0, 2, 0)$, $(-2, 0, -4)$, $(0, 2, -2)$ è 3.
   D) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ che sono costanti nell'intervallo $[0, 1]$ è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) se un insieme di 4 quaterne ordinate di numeri reali è un sistema di generatori per $I\!R^4$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $I\!R^4$.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : xyz = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) $A \in M_n(I\!R)$ è invertibile se e solo se $\rho(A) = n$.
   B) se A è una matrice reale $n \times n$ invertibile allora ha determinante uguale a 1.
   C) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(I\!R)$ ad $I\!R$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua traccia ha dimensione 3.
   D) la funzione $F : I\!R^3 \to I\!R$ definita come $F(x, y, z) = 4x - 5y + z$ è una trasformazione lineare.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) il rango di C non può essere strettamente inferiore al rango di A.
   B) se $m < n$ ed $\mathbf{S}$ è omogeneo allora il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) > \rho(C)$.
   D) se $m = n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.
   B) se A è una matrice reale simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   C) se T è diagonalizzabile e biunivoco allora anche T^{-1} è diagonalizzabile.
   D) T non può ammettere più di n autovalori distinti.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che

A) se $A \cdot 2B \cdot 3C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.

B) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $A^5 \cdot B^5 = B^5 \cdot A^5$.

C) se A ha una colonna con tutti gli elementi uguali fra loro allora A non è regolare.

D) se $B = {}^tA$ allora A e B hanno lo stesso determinante.

6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x = 2$ e $z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora

A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.

B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4, 2)$ e la retta di equazione $2x - y = 4$ è 1.

C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(8, 2)$, $(12, -6)$ è $(10, -2)$.

D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(0, 2, 0)$, $(-2, 0, -4)$, $(0, 2, -2)$ è 3.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora

A) se U è un sottospazio vettoriale di V di dimensione h il complemento ortogonale di U ha dimensione $n - h$.

B) se $u, v \in V$ allora $\langle u + 2v, u - v \rangle = \langle u, u \rangle - 2\langle v, v \rangle$.

C) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.

D) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\| \leq \|u + v\|$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) se due gruppi sono isomorfi hanno lo stesso numero di elementi.

B) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

C) ogni spazio vettoriale $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è un campo rispetto alle operazioni $+, \cdot$.

D) l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = t, y = -t, z = -t$ e $x - y - z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle < 0$ se e solo se u è il vettore nullo.
   B) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori di V di norma 1 a due a due ortogonali allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   C) se $u, v \in V$ e $\langle u - v, w \rangle = 0$ per ogni $w \in V$, allora $u = v$.
   D) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante nullo. Allora
   A) A^{100} è la matrice nulla.
   B) A, B e C sono invertibili.
   C) la matrice $A + B + C$ non è regolare.
   D) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ non è una matrice regolare.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme dei numeri reali diversi da 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme delle matrici reali 5×5 è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se una matrice reale 7×7 ha determinante non nullo allora tutti i suoi elementi sono non nulli.
   B) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 3 e lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 2×2 sono fra loro isomorfi.
   C) la funzione $F : M_2(I\!R) \to M_2(I\!R)$ definita da $F(A) = 5A$ è una trasformazione lineare.
   D) se $A, B \in M_n(I\!R)$ allora $\det(A + B) = \det(A - B)$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.
   B) l'insieme delle successioni reali convergenti, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   C) l'insieme delle matrici reali 8×8 con tutti gli elementi uguali è un sottospazio vettoriale di $M_8(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle funzioni reali del tipo $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$ con $a, b \in I\!R$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge (u \wedge u)$ è il vettore nullo.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 - 8x = 0$ è una parabola.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1,0,1)$,$(1,1,0)$,$(0,1,1)$,$(0,0,0)$ è $1/3$.
   D) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3,2,1)$ rispetto al punto $(1,3,2)$ è il punto $(4,5,3)$.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) può accadere che A abbia rango 8 e C abbia rango 9.
   B) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare non omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   C) se $m = n$ e le colonne di A sono tutte diverse fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   D) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto allora $m = n$.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B sono necessariamente uguali.
   B) T e T^2 ammettono gli stessi autovettori.
   C) T è iniettivo se e solo se 0 non è un autovalore di T.
   D) se T non è un automorfismo allora le matrici A e B sono entrambe non invertibili.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $\mathbb{R}$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua traccia ha dimensione 3.
   B) $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\rho(A) = n$.
   C) se A è una matrice reale $n \times n$ invertibile allora ha determinante uguale a 1.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y, z) = 4x - 5y + z$ è una trasformazione lineare.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
   B) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle < 0$ se e solo se u è il vettore nullo.
   C) se $u, v \in V$ e $\langle u - v, w \rangle = 0$ per ogni $w \in V$, allora $u = v$.
   D) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori di V di norma 1 a due a due ortogonali allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) > \rho(C)$.
   B) il rango di C non può essere strettamente inferiore al rango di A.
   C) se $m < n$ ed $\mathbf{S}$ è omogeneo allora il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   D) se $m = n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.

4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = t, y = -t, z = -t$ e $x - y - z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3,2,1)$ rispetto al punto $(1,3,2)$ è il punto $(4,5,3)$.
   B) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge (u \wedge u)$ è il vettore nullo.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1,0,1)$,$(1,1,0)$,$(0,1,1)$,$(0,0,0)$ è $1/3$.
   D) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 - 8x = 0$ è una parabola.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile e biunivoco allora anche T^{-1} è diagonalizzabile.
   B) se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.
   C) se A è una matrice reale simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   D) T non può ammettere più di n autovalori distinti.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   B) se due gruppi sono isomorfi hanno lo stesso numero di elementi.
   C) l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) ogni spazio vettoriale $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è un campo rispetto alle operazioni $+, \cdot$.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $A^5 \cdot B^5 = B^5 \cdot A^5$.
   B) se $A \cdot 2B \cdot 3C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   C) se $B = {}^tA$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
   D) se A ha una colonna con tutti gli elementi uguali fra loro allora A non è regolare.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se un insieme di 4 quaterne ordinate di numeri reali è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^4$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $\mathbb{R}^4$.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono costanti nell'intervallo $[0,1]$ è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri reali diversi da 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme delle matrici reali 5×5 è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B sono necessariamente uguali.
   B) T è iniettivo se e solo se 0 non è un autovalore di T.
   C) T e T^2 ammettono gli stessi autovettori.
   D) se T non è un automorfismo allora le matrici A e B sono entrambe non invertibili.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali convergenti, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   B) l'insieme delle matrici reali 8×8 con tutti gli elementi uguali è un sottospazio vettoriale di $M_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle funzioni reali del tipo $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme $\{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

4) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante nullo. Allora
   A) A, B e C sono invertibili.
   B) la matrice $A + B + C$ non è regolare.
   C) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ non è una matrice regolare.
   D) A^{100} è la matrice nulla.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) può accadere che A abbia rango 8 e C abbia rango 9.
   B) se $m = n$ e le colonne di A sono tutte diverse fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   C) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare non omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   D) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto allora $m = n$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se una matrice reale 7×7 ha determinante non nullo allora tutti i suoi elementi sono non nulli.
   B) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = 5A$ è una trasformazione lineare.
   C) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 3 e lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 2×2 sono fra loro isomorfi.
   D) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det(A - B)$.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\| \leq \|u + v\|$.
   B) se U è un sottospazio vettoriale di V di dimensione h il complemento ortogonale di U ha dimensione $n - h$.
   C) se $u, v \in V$ allora $\langle u + 2v, u - v \rangle = \langle u, u \rangle - 2\langle v, v \rangle$.
   D) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(0, 2, 0)$, $(-2, 0, -4)$, $(0, 2, -2)$ è 3.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   C) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4, 2)$ e la retta di equazione $2x - y = 4$ è 1.
   D) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(8, 2)$, $(12, -6)$ è $(10, -2)$.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x = 2$ e $z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x = 2$ e $z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4, 2)$ e la retta di equazione $2x - y = 4$ è 1.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(8, 2)$, $(12, -6)$ è $(10, -2)$.

   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(0, 2, 0)$, $(-2, 0, -4)$, $(0, 2, -2)$ è 3.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 8×8 con tutti gli elementi uguali è un sottospazio vettoriale di $M_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle successioni reali convergenti, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   C) l'insieme $\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme delle funzioni reali del tipo $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) T non può ammettere più di n autovalori distinti.
   B) se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.
   C) se T è diagonalizzabile e biunivoco allora anche T^{-1} è diagonalizzabile.
   D) se A è una matrice reale simmetrica allora T è diagonalizzabile.

5) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v \in V$ allora $\langle u + 2v, u - v \rangle = \langle u, u \rangle - 2\langle v, v \rangle$.
   B) se U è un sottospazio vettoriale di V di dimensione h il complemento ortogonale di U ha dimensione $n - h$.
   C) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
   D) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\| \leq \|u + v\|$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $I\!R$ dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme dei numeri reali diversi da 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali 5×5 è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante nullo. Allora
   A) la matrice $A + B + C$ non è regolare.
   B) A, B e C sono invertibili.
   C) A^{100} è la matrice nulla.
   D) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ non è una matrice regolare.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : I\!R^3 \to I\!R$ definita come $F(x, y, z) = 4x - 5y + z$ è una trasformazione lineare.
   B) $A \in M_n(I\!R)$ è invertibile se e solo se $\rho(A) = n$.
   C) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(I\!R)$ ad $I\!R$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua traccia ha dimensione 3.
   D) se A è una matrice reale $n \times n$ invertibile allora ha determinante uguale a 1.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $m = n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.
   B) il rango di C non può essere strettamente inferiore al rango di A.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) > \rho(C)$.
   D) se $m < n$ ed $\mathbf{S}$ è omogeneo allora il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 3 e lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 2×2 sono fra loro isomorfi.
   B) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A+B) = \det(A-B)$.
   C) se una matrice reale 7×7 ha determinante non nullo allora tutti i suoi elementi sono non nulli.
   D) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = 5A$ è una trasformazione lineare.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se due gruppi sono isomorfi hanno lo stesso numero di elementi.
   B) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   C) l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) ogni spazio vettoriale $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è un campo rispetto alle operazioni $+, \cdot$.

3) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) T e T^2 ammettono gli stessi autovettori.
   B) se T non è un automorfismo allora le matrici A e B sono entrambe non invertibili.
   C) A e B sono necessariamente uguali.
   D) T è iniettivo se e solo se 0 non è un autovalore di T.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 - 8x = 0$ è una parabola.
   B) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge (u \wedge u)$ è il vettore nullo.
   C) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(1, 3, 2)$ è il punto $(4, 5, 3)$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 0, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(0, 1, 1)$,$(0, 0, 0)$ è $1/3$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ che sono costanti nell'intervallo $[0,1]$ è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) se un insieme di 4 quaterne ordinate di numeri reali è un sistema di generatori per $I\!R^4$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $I\!R^4$.
   C) l'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : xyz = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A \cdot 2B \cdot 3C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   B) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $A^5 \cdot B^5 = B^5 \cdot A^5$.
   C) se $B = {}^tA$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
   D) se A ha una colonna con tutti gli elementi uguali fra loro allora A non è regolare.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori di V di norma 1 a due a due ortogonali allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   B) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle < 0$ se e solo se u è il vettore nullo.
   C) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
   D) se $u, v \in V$ e $\langle u - v, w \rangle = 0$ per ogni $w \in V$, allora $u = v$.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare non omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   B) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto allora $m = n$.
   C) può accadere che A abbia rango 8 e C abbia rango 9.
   D) se $m = n$ e le colonne di A sono tutte diverse fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = t, y = -t, z = -t$ e $x - y - z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro ortogonali.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $\mathbb{R}$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua traccia ha dimensione 3.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y, z) = 4x - 5y + z$ è una trasformazione lineare.
   C) $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\rho(A) = n$.
   D) se A è una matrice reale $n \times n$ invertibile allora ha determinante uguale a 1.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) > \rho(C)$.
   B) se $m = n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.
   C) il rango di C non può essere strettamente inferiore al rango di A.
   D) se $m < n$ ed $\mathbf{S}$ è omogeneo allora il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = t, y = -t, z = -t$ e $x - y - z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge (u \wedge u)$ è il vettore nullo.
   B) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(1, 3, 2)$ è il punto $(4, 5, 3)$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 0, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(0, 1, 1)$,$(0, 0, 0)$ è $1/3$.
   D) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 - 8x = 0$ è una parabola.

5) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile e biunivoco allora anche T^{-1} è diagonalizzabile.
   B) T non può ammettere più di n autovalori distinti.
   C) se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.
   D) se A è una matrice reale simmetrica allora T è diagonalizzabile.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle < 0$ se e solo se u è il vettore nullo.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
   C) se $u, v \in V$ e $\langle u - v, w \rangle = 0$ per ogni $w \in V$, allora $u = v$.
   D) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori di V di norma 1 a due a due ortogonali allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri reali diversi da 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali 5×5 è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
   D) l'insieme $I\!R$ dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante nullo. Allora
   A) A, B e C sono invertibili.
   B) A^{100} è la matrice nulla.
   C) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ non è una matrice regolare.
   D) la matrice $A + B + C$ non è regolare.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali convergenti, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   B) l'insieme $\{(1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1), (0,1,1,0), (0,1,0,1), (0,0,1,1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.
   C) l'insieme delle funzioni reali del tipo $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$ con $a, b \in I\!R$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle matrici reali 8×8 con tutti gli elementi uguali è un sottospazio vettoriale di $M_8(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $B = {}^tA$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
   B) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $A^5 \cdot B^5 = B^5 \cdot A^5$.
   C) se A ha una colonna con tutti gli elementi uguali fra loro allora A non è regolare.
   D) se $A \cdot 2B \cdot 3C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   C) ogni spazio vettoriale $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è un campo rispetto alle operazioni $+, \cdot$.
   D) se due gruppi sono isomorfi hanno lo stesso numero di elementi.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   B) se un insieme di 4 quaterne ordinate di numeri reali è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^4$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $\mathbb{R}^4$.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono costanti nell'intervallo $[0, 1]$ è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v \in V$ allora $\langle u + 2v, u - v \rangle = \langle u, u \rangle - 2\langle v, v \rangle$.
   B) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
   C) se U è un sottospazio vettoriale di V di dimensione h il complemento ortogonale di U ha dimensione $n - h$.
   D) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\| \leq \|u + v\|$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) può accadere che A abbia rango 8 e C abbia rango 9.
   B) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare non omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   C) se $m = n$ e le colonne di A sono tutte diverse fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   D) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto allora $m = n$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se una matrice reale 7×7 ha determinante non nullo allora tutti i suoi elementi sono non nulli.
   B) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 3 e lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 2×2 sono fra loro isomorfi.
   C) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = 5A$ è una trasformazione lineare.
   D) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det(A - B)$.

7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x = 2$ e $z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4, 2)$ e la retta di equazione $2x - y = 4$ è 1.
   B) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(8, 2)$, $(12, -6)$ è $(10, -2)$.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(0, 2, 0)$, $(-2, 0, -4)$, $(0, 2, -2)$ è 3.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B sono necessariamente uguali.
   B) T e T^2 ammettono gli stessi autovettori.
   C) T è iniettivo se e solo se 0 non è un autovalore di T.
   D) se T non è un automorfismo allora le matrici A e B sono entrambe non invertibili.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) > \rho(C)$.
   B) se $m = n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.
   C) il rango di C non può essere strettamente inferiore al rango di A.
   D) se $m < n$ ed $\mathbf{S}$ è omogeneo allora il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile e biunivoco allora anche T^{-1} è diagonalizzabile.
   B) T non può ammettere più di n autovalori distinti.
   C) se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.
   D) se A è una matrice reale simmetrica allora T è diagonalizzabile.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v \in V$ allora $\langle u + 2v, u - v \rangle = \langle u, u \rangle - 2\langle v, v \rangle$.
   B) se U è un sottospazio vettoriale di V di dimensione h il complemento ortogonale di U ha dimensione $n - h$.
   C) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\| \leq \|u + v\|$.
   D) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) ogni spazio vettoriale $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è un campo rispetto alle operazioni $+, \cdot$.
   B) l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) se due gruppi sono isomorfi hanno lo stesso numero di elementi.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x = 2$ e $z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4, 2)$ e la retta di equazione $2x - y = 4$ è 1.

B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.

C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(0, 2, 0)$, $(-2, 0, -4)$, $(0, 2, -2)$ è 3.

D) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(8, 2)$, $(12, -6)$ è $(10, -2)$.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che

A) se A ha una colonna con tutti gli elementi uguali fra loro allora A non è regolare.

B) se $B = {}^tA$ allora A e B hanno lo stesso determinante.

C) se $A \cdot 2B \cdot 3C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.

D) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $A^5 \cdot B^5 = B^5 \cdot A^5$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

B) l'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che sono costanti nell'intervallo $[0, 1]$ è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

D) se un insieme di 4 quaterne ordinate di numeri reali è un sistema di generatori per $\mathbb{R}^4$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $\mathbb{R}^4$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):

A) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $\mathbb{R}$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua traccia ha dimensione 3.

B) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y, z) = 4x - 5y + z$ è una trasformazione lineare.

C) $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\rho(A) = n$.

D) se A è una matrice reale $n \times n$ invertibile allora ha determinante uguale a 1.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante nullo. Allora
   A) la matrice $A + B + C$ non è regolare.
   B) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ non è una matrice regolare.
   C) A^{100} è la matrice nulla.
   D) A, B e C sono invertibili.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme delle matrici reali 5×5 è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme dei numeri reali diversi da 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 3 e lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 2×2 sono fra loro isomorfi.
   B) se una matrice reale 7×7 ha determinante non nullo allora tutti i suoi elementi sono non nulli.
   C) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det(A - B)$.
   D) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = 5A$ è una trasformazione lineare.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 8×8 con tutti gli elementi uguali è un sottospazio vettoriale di $M_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle funzioni reali del tipo $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(1,1,0,0), (1,0,1,0), (1,0,0,1), (0,1,1,0), (0,1,0,1), (0,0,1,1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme delle successioni reali convergenti, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = t, y = -t, z = -t$ e $x - y - z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro ortogonali.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.
   B) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori di V di norma 1 a due a due ortogonali allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   C) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle < 0$ se e solo se u è il vettore nullo.
   D) se $u, v \in V$ e $\langle u - v, w \rangle = 0$ per ogni $w \in V$, allora $u = v$.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) T e T^2 ammettono gli stessi autovettori.
   B) A e B sono necessariamente uguali.
   C) se T non è un automorfismo allora le matrici A e B sono entrambe non invertibili.
   D) T è iniettivo se e solo se 0 non è un autovalore di T.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(1, 3, 2)$ è il punto $(4, 5, 3)$.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 - 8x = 0$ è una parabola.
   C) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge (u \wedge u)$ è il vettore nullo.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 0, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(0, 1, 1)$,$(0, 0, 0)$ è 1/3.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare non omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   B) può accadere che A abbia rango 8 e C abbia rango 9.
   C) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto allora $m = n$.
   D) se $m = n$ e le colonne di A sono tutte diverse fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori di V di norma 1 a due a due ortogonali allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   B) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle < 0$ se e solo se u è il vettore nullo.
   C) se $u, v \in V$ e $\langle u - v, w \rangle = 0$ per ogni $w \in V$, allora $u = v$.
   D) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\rho(A) = n$.
   B) il nucleo della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $\mathbb{R}$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua traccia ha dimensione 3.
   C) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y, z) = 4x - 5y + z$ è una trasformazione lineare.
   D) se A è una matrice reale $n \times n$ invertibile allora ha determinante uguale a 1.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) il rango di C non può essere strettamente inferiore al rango di A.
   B) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) > \rho(C)$.
   C) se $m = n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.
   D) se $m < n$ ed $\mathbf{S}$ è omogeneo allora il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 2xy + y^2 - 8x = 0$ è una parabola.
   B) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge (u \wedge u)$ è il vettore nullo.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(1, 0, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(0, 1, 1)$,$(0, 0, 0)$ è 1/3.
   D) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(3, 2, 1)$ rispetto al punto $(1, 3, 2)$ è il punto $(4, 5, 3)$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se due gruppi sono isomorfi hanno lo stesso numero di elementi.
   B) ogni spazio vettoriale $(\mathbf{K}, V, +, \cdot)$ è un campo rispetto alle operazioni $+, \cdot$.
   C) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) l'insieme $\mathbf{Q}$ dei numeri razionali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A \cdot 2B \cdot 3C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   B) se A ha una colonna con tutti gli elementi uguali fra loro allora A non è regolare.
   C) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $A^5 \cdot B^5 = B^5 \cdot A^5$.
   D) se $B = {}^tA$ allora A e B hanno lo stesso determinante.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ che sono costanti nell'intervallo $[0, 1]$ è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : xyz = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) se un insieme di 4 quaterne ordinate di numeri reali è un sistema di generatori per $I\!R^4$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $I\!R^4$.
   D) l'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.

8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = t, y = -t, z = -t$ e $x - y - z = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.
   B) se T è diagonalizzabile e biunivoco allora anche T^{-1} è diagonalizzabile.
   C) T non può ammettere più di n autovalori distinti.
   D) se A è una matrice reale simmetrica allora T è diagonalizzabile.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle \geq 0$.
   B) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\| \leq \|u + v\|$.
   C) se U è un sottospazio vettoriale di V di dimensione h il complemento ortogonale di U ha dimensione $n - h$.
   D) se $u, v \in V$ allora $\langle u + 2v, u - v \rangle = \langle u, u \rangle - 2\langle v, v \rangle$.

2) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante nullo. Allora
   A) A^{100} è la matrice nulla.
   B) la matrice $A + B + C$ non è regolare.
   C) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ non è una matrice regolare.
   D) A, B e C sono invertibili.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(1,1,0,0),(1,0,1,0),(1,0,0,1),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   B) l'insieme delle matrici reali 8×8 con tutti gli elementi uguali è un sottospazio vettoriale di $M_8(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle funzioni reali del tipo $a \cdot \sin x + b \cdot \cos x$ con $a, b \in \mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle successioni reali convergenti, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.

4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x = 2$ e $z = 3$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare non omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   B) se $m = n$ e le colonne di A sono tutte diverse fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   C) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto allora $m = n$.
   D) può accadere che A abbia rango 8 e C abbia rango 9.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 3 e lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 2×2 sono fra loro isomorfi.
   B) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = 5A$ è una trasformazione lineare.
   C) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A + B) = \det(A - B)$.
   D) se una matrice reale 7×7 ha determinante non nullo allora tutti i suoi elementi sono non nulli.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) T e T^2 ammettono gli stessi autovettori.
   B) T è iniettivo se e solo se 0 non è un autovalore di T.
   C) se T non è un automorfismo allora le matrici A e B sono entrambe non invertibili.
   D) A e B sono necessariamente uguali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(8, 2)$, $(12, -6)$ è $(10, -2)$.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(0, 2, 0)$, $(-2, 0, -4)$, $(0, 2, -2)$ è 3.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 4xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4, 2)$ e la retta di equazione $2x - y = 4$ è 1.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme delle matrici reali 5×5 è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
   D) l'insieme dei numeri reali diversi da 0 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.