Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   B) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
   C) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme dei numeri reali negativi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

2) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 2. Allora
   A) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ può non essere una matrice regolare.
   B) la matrice $A + {}^tA$ è simmetrica.
   C) A^{100} ha determinante maggiore di 100.
   D) A, B e C hanno la stessa traccia.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni reali che non si annullano in nessun punto è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali 7×9 con l'elemento di posto $(2,3)$ nullo è un sottospazio vettoriale di $M_{7\times 9}(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme $\{(0,1,1,1),(1,0,1,1),(1,1,0,1),(1,1,1,0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.
   D) l'insieme delle successioni reali convergenti a 1, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : I\!R^3 \to I\!R$ definita come $F(x,y,z) = xy - yz$ è una trasformazione lineare.
   B) il nucleo della trasformazione lineare da $M_5(I\!R)$ ad $I\!R$ che manda ogni matrice reale 5×5 nella somma di tutti i suoi elementi ha dimensione 24.
   C) $A \in M_n(I\!R)$ è invertibile se e solo se $\rho(A) = 0$.
   D) se A è una matrice reale $n \times n$ invertibile allora ha determinante diverso da 0.

5) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di n equazioni in n incognite (n intero positivo). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.
   B) **S** ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = n$.
   C) il rango di C può essere strettamente superiore al rango di A.
   D) se **S** è omogeneo allora il sistema **S** ammette infinite soluzioni.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) T può avere n autovalori distinti.
   B) se T è diagonalizzabile allora anche $-T$ è diagonalizzabile.
   C) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n se e solo se T è diagonalizzabile.
   D) se A non è una matrice reale simmetrica allora T non è diagonalizzabile.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se v è il vettore nullo di V risulta $\langle v, v \rangle = 0$.
   B) se $u, v, w \in V$ e $\langle u - w, v - w \rangle = 0$ allora $u = v = w$.
   C) se U è un sottospazio vettoriale di V, U e il complemento ortogonale di U hanno in comune soltanto il vettore nullo.
   D) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y = 0$ e $z - 3 = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4, 2)$ e il punto di coordinate $(1, -2)$ è 5.
   B) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 4, 0)$ rispetto al punto $(4, 0, 1)$ è il punto $(0, 1, 4)$.
   C) nel piano euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni cartesiane $x+2y = 0$ e $2x+y = 0$ è di $\frac{\pi}{6}$ radianti.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(3, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 3)$ è 9.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B possono avere tracce diverse fra loro.
   B) se T non è iniettivo allora T ha almeno un autovettore non nullo.
   C) tutti gli autovettori di T sono anche autovettori di T^5.
   D) A e B sono matrici simili.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(0, 1, 2)$, $(2, 1, 0)$ è il punto $(1, 1, 1)$.
   B) nello spazio euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = 0$ e $x = 0, y = t, z = t$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.
   C) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4, 2)$ e la retta di equazione $x + y + 1 = 0$ è 5.
   D) se u, v sono vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $(u + v) \wedge (u + v)$ è il vettore nullo.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 1, z = 2$ e $x = 1, y = t, z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.
   B) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A + 2 \cdot I$ è una trasformazione lineare (I = matrice identica 2×2).
   C) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 2 e lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 2×2 non sono fra loro isomorfi.
   D) se una matrice reale 7×7 ha traccia non nulla allora ha anche determinante non nullo.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A + B + C$ è una matrice non regolare allora anche A, B e C sono matrici non regolari.
   B) se A non ha colonne nulle allora A è regolare.
   C) se $B = 2 \cdot A$ allora $\det B = 2 \det A$.
   D) $Tr(A - 2 \cdot B) = Tr(A) - 2 \cdot Tr(B)$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) tutti i gruppi commutativi hanno un numero infinito di elementi.
   B) se $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ è un campo allora $(\mathbf{K}, +)$ è un gruppo commutativo.
   C) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto allora $m < n$.
   B) se le colonne di A sono tutte uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   C) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   D) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 4.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili almeno due volte è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^2$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle matrici reali 3×3 che hanno esattamente un elemento diverso da zero è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   D) ogni insieme di 4 distinte quaterne ordinate di numeri reali è necessariamente una base di $\mathbb{R}^4$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale).

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, w \in V$ e $\langle u, w \rangle = 0$ allora almeno uno dei due vettori u, w è nullo.
   B) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori di V linearmente indipendenti allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   C) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = -\langle v, u \rangle$.
   D) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle \geq 0$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 2. Allora
   A) A, B e C hanno la stessa traccia.
   B) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ può non essere una matrice regolare.
   C) la matrice $A + {}^tA$ è simmetrica.
   D) A^{100} ha determinante maggiore di 100.

2) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di n equazioni in n incognite (n intero positivo). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) se **S** è omogeneo allora il sistema **S** ammette infinite soluzioni.
   B) il rango di C può essere strettamente superiore al rango di A.
   C) **S** ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = n$.
   D) l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.

3) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se A non è una matrice reale simmetrica allora T non è diagonalizzabile.
   B) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n se e solo se T è diagonalizzabile.
   C) se T è diagonalizzabile allora anche $-T$ è diagonalizzabile.
   D) T può avere n autovalori distinti.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle \geq 0$.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = -\langle v, u \rangle$.
   C) se $u, w \in V$ e $\langle u, w \rangle = 0$ allora almeno uno dei due vettori u, w è nullo.
   D) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori di V linearmente indipendenti allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali convergenti a 1, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   B) l'insieme delle funzioni reali che non si annullano in nessun punto è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle matrici reali 7×9 con l'elemento di posto $(2, 3)$ nullo è un sottospazio vettoriale di $M_{7\times 9}(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme $\{(0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se A è una matrice reale $n \times n$ invertibile allora ha determinante diverso da 0.
   B) $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\rho(A) = 0$.
   C) il nucleo della trasformazione lineare da $M_5(\mathbb{R})$ ad $\mathbb{R}$ che manda ogni matrice reale 5×5 nella somma di tutti i suoi elementi ha dimensione 24.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y, z) = xy - yz$ è una trasformazione lineare.

7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 1, z = 2$ e $x = 1, y = t, z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v sono vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $(u + v) \wedge (u + v)$ è il vettore nullo.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4, 2)$ e la retta di equazione $x + y + 1 = 0$ è 5.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(0, 1, 2)$, $(2, 1, 0)$ è il punto $(1, 1, 1)$.
   D) nello spazio euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = 0$ e $x = 0, y = t, z = t$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri reali negativi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   C) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 4, 0)$ rispetto al punto $(4, 0, 1)$ è il punto $(0, 1, 4)$.
   B) nel piano euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni cartesiane $x+2y = 0$ e $2x+y = 0$ è di $\frac{\pi}{6}$ radianti.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(3, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 3)$ è 9.
   D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4, 2)$ e il punto di coordinate $(1, -2)$ è 5.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 4.
   B) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   C) se le colonne di A sono tutte uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   D) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto allora $m < n$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) se $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ è un campo allora $(\mathbf{K}, +)$ è un gruppo commutativo.
   C) tutti i gruppi commutativi hanno un numero infinito di elementi.
   D) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B sono matrici simili.
   B) tutti gli autovettori di T sono anche autovettori di T^5.
   C) se T non è iniettivo allora T ha almeno un autovettore non nullo.
   D) A e B possono avere tracce diverse fra loro.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y = 0$ e $z - 3 = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v, w \in V$ e $\langle u - w, v - w \rangle = 0$ allora $u = v = w$.
   B) se U è un sottospazio vettoriale di V, U e il complemento ortogonale di U hanno in comune soltanto il vettore nullo.
   C) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
   D) se v è il vettore nullo di V risulta $\langle v, v \rangle = 0$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) ogni insieme di 4 distinte quaterne ordinate di numeri reali è necessariamente una base di $\mathbb{R}^4$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale).
   B) l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^2$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili almeno due volte è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle matrici reali 3×3 che hanno esattamente un elemento diverso da zero è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) $Tr(A - 2 \cdot B) = Tr(A) - 2 \cdot Tr(B)$.
   B) se A non ha colonne nulle allora A è regolare.
   C) se $A + B + C$ è una matrice non regolare allora anche A, B e C sono matrici non regolari.
   D) se $B = 2 \cdot A$ allora $\det B = 2 \det A$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se una matrice reale 7×7 ha traccia non nulla allora ha anche determinante non nullo.
   B) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 2 e lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 2×2 non sono fra loro isomorfi.
   C) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A + 2 \cdot I$ è una trasformazione lineare (I = matrice identica 2×2).
   D) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) $Tr(A - 2 \cdot B) = Tr(A) - 2 \cdot Tr(B)$.
   B) se $A + B + C$ è una matrice non regolare allora anche A, B e C sono matrici non regolari.
   C) se A non ha colonne nulle allora A è regolare.
   D) se $B = 2 \cdot A$ allora $\det B = 2 \det A$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) ogni insieme di 4 distinte quaterne ordinate di numeri reali è necessariamente una base di $I\!R^4$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale).
   B) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ derivabili almeno due volte è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x, y) \in I\!R^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^2$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle matrici reali 3×3 che hanno esattamente un elemento diverso da zero è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y = 0$ e $z - 3 = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasformazione lineare da $M_5(I\!R)$ ad $I\!R$ che manda ogni matrice reale 5×5 nella somma di tutti i suoi elementi ha dimensione 24.
   B) la funzione $F : I\!R^3 \to I\!R$ definita come $F(x, y, z) = xy - yz$ è una trasformazione lineare.
   C) se A è una matrice reale $n \times n$ invertibile allora ha determinante diverso da 0.
   D) $A \in M_n(I\!R)$ è invertibile se e solo se $\rho(A) = 0$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di n equazioni in n incognite (n intero positivo). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = n$.
   B) l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.
   C) se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   D) il rango di C può essere strettamente superiore al rango di A.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora anche $-T$ è diagonalizzabile.
   B) T può avere n autovalori distinti.
   C) se A non è una matrice reale simmetrica allora T non è diagonalizzabile.
   D) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n se e solo se T è diagonalizzabile.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v, w \in V$ e $\langle u - w, v - w \rangle = 0$ allora $u = v = w$.
   B) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
   C) se v è il vettore nullo di V risulta $\langle v, v \rangle = 0$.
   D) se U è un sottospazio vettoriale di V, U e il complemento ortogonale di U hanno in comune soltanto il vettore nullo.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 4, 0)$ rispetto al punto $(4, 0, 1)$ è il punto $(0, 1, 4)$.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(3, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 3)$ è 9.
   C) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4, 2)$ e il punto di coordinate $(1, -2)$ è 5.
   D) nel piano euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni cartesiane $x+2y = 0$ e $2x+y = 0$ è di $\frac{\pi}{6}$ radianti.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) tutti i gruppi commutativi hanno un numero infinito di elementi.
   C) se $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ è un campo allora $(\mathbf{K}, +)$ è un gruppo commutativo.
   D) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = -\langle v, u \rangle$.
   B) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle \geq 0$.
   C) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori di V linearmente indipendenti allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   D) se $u, w \in V$ e $\langle u, w \rangle = 0$ allora almeno uno dei due vettori u, w è nullo.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se T non è iniettivo allora T ha almeno un autovettore non nullo.
   B) A e B possono avere tracce diverse fra loro.
   C) tutti gli autovettori di T sono anche autovettori di T^5.
   D) A e B sono matrici simili.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 2. Allora
   A) la matrice $A +{}^tA$ è simmetrica.
   B) A^{100} ha determinante maggiore di 100.
   C) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ può non essere una matrice regolare.
   D) A, B e C hanno la stessa traccia.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) l'insieme dei numeri reali negativi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 1, z = 2$ e $x = 1, y = t, z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4,2)$ e la retta di equazione $x+y+1=0$ è 5.
   B) se u, v sono vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $(u+v) \wedge (u+v)$ è il vettore nullo.
   C) nello spazio euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x=t, y=t, z=0$ e $x=0, y=t, z=t$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.
   D) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(0,1,2)$, $(2,1,0)$ è il punto $(1,1,1)$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : M_2(I\!R) \to M_2(I\!R)$ definita da $F(A) = A + 2 \cdot I$ è una trasformazione lineare (I = matrice identica 2×2).
   B) se $A, B \in M_n(I\!R)$ allora $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.
   C) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 2 e lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 2×2 non sono fra loro isomorfi.
   D) se una matrice reale 7×7 ha traccia non nulla allora ha anche determinante non nullo.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 7×9 con l'elemento di posto $(2,3)$ nullo è un sottospazio vettoriale di $M_{7\times 9}(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme $\{(0,1,1,1), (1,0,1,1), (1,1,0,1), (1,1,1,0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.
   C) l'insieme delle funzioni reali che non si annullano in nessun punto è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle successioni reali convergenti a 1, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se le colonne di A sono tutte uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   B) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto allora $m < n$.
   C) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   D) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 4.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   - A) se A non ha colonne nulle allora A è regolare.
   - B) se $B = 2 \cdot A$ allora $\det B = 2 \det A$.
   - C) $Tr(A - 2 \cdot B) = Tr(A) - 2 \cdot Tr(B)$.
   - D) se $A + B + C$ è una matrice non regolare allora anche A, B e C sono matrici non regolari.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   - A) l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^2$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   - B) l'insieme delle matrici reali 3×3 che hanno esattamente un elemento diverso da zero è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   - C) ogni insieme di 4 distinte quaterne ordinate di numeri reali è necessariamente una base di $\mathbb{R}^4$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale).
   - D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili almeno due volte è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   - A) il nucleo della trasformazione lineare da $M_5(\mathbb{R})$ ad $\mathbb{R}$ che manda ogni matrice reale 5×5 nella somma di tutti i suoi elementi ha dimensione 24.
   - B) $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\rho(A) = 0$.
   - C) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y, z) = xy - yz$ è una trasformazione lineare.
   - D) se A è una matrice reale $n \times n$ invertibile allora ha determinante diverso da 0.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di n equazioni in n incognite (n intero positivo). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   - A) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = n$.
   - B) il rango di C può essere strettamente superiore al rango di A.
   - C) l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.
   - D) se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v sono vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $(u+v) \wedge (u+v)$ è il vettore nullo.
   B) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(0,1,2)$, $(2,1,0)$ è il punto $(1,1,1)$.
   C) nello spazio euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = 0$ e $x = 0, y = t, z = t$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.
   D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4,2)$ e la retta di equazione $x + y + 1 = 0$ è 5.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ è un campo allora $(\mathbf{K}, +)$ è un gruppo commutativo.
   B) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) tutti i gruppi commutativi hanno un numero infinito di elementi.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora anche $-T$ è diagonalizzabile.
   B) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n se e solo se T è diagonalizzabile.
   C) T può avere n autovalori distinti.
   D) se A non è una matrice reale simmetrica allora T non è diagonalizzabile.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle \geq 0$.
   B) se $u, w \in V$ e $\langle u, w \rangle = 0$ allora almeno uno dei due vettori u, w è nullo.
   C) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori di V linearmente indipendenti allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   D) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = -\langle v, u \rangle$.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 1, z = 2$ e $x = 1, y = t, z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto allora $m < n$.
   B) se **S** è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   C) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 4.
   D) se le colonne di A sono tutte uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.

2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y = 0$ e $z - 3 = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   B) l'insieme **Z** dei numeri interi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
   C) l'insieme dei numeri reali negativi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni cartesiane $x+2y = 0$ e $2x+y = 0$ è di $\frac{\pi}{6}$ radianti.
   B) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 4, 0)$ rispetto al punto $(4, 0, 1)$ è il punto $(0, 1, 4)$.
   C) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4, 2)$ e il punto di coordinate $(1, -2)$ è 5.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(3, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 3)$ è 9.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni reali che non si annullano in nessun punto è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali 7×9 con l'elemento di posto $(2,3)$ nullo è un sottospazio vettoriale di $M_{7\times 9}(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle successioni reali convergenti a 1, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   D) l'insieme $\{(0,1,1,1),(1,0,1,1),(1,1,0,1),(1,1,1,0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n\times n$ con determinante uguale a 2. Allora
   A) ${}^t(A\cdot B\cdot C)$ può non essere una matrice regolare.
   B) la matrice $A+{}^tA$ è simmetrica.
   C) A, B e C hanno la stessa traccia.
   D) A^{100} ha determinante maggiore di 100.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n>0$ e siano A,B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B possono avere tracce diverse fra loro.
   B) tutti gli autovettori di T sono anche autovettori di T^5.
   C) A e B sono matrici simili.
   D) se T non è iniettivo allora T ha almeno un autovettore non nullo.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A,B\in M_n(I\!R)$ allora $\det(A\cdot B)=\det(B\cdot A)$.
   B) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 2 e lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 2×2 non sono fra loro isomorfi.
   C) se una matrice reale 7×7 ha traccia non nulla allora ha anche determinante non nullo.
   D) la funzione $F: M_2(I\!R)\to M_2(I\!R)$ definita da $F(A)=A+2\cdot I$ è una trasformazione lineare ($I=$ matrice identica 2×2).

9) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n>0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) se U è un sottospazio vettoriale di V, U e il complemento ortogonale di U hanno in comune soltanto il vettore nullo.
   B) se $u,v,w\in V$ e $\langle u-w,v-w\rangle=0$ allora $u=v=w$.
   C) se v è il vettore nullo di V risulta $\langle v,v\rangle=0$.
   D) se $u,v\in V$ allora $\|u-v\|\leq\|u\|+\|v\|$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 7×9 con l'elemento di posto $(2,3)$ nullo è un sottospazio vettoriale di $M_{7\times 9}(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle successioni reali convergenti a 1, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   C) l'insieme $\{(0,1,1,1),(1,0,1,1),(1,1,0,1),(1,1,1,0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.
   D) l'insieme delle funzioni reali che non si annullano in nessun punto è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x-y=0$ e $z-3=0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1,4,0)$ rispetto al punto $(4,0,1)$ è il punto $(0,1,4)$.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4,2)$ e il punto di coordinate $(1,-2)$ è 5.
   C) nel piano euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni cartesiane $x+2y=0$ e $2x+y=0$ è di $\frac{\pi}{6}$ radianti.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(3,0,0)$, $(0,3,0)$, $(0,0,3)$ è 9.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se A è una matrice reale $n\times n$ invertibile allora ha determinante diverso da 0.
   B) $A\in M_n(I\!R)$ è invertibile se e solo se $\rho(A)=0$.
   C) la funzione $F: I\!R^3\to I\!R$ definita come $F(x,y,z)=xy-yz$ è una trasformazione lineare.
   D) il nucleo della trasformazione lineare da $M_5(I\!R)$ ad $I\!R$ che manda ogni matrice reale 5×5 nella somma di tutti i suoi elementi ha dimensione 24.

5) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di n equazioni in n incognite (n intero positivo). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
A) se **S** è omogeneo allora il sistema **S** ammette infinite soluzioni.
B) il rango di C può essere strettamente superiore al rango di A.
C) l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.
D) **S** ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = n$.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
A) se A non è una matrice reale simmetrica allora T non è diagonalizzabile.
B) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n se e solo se T è diagonalizzabile.
C) T può avere n autovalori distinti.
D) se T è diagonalizzabile allora anche $-T$ è diagonalizzabile.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
A) se $u, v, w \in V$ e $\langle u - w, v - w \rangle = 0$ allora $u = v = w$.
B) se v è il vettore nullo di V risulta $\langle v, v \rangle = 0$.
C) se U è un sottospazio vettoriale di V, U e il complemento ortogonale di U hanno in comune soltanto il vettore nullo.
D) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
A) l'insieme **Z** dei numeri interi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
B) l'insieme dei numeri reali negativi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
D) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

9) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 2. Allora
A) la matrice $A + {}^tA$ è simmetrica.
B) A, B e C hanno la stessa traccia.
C) A^{100} ha determinante maggiore di 100.
D) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ può non essere una matrice regolare.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 1, z = 2$ e $x = 1, y = t, z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = -\langle v, u \rangle$.
   B) se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori di V linearmente indipendenti allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   C) se $u, w \in V$ e $\langle u, w \rangle = 0$ allora almeno uno dei due vettori u, w è nullo.
   D) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle \geq 0$.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $B = 2 \cdot A$ allora $\det B = 2 \det A$.
   B) se $A + B + C$ è una matrice non regolare allora anche A, B e C sono matrici non regolari.
   C) se A non ha colonne nulle allora A è regolare.
   D) $Tr(A - 2 \cdot B) = Tr(A) - 2 \cdot Tr(B)$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) tutti i gruppi commutativi hanno un numero infinito di elementi.
   C) se $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ è un campo allora $(\mathbf{K}, +)$ è un gruppo commutativo.
   D) l'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 3×3 che hanno esattamente un elemento diverso da zero è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.
   B) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ derivabili almeno due volte è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x, y) \in I\!R^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^2$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) ogni insieme di 4 distinte quaterne ordinate di numeri reali è necessariamente una base di $I\!R^4$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale).

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se T non è iniettivo allora T ha almeno un autovettore non nullo.
   B) A e B possono avere tracce diverse fra loro.
   C) tutti gli autovettori di T sono anche autovettori di T^5.
   D) A e B sono matrici simili.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se le colonne di A sono tutte uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   B) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto allora $m < n$.
   C) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   D) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 4.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : M_2(I\!R) \to M_2(I\!R)$ definita da $F(A) = A + 2 \cdot I$ è una trasformazione lineare ($I =$ matrice identica 2×2).
   B) se $A, B \in M_n(I\!R)$ allora $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.
   C) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 2 e lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 2×2 non sono fra loro isomorfi.
   D) se una matrice reale 7×7 ha traccia non nulla allora ha anche determinante non nullo.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4, 2)$ e la retta di equazione $x + y + 1 = 0$ è 5.
   B) nello spazio euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = 0$ e $x = 0, y = t, z = t$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(0, 1, 2)$, $(2, 1, 0)$ è il punto $(1, 1, 1)$.
   D) se u, v sono vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $(u + v) \wedge (u + v)$ è il vettore nullo.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se A è una matrice reale $n \times n$ invertibile allora ha determinante diverso da 0.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y, z) = xy - yz$ è una trasformazione lineare.
   C) il nucleo della trasformazione lineare da $M_5(\mathbb{R})$ ad $\mathbb{R}$ che manda ogni matrice reale 5×5 nella somma di tutti i suoi elementi ha dimensione 24.
   D) $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\rho(A) = 0$.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se A non è una matrice reale simmetrica allora T non è diagonalizzabile.
   B) T può avere n autovalori distinti.
   C) se T è diagonalizzabile allora anche $-T$ è diagonalizzabile.
   D) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n se e solo se T è diagonalizzabile.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle \geq 0$.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = -\langle v, u \rangle$.
   C) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori di V linearmente indipendenti allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   D) se $u, w \in V$ e $\langle u, w \rangle = 0$ allora almeno uno dei due vettori u, w è nullo.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di n equazioni in n incognite (n intero positivo). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   B) l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = n$.
   D) il rango di C può essere strettamente superiore al rango di A.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 1, z = 2$ e $x = 1, y = t, z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v sono vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $(u+v) \wedge (u+v)$ è il vettore nullo.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4,2)$ e la retta di equazione $x+y+1=0$ è 5.
   C) nello spazio euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x=t, y=t, z=0$ e $x=0, y=t, z=t$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.
   D) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(0,1,2)$, $(2,1,0)$ è il punto $(1,1,1)$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri reali negativi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 2. Allora
   A) A, B e C hanno la stessa traccia.
   B) A^{100} ha determinante maggiore di 100.
   C) la matrice $A + {}^tA$ è simmetrica.
   D) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ può non essere una matrice regolare.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali convergenti a 1, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   B) l'insieme $\{(0,1,1,1),(1,0,1,1),(1,1,0,1),(1,1,1,0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.
   C) l'insieme delle matrici reali 7×9 con l'elemento di posto $(2,3)$ nullo è un sottospazio vettoriale di $M_{7\times 9}(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle funzioni reali che non si annullano in nessun punto è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se A non ha colonne nulle allora A è regolare.
   B) se $B = 2 \cdot A$ allora $\det B = 2 \det A$.
   C) se $A + B + C$ è una matrice non regolare allora anche A, B e C sono matrici non regolari.
   D) $Tr(A - 2 \cdot B) = Tr(A) - 2 \cdot Tr(B)$.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se T non è iniettivo allora T ha almeno un autovettore non nullo.
   B) A e B possono avere tracce diverse fra loro.
   C) A e B sono matrici simili.
   D) tutti gli autovettori di T sono anche autovettori di T^5.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v, w \in V$ e $\langle u - w, v - w \rangle = 0$ allora $u = v = w$.
   B) se v è il vettore nullo di V risulta $\langle v, v \rangle = 0$.
   C) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
   D) se U è un sottospazio vettoriale di V, U e il complemento ortogonale di U hanno in comune soltanto il vettore nullo.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^2$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle matrici reali 3×3 che hanno esattamente un elemento diverso da zero è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili almeno due volte è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) ogni insieme di 4 distinte quaterne ordinate di numeri reali è necessariamente una base di $\mathbb{R}^4$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale).

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ è un campo allora $(\mathbf{K}, +)$ è un gruppo commutativo.
   B) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) tutti i gruppi commutativi hanno un numero infinito di elementi.
   D) l'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.

6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y = 0$ e $z - 3 = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se le colonne di A sono tutte uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   B) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto allora $m < n$.
   C) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 4.
   D) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A + 2 \cdot I$ è una trasformazione lineare ($I =$ matrice identica 2×2).
   B) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.
   C) se una matrice reale 7×7 ha traccia non nulla allora ha anche determinante non nullo.
   D) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 2 e lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 2×2 non sono fra loro isomorfi.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 4, 0)$ rispetto al punto $(4, 0, 1)$ è il punto $(0, 1, 4)$.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4, 2)$ e il punto di coordinate $(1, -2)$ è 5.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(3, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 3)$ è 9.
   D) nel piano euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni cartesiane $x+2y = 0$ e $2x+y = 0$ è di $\frac{\pi}{6}$ radianti.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili almeno due volte è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) ogni insieme di 4 distinte quaterne ordinate di numeri reali è necessariamente una base di $\mathbb{R}^4$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale).
   C) l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^2$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle matrici reali 3×3 che hanno esattamente un elemento diverso da zero è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\rho(A) = 0$.
   B) se A è una matrice reale $n \times n$ invertibile allora ha determinante diverso da 0.
   C) il nucleo della trasformazione lineare da $M_5(\mathbb{R})$ ad $\mathbb{R}$ che manda ogni matrice reale 5×5 nella somma di tutti i suoi elementi ha dimensione 24.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y, z) = xy - yz$ è una trasformazione lineare.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di n equazioni in n incognite (n intero positivo). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) il rango di C può essere strettamente superiore al rango di A.
   B) se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = n$.
   D) l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n se e solo se T è diagonalizzabile.
   B) se A non è una matrice reale simmetrica allora T non è diagonalizzabile.
   C) se T è diagonalizzabile allora anche $-T$ è diagonalizzabile.
   D) T può avere n autovalori distinti.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A + B + C$ è una matrice non regolare allora anche A, B e C sono matrici non regolari.
   B) $Tr(A - 2 \cdot B) = Tr(A) - 2 \cdot Tr(B)$.
   C) se A non ha colonne nulle allora A è regolare.
   D) se $B = 2 \cdot A$ allora $\det B = 2 \det A$.

6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y = 0$ e $z - 3 = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni cartesiane $x+2y = 0$ e $2x+y = 0$ è di $\frac{\pi}{6}$ radianti.
   B) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 4, 0)$ rispetto al punto $(4, 0, 1)$ è il punto $(0, 1, 4)$.
   C) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4, 2)$ e il punto di coordinate $(1, -2)$ è 5.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(3, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 3)$ è 9.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se U è un sottospazio vettoriale di V, U e il complemento ortogonale di U hanno in comune soltanto il vettore nullo.
   B) se $u, v, w \in V$ e $\langle u - w, v - w \rangle = 0$ allora $u = v = w$.
   C) se v è il vettore nullo di V risulta $\langle v, v \rangle = 0$.
   D) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) tutti i gruppi commutativi hanno un numero infinito di elementi.
   B) l'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) se $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ è un campo allora $(\mathbf{K}, +)$ è un gruppo commutativo.
   D) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 1, z = 2$ e $x = 1, y = t, z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle \geq 0$.
   B) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori di V linearmente indipendenti allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   C) se $u, w \in V$ e $\langle u, w \rangle = 0$ allora almeno uno dei due vettori u, w è nullo.
   D) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = -\langle v, u \rangle$.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 2. Allora
   A) A^{100} ha determinante maggiore di 100.
   B) A, B e C hanno la stessa traccia.
   C) la matrice $A + {}^tA$ è simmetrica.
   D) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ può non essere una matrice regolare.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme dei numeri reali negativi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se una matrice reale 7×7 ha traccia non nulla allora ha anche determinante non nullo.
   B) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 2 e lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 2×2 non sono fra loro isomorfi.
   C) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A + 2 \cdot I$ è una trasformazione lineare ($I =$ matrice identica 2×2).
   D) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   B) l'insieme delle successioni reali convergenti a 1, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   C) l'insieme delle matrici reali 7×9 con l'elemento di posto $(2, 3)$ nullo è un sottospazio vettoriale di $M_{7\times9}(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle funzioni reali che non si annullano in nessun punto è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v sono vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $(u + v) \wedge (u + v)$ è il vettore nullo.
   B) nello spazio euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = 0$ e $x = 0, y = t, z = t$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(0, 1, 2)$, $(2, 1, 0)$ è il punto $(1, 1, 1)$.
   D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4, 2)$ e la retta di equazione $x + y + 1 = 0$ è 5.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 4.
   B) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   C) se le colonne di A sono tutte uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   D) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto allora $m < n$.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B sono matrici simili.
   B) tutti gli autovettori di T sono anche autovettori di T^5.
   C) se T non è iniettivo allora T ha almeno un autovettore non nullo.
   D) A e B possono avere tracce diverse fra loro.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasformazione lineare da $M_5(\mathbb{R})$ ad $\mathbb{R}$ che manda ogni matrice reale 5×5 nella somma di tutti i suoi elementi ha dimensione 24.
   B) $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\rho(A) = 0$.
   C) se A è una matrice reale $n \times n$ invertibile allora ha determinante diverso da 0.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y, z) = xy - yz$ è una trasformazione lineare.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v\rangle = -\langle v, u\rangle$.
   B) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u\rangle \geq 0$.
   C) se $u, w \in V$ e $\langle u, w\rangle = 0$ allora almeno uno dei due vettori u, w è nullo.
   D) se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori di V linearmente indipendenti allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di n equazioni in n incognite (n intero positivo). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = n$.
   B) il rango di C può essere strettamente superiore al rango di A.
   C) se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   D) l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.

4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 1, z = 2$ e $x = 1, y = t, z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4, 2)$ e la retta di equazione $x + y + 1 = 0$ è 5.
   B) se u, v sono vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $(u + v) \wedge (u + v)$ è il vettore nullo.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(0, 1, 2)$, $(2, 1, 0)$ è il punto $(1, 1, 1)$.
   D) nello spazio euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = 0$ e $x = 0, y = t, z = t$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora anche $-T$ è diagonalizzabile.
   B) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n se e solo se T è diagonalizzabile.
   C) se A non è una matrice reale simmetrica allora T non è diagonalizzabile.
   D) T può avere n autovalori distinti.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) tutti i gruppi commutativi hanno un numero infinito di elementi.
   C) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) se $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ è un campo allora $(\mathbf{K}, +)$ è un gruppo commutativo.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) $Tr(A - 2 \cdot B) = Tr(A) - 2 \cdot Tr(B)$.
   B) se $A + B + C$ è una matrice non regolare allora anche A, B e C sono matrici non regolari.
   C) se $B = 2 \cdot A$ allora $\det B = 2 \det A$.
   D) se A non ha colonne nulle allora A è regolare.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) ogni insieme di 4 distinte quaterne ordinate di numeri reali è necessariamente una base di $\mathbb{R}^4$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale).
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili almeno due volte è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle matrici reali 3×3 che hanno esattamente un elemento diverso da zero è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^2$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri reali negativi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B sono matrici simili.
   B) se T non è iniettivo allora T ha almeno un autovettore non nullo.
   C) tutti gli autovettori di T sono anche autovettori di T^5.
   D) A e B possono avere tracce diverse fra loro.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali convergenti a 1, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   B) l'insieme delle matrici reali 7×9 con l'elemento di posto $(2, 3)$ nullo è un sottospazio vettoriale di $M_{7\times 9}(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle funzioni reali che non si annullano in nessun punto è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme $\{(0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.

4) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 2. Allora
   A) A, B e C hanno la stessa traccia.
   B) la matrice $A +{}^tA$ è simmetrica.
   C) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ può non essere una matrice regolare.
   D) A^{100} ha determinante maggiore di 100.

5) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 4.
   B) se le colonne di A sono tutte uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   C) se **S** è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   D) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto allora $m < n$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se una matrice reale 7×7 ha traccia non nulla allora ha anche determinante non nullo.
   B) la funzione $F : M_2(I\!R) \to M_2(I\!R)$ definita da $F(A) = A + 2 \cdot I$ è una trasformazione lineare ($I =$ matrice identica 2×2).
   C) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 2 e lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 2×2 non sono fra loro isomorfi.
   D) se $A, B \in M_n(I\!R)$ allora $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
   B) se U è un sottospazio vettoriale di V, U e il complemento ortogonale di U hanno in comune soltanto il vettore nullo.
   C) se $u, v, w \in V$ e $\langle u - w, v - w \rangle = 0$ allora $u = v = w$.
   D) se v è il vettore nullo di V risulta $\langle v, v \rangle = 0$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(3, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 3)$ è 9.
   B) nel piano euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni cartesiane $x+2y = 0$ e $2x+y = 0$ è di $\frac{\pi}{6}$ radianti.
   C) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 4, 0)$ rispetto al punto $(4, 0, 1)$ è il punto $(0, 1, 4)$.
   D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4, 2)$ e il punto di coordinate $(1, -2)$ è 5.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y = 0$ e $z - 3 = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y = 0$ e $z - 3 = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 4, 0)$ rispetto al punto $(4, 0, 1)$ è il punto $(0, 1, 4)$.
   B) nel piano euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni cartesiane $x+2y = 0$ e $2x+y = 0$ è di $\frac{\pi}{6}$ radianti.
   C) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4, 2)$ e il punto di coordinate $(1, -2)$ è 5.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(3, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 3)$ è 9.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 7×9 con l'elemento di posto $(2, 3)$ nullo è un sottospazio vettoriale di $M_{7\times 9}(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle successioni reali convergenti a 1, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
   C) l'insieme $\{(0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme delle funzioni reali che non si annullano in nessun punto è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) T può avere n autovalori distinti.
   B) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n se e solo se T è diagonalizzabile.
   C) se T è diagonalizzabile allora anche $-T$ è diagonalizzabile.
   D) se A non è una matrice reale simmetrica allora T non è diagonalizzabile.

5) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v, w \in V$ e $\langle u - w, v - w \rangle = 0$ allora $u = v = w$.
   B) se U è un sottospazio vettoriale di V, U e il complemento ortogonale di U hanno in comune soltanto il vettore nullo.
   C) se v è il vettore nullo di V risulta $\langle v, v \rangle = 0$.
   D) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
   B) l'insieme dei numeri reali negativi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 2. Allora
   A) la matrice $A + {}^tA$ è simmetrica.
   B) A, B e C hanno la stessa traccia.
   C) A^{100} ha determinante maggiore di 100.
   D) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ può non essere una matrice regolare.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y, z) = xy - yz$ è una trasformazione lineare.
   B) $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\rho(A) = 0$.
   C) il nucleo della trasformazione lineare da $M_5(\mathbb{R})$ ad $\mathbb{R}$ che manda ogni matrice reale 5×5 nella somma di tutti i suoi elementi ha dimensione 24.
   D) se A è una matrice reale $n \times n$ invertibile allora ha determinante diverso da 0.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di n equazioni in n incognite (n intero positivo). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.
   B) il rango di C può essere strettamente superiore al rango di A.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = n$.
   D) se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 2 e lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 2×2 non sono fra loro isomorfi.
   B) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.
   C) se una matrice reale 7×7 ha traccia non nulla allora ha anche determinante non nullo.
   D) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A + 2 \cdot I$ è una trasformazione lineare ($I =$ matrice identica 2×2).

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) tutti i gruppi commutativi hanno un numero infinito di elementi.
   B) l'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) se $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ è un campo allora $(\mathbf{K}, +)$ è un gruppo commutativo.

3) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) tutti gli autovettori di T sono anche autovettori di T^5.
   B) A e B possono avere tracce diverse fra loro.
   C) A e B sono matrici simili.
   D) se T non è iniettivo allora T ha almeno un autovettore non nullo.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = 0$ e $x = 0, y = t, z = t$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.
   B) se u, v sono vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $(u + v) \wedge (u + v)$ è il vettore nullo.
   C) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4, 2)$ e la retta di equazione $x + y + 1 = 0$ è 5.
   D) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(0, 1, 2)$, $(2, 1, 0)$ è il punto $(1, 1, 1)$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ derivabili almeno due volte è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

B) ogni insieme di 4 distinte quaterne ordinate di numeri reali è necessariamente una base di $I\!R^4$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale).

C) l'insieme delle matrici reali 3×3 che hanno esattamente un elemento diverso da zero è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.

D) l'insieme $\{(x, y) \in I\!R^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^2$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che

A) se $A + B + C$ è una matrice non regolare allora anche A, B e C sono matrici non regolari.

B) $Tr(A - 2 \cdot B) = Tr(A) - 2 \cdot Tr(B)$.

C) se $B = 2 \cdot A$ allora $\det B = 2 \det A$.

D) se A non ha colonne nulle allora A è regolare.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora

A) se $v_1, \dots , v_n$ sono vettori di V linearmente indipendenti allora $\{v_1, \dots , v_n\}$ è una base ortonormale di V.

B) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u\rangle \geq 0$.

C) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v\rangle = -\langle v, u\rangle$.

D) se $u, w \in V$ e $\langle u, w\rangle = 0$ allora almeno uno dei due vettori u, w è nullo.

8) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.

A) se **S** è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.

B) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto allora $m < n$.

C) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 4.

D) se le colonne di A sono tutte uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 1, z = 2$ e $x = 1, y = t, z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora

A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasformazione lineare da $M_5(\mathbb{R})$ ad $\mathbb{R}$ che manda ogni matrice reale 5×5 nella somma di tutti i suoi elementi ha dimensione 24.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y, z) = xy - yz$ è una trasformazione lineare.
   C) $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\rho(A) = 0$.
   D) se A è una matrice reale $n \times n$ invertibile allora ha determinante diverso da 0.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di n equazioni in n incognite (n intero positivo). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = n$.
   B) l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.
   C) il rango di C può essere strettamente superiore al rango di A.
   D) se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 1, z = 2$ e $x = 1, y = t, z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u, v sono vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $(u + v) \wedge (u + v)$ è il vettore nullo.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4, 2)$ e la retta di equazione $x + y + 1 = 0$ è 5.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(0, 1, 2)$, $(2, 1, 0)$ è il punto $(1, 1, 1)$.
   D) nello spazio euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = 0$ e $x = 0, y = t, z = t$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.

5) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
  A) se T è diagonalizzabile allora anche $-T$ è diagonalizzabile.
  B) T può avere n autovalori distinti.
  C) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n se e solo se T è diagonalizzabile.
  D) se A non è una matrice reale simmetrica allora T non è diagonalizzabile.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
  A) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle \geq 0$.
  B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = -\langle v, u \rangle$.
  C) se $u, w \in V$ e $\langle u, w \rangle = 0$ allora almeno uno dei due vettori u, w è nullo.
  D) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori di V linearmente indipendenti allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
  A) l'insieme dei numeri reali negativi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
  B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
  C) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
  D) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 2. Allora
  A) A, B e C hanno la stessa traccia.
  B) A^{100} ha determinante maggiore di 100.
  C) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ può non essere una matrice regolare.
  D) la matrice $A + {}^tA$ è simmetrica.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
  A) l'insieme delle successioni reali convergenti a 1, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.
  B) l'insieme $\{(0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
  C) l'insieme delle funzioni reali che non si annullano in nessun punto è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
  D) l'insieme delle matrici reali 7×9 con l'elemento di posto $(2, 3)$ nullo è un sottospazio vettoriale di $M_{7 \times 9}(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $B = 2 \cdot A$ allora $\det B = 2 \det A$.
   B) $Tr(A - 2 \cdot B) = Tr(A) - 2 \cdot Tr(B)$.
   C) se A non ha colonne nulle allora A è regolare.
   D) se $A + B + C$ è una matrice non regolare allora anche A, B e C sono matrici non regolari.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) se $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ è un campo allora $(\mathbf{K}, +)$ è un gruppo commutativo.
   D) tutti i gruppi commutativi hanno un numero infinito di elementi.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 3×3 che hanno esattamente un elemento diverso da zero è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   B) ogni insieme di 4 distinte quaterne ordinate di numeri reali è necessariamente una base di $\mathbb{R}^4$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale).
   C) l'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^2$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ derivabili almeno due volte è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v, w \in V$ e $\langle u - w, v - w \rangle = 0$ allora $u = v = w$.
   B) se v è il vettore nullo di V risulta $\langle v, v \rangle = 0$.
   C) se U è un sottospazio vettoriale di V, U e il complemento ortogonale di U hanno in comune soltanto il vettore nullo.
   D) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 4.
   B) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   C) se le colonne di A sono tutte uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   D) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto allora $m < n$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se una matrice reale 7×7 ha traccia non nulla allora ha anche determinante non nullo.
   B) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 2 e lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 2×2 non sono fra loro isomorfi.
   C) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A + 2 \cdot I$ è una trasformazione lineare ($I =$ matrice identica 2×2).
   D) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.

7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y = 0$ e $z - 3 = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 4, 0)$ rispetto al punto $(4, 0, 1)$ è il punto $(0, 1, 4)$.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4, 2)$ e il punto di coordinate $(1, -2)$ è 5.
   C) nel piano euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni cartesiane $x+2y = 0$ e $2x+y = 0$ è di $\frac{\pi}{6}$ radianti.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(3, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 3)$ è 9.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B sono matrici simili.
   B) tutti gli autovettori di T sono anche autovettori di T^5.
   C) se T non è iniettivo allora T ha almeno un autovettore non nullo.
   D) A e B possono avere tracce diverse fra loro.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di n equazioni in n incognite (n intero positivo). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = n$.
   B) l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.
   C) il rango di C può essere strettamente superiore al rango di A.
   D) se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora anche $-T$ è diagonalizzabile.
   B) T può avere n autovalori distinti.
   C) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n se e solo se T è diagonalizzabile.
   D) se A non è una matrice reale simmetrica allora T non è diagonalizzabile.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v, w \in V$ e $\langle u - w, v - w \rangle = 0$ allora $u = v = w$.
   B) se U è un sottospazio vettoriale di V, U e il complemento ortogonale di U hanno in comune soltanto il vettore nullo.
   C) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
   D) se v è il vettore nullo di V risulta $\langle v, v \rangle = 0$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ è un campo allora $(\mathbf{K}, +)$ è un gruppo commutativo.
   B) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) tutti i gruppi commutativi hanno un numero infinito di elementi.
   D) l'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y = 0$ e $z - 3 = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1,4,0)$ rispetto al punto $(4,0,1)$ è il punto $(0,1,4)$.
   B) nel piano euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni cartesiane $x+2y=0$ e $2x+y=0$ è di $\frac{\pi}{6}$ radianti.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(3,0,0)$, $(0,3,0)$, $(0,0,3)$ è 9.
   D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4,2)$ e il punto di coordinate $(1,-2)$ è 5.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se A non ha colonne nulle allora A è regolare.
   B) se $B = 2 \cdot A$ allora $\det B = 2 \det A$.
   C) se $A+B+C$ è una matrice non regolare allora anche A, B e C sono matrici non regolari.
   D) $Tr(A - 2 \cdot B) = Tr(A) - 2 \cdot Tr(B)$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x,y) \in I\!R^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^2$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle matrici reali 3×3 che hanno esattamente un elemento diverso da zero è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ derivabili almeno due volte è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) ogni insieme di 4 distinte quaterne ordinate di numeri reali è necessariamente una base di $I\!R^4$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale).

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) il nucleo della trasformazione lineare da $M_5(I\!R)$ ad $I\!R$ che manda ogni matrice reale 5×5 nella somma di tutti i suoi elementi ha dimensione 24.
   B) la funzione $F : I\!R^3 \to I\!R$ definita come $F(x,y,z) = xy - yz$ è una trasformazione lineare.
   C) $A \in M_n(I\!R)$ è invertibile se e solo se $\rho(A) = 0$.
   D) se A è una matrice reale $n \times n$ invertibile allora ha determinante diverso da 0.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 2. Allora
   A) la matrice $A +{}^tA$ è simmetrica.
   B) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ può non essere una matrice regolare.
   C) A^{100} ha determinante maggiore di 100.
   D) A, B e C hanno la stessa traccia.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
   B) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   C) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme dei numeri reali negativi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 2 e lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 2×2 non sono fra loro isomorfi.
   B) se una matrice reale 7×7 ha traccia non nulla allora ha anche determinante non nullo.
   C) se $A, B \in M_n(I\!R)$ allora $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.
   D) la funzione $F : M_2(I\!R) \to M_2(I\!R)$ definita da $F(A) = A + 2 \cdot I$ è una trasformazione lineare (I = matrice identica 2×2).

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 7×9 con l'elemento di posto $(2, 3)$ nullo è un sottospazio vettoriale di $M_{7\times 9}(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle funzioni reali che non si annullano in nessun punto è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(0, 1, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $I\!R$.
   D) l'insieme delle successioni reali convergenti a 1, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 1, z = 2$ e $x = 1, y = t, z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = -\langle v, u \rangle$.
   B) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori di V linearmente indipendenti allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   C) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle \geq 0$.
   D) se $u, w \in V$ e $\langle u, w \rangle = 0$ allora almeno uno dei due vettori u, w è nullo.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) tutti gli autovettori di T sono anche autovettori di T^5.
   B) A e B sono matrici simili.
   C) A e B possono avere tracce diverse fra loro.
   D) se T non è iniettivo allora T ha almeno un autovettore non nullo.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4, 2)$ e la retta di equazione $x + y + 1 = 0$ è 5.
   B) nello spazio euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = 0$ e $x = 0, y = t, z = t$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.
   C) se u, v sono vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $(u + v) \wedge (u + v)$ è il vettore nullo.
   D) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(0, 1, 2)$, $(2, 1, 0)$ è il punto $(1, 1, 1)$.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   B) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 4.
   C) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto allora $m < n$.
   D) se le colonne di A sono tutte uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori di V linearmente indipendenti allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   B) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle \geq 0$.
   C) se $u, w \in V$ e $\langle u, w \rangle = 0$ allora almeno uno dei due vettori u, w è nullo.
   D) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u, v \rangle = -\langle v, u \rangle$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) $A \in M_n(\mathbb{R})$ è invertibile se e solo se $\rho(A) = 0$.
   B) il nucleo della trasformazione lineare da $M_5(\mathbb{R})$ ad $\mathbb{R}$ che manda ogni matrice reale 5×5 nella somma di tutti i suoi elementi ha dimensione 24.
   C) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y, z) = xy - yz$ è una trasformazione lineare.
   D) se A è una matrice reale $n \times n$ invertibile allora ha determinante diverso da 0.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di n equazioni in n incognite (n intero positivo). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) il rango di C può essere strettamente superiore al rango di A.
   B) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = n$.
   C) l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto.
   D) se $\mathbf{S}$ è omogeneo allora il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = t, y = t, z = 0$ e $x = 0, y = t, z = t$ è di $\frac{\pi}{3}$ radianti.
   B) se u, v sono vettori dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $(u + v) \wedge (u + v)$ è il vettore nullo.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di vertici $(0, 1, 2)$, $(2, 1, 0)$ è il punto $(1, 1, 1)$.
   D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4, 2)$ e la retta di equazione $x + y + 1 = 0$ è 5.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) tutti i gruppi commutativi hanno un numero infinito di elementi.
   B) se $(\mathbf{K}, +, \cdot)$ è un campo allora $(\mathbf{K}, +)$ è un gruppo commutativo.
   C) l'insieme delle matrici reali 2×2 a traccia nulla è un gruppo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A + B + C$ è una matrice non regolare allora anche A, B e C sono matrici non regolari.
   B) se A non ha colonne nulle allora A è regolare.
   C) $Tr(A - 2 \cdot B) = Tr(A) - 2 \cdot Tr(B)$.
   D) se $B = 2 \cdot A$ allora $\det B = 2 \det A$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ derivabili almeno due volte è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(x, y) \in I\!R^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^2$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) ogni insieme di 4 distinte quaterne ordinate di numeri reali è necessariamente una base di $I\!R^4$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale).
   D) l'insieme delle matrici reali 3×3 che hanno esattamente un elemento diverso da zero è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.

8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = 1, z = 2$ e $x = 1, y = t, z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n se e solo se T è diagonalizzabile.
   B) se T è diagonalizzabile allora anche $-T$ è diagonalizzabile.
   C) T può avere n autovalori distinti.
   D) se A non è una matrice reale simmetrica allora T non è diagonalizzabile.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) se v è il vettore nullo di V risulta $\langle v, v\rangle = 0$.
   B) se $u, v \in V$ allora $\|u - v\| \leq \|u\| + \|v\|$.
   C) se U è un sottospazio vettoriale di V, U e il complemento ortogonale di U hanno in comune soltanto il vettore nullo.
   D) se $u, v, w \in V$ e $\langle u - w, v - w\rangle = 0$ allora $u = v = w$.

2) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante uguale a 2. Allora
   A) A^{100} ha determinante maggiore di 100.
   B) la matrice $A +{}^tA$ è simmetrica.
   C) ${}^t(A \cdot B \cdot C)$ può non essere una matrice regolare.
   D) A, B e C hanno la stessa traccia.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(0, 1, 1, 1),(1, 0, 1, 1),(1, 1, 0, 1),(1, 1, 1, 0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   B) l'insieme delle matrici reali 7×9 con l'elemento di posto $(2, 3)$ nullo è un sottospazio vettoriale di $M_{7\times 9}(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle funzioni reali che non si annullano in nessun punto è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle successioni reali convergenti a 1, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale.

4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y = 0$ e $z - 3 = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   B) se le colonne di A sono tutte uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ è necessariamente non vuoto.
   C) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non è vuoto allora $m < n$.
   D) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 4.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non superiore a 2 e lo spazio vettoriale reale delle matrici reali 2×2 non sono fra loro isomorfi.
   B) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A + 2 \cdot I$ è una trasformazione lineare ($I =$ matrice identica 2×2).
   C) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.
   D) se una matrice reale 7×7 ha traccia non nulla allora ha anche determinante non nullo.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) tutti gli autovettori di T sono anche autovettori di T^5.
   B) se T non è iniettivo allora T ha almeno un autovettore non nullo.
   C) A e B possono avere tracce diverse fra loro.
   D) A e B sono matrici simili.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(4, 2)$ e il punto di coordinate $(1, -2)$ è 5.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(3, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 3)$ è 9.
   C) nel piano euclideo standard l'angolo fra le rette di equazioni cartesiane $x+2y = 0$ e $2x+y = 0$ è di $\frac{\pi}{6}$ radianti.
   D) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 4, 0)$ rispetto al punto $(4, 0, 1)$ è il punto $(0, 1, 4)$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ costanti è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante uguale a 1 è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) l'insieme dei numeri reali negativi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.