Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si consideri l'insieme $\mathbf{R}^2[t]$ dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti reali di grado non superiore a 2. Siano $+$ e $\cdot$ le usuali operazioni di somma e di prodotto tra polinomi. Allora
   A) $(\mathbf{R}^2[t], \cdot)$ è un gruppo.
   B) $(\mathbf{R}^2[t], \cdot)$ è un anello.
   C) $(\mathbf{R}^2[t], +, \cdot)$ è un campo.
   D) $(\mathbf{R}^2[t], +)$ è un gruppo.

2) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

   A) $A \cdot B = B \cdot A$.
   B) $\det(A \cdot B \cdot C) = \det(C \cdot B \cdot A)$.
   C) la matrice $A + B + C$ è simmetrica.
   D) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora la matrice $A \cdot B$ è simmetrica.

3) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado pari.
   B) insieme delle terne di numeri reali (x_1, x_2, x_3) tali che $x_1 + x_2 + x_3$ sia un numero intero.
   C) insieme delle matrici reali 4×2 a coefficienti reali.
   D) insieme delle successioni reali che hanno infiniti termini uguali a 0.

4) Siano $S : V \to W$ e $T : V \to W$ due omomorfismi fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim \ker(T - S) = 0$.
   B) $\dim \mathrm{Im}\ S = \dim V - \dim \ker S$.
   C) $T + 2S$ è una trasformazione lineare.
   D) $\dim \mathrm{Im}\ T = \dim W$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora anche $2y$ è soluzione di $\mathbf{S}$.
   B) $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni se e solo se A e C hanno rango diverso.
   C) $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) < \rho(C)$.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.

6) Sia T un endomorfismo dello spazio vettoriale reale V di dimensione finita n. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) T ammette almeno un autovettore.
   B) T ammette esattamente n autovalori reali (contati con la loro molteplicità algebrica).
   C) se T ammette l'autovalore nullo allora T è l'omomorfismo nullo.
   D) ogni autovalore di T^2 è radice del polinomio caratteristico di T^2.

7) Dire quali delle seguenti funzioni $f_i : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ sono prodotti scalari sullo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbf{R}^3$.
   A) $f_1\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.
   B) $f_2\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + z_1^2z_2^2$.
   C) $f_3\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = 0$.
   D) $f_4\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1x_2$.

8) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y - z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle x.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle y.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) le rette di equazioni cartesiane $x - 2y = 0$ e $x - 4y = 0$ sono fra loro parallele.
   B) la distanza fra il punto di coordinate $(5, 5)$ e la retta di equazione $3x - 4y = 0$ è 1.
   C) la conica di equazione $y = -x^2$ è una parabola.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(1, -1)$ e il punto di coordinate $(-1, 1)$ è $2\sqrt{2}$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se λ è un autovalore di T allora è anche un autovalore di $-T^2 + 4T^5$.
   B) un numero reale λ è autovalore di T se e solo se è radice del suo polinomio caratteristico.
   C) se T ammette n autovalori reali distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.
   D) se A è diagonalizzabile per similitudine allora è anche simmetrica.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 0)$ e il punto di coordinate $(20, 0)$ è 30.
   B) le rette di equazioni $x - y = 0$ e $x + y = 1$ sono ortogonali.
   C) la conica di equazione $3x^2 + 8y^2 = 1$ è una ellisse.
   D) se il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(-2, 1)$ e il punto P ha coordinate $(1, 0)$, allora il punto Q ha coordinate $(-5, 2)$.

3) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -s \\ y = s \\ z = 4t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta non parallela all'asse delle x.

4) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim \ker T = \dim \operatorname{Im} T$.
   B) se $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V allora anche $(T(v_1), \dots, T(v_n))$ è una base di V.
   C) T^3 è iniettivo se e solo se è suriettivo.
   D) se $(T(v_1), \dots, T(v_n))$ è una base di V allora anche $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ a determinante non nullo. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det({}^tA \cdot C^2 \cdot {}^tB \cdot A \cdot B) > 0$.
   B) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 + BA - AB$.
   C) $A + B + C$ ha determinante non nullo.
   D) $Tr(A + B + C) \neq 0$.

6) Si considerino sull'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi l'usuale somma $+$ e l'usuale prodotto $\cdot$. Allora
   A) $(\mathbf{C}, +)$ è un gruppo commutativo.
   B) $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ è un anello.
   C) $(\mathbf{C}, \cdot)$ è un gruppo.
   D) $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ è un campo.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni allora $m > n$.
   B) $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) \neq 0$.
   C) $\rho(C) \geq \rho(A)$.
   D) il sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$ associato a $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(C) = \rho(A)$.

8) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ derivabili.
   B) insieme dei numeri reali.
   C) insieme delle terne di numeri reali (y_1, y_2, y_3) con $y_1 + y_2 - y_3 \neq 0$.
   D) insieme dei numeri interi.

9) Dire quali delle seguenti funzioni $f_i : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sono prodotti scalari sullo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbf{R}^2$.
   A) $f_4\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = -1$.
   B) $f_2\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = x_1 + x_2 + y_1 + y_2$.
   C) $f_3\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = x_1 x_2 y_1 y_2$.
   D) $f_1\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = 3x_1 x_2 + 3y_1 y_2$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora la matrice $A \cdot B$ è simmetrica.
B) $A \cdot B = B \cdot A$.
C) $\det(A \cdot B \cdot C) = \det(C \cdot B \cdot A)$.
D) la matrice $A + B + C$ è simmetrica.

2) Sia **S** un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.
B) **S** non ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) < \rho(C)$.
C) **S** ammette infinite soluzioni se e solo se A e C hanno rango diverso.
D) se y è soluzione di **S** allora anche $2y$ è soluzione di **S**.

3) Sia T un endomorfismo dello spazio vettoriale reale V di dimensione finita n. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) ogni autovalore di T^2 è radice del polinomio caratteristico di T^2.
B) se T ammette l'autovalore nullo allora T è l'omomorfismo nullo.
C) T ammette esattamente n autovalori reali (contati con la loro molteplicità algebrica).
D) T ammette almeno un autovettore.

4) Dire quali delle seguenti funzioni $f_i : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sono prodotti scalari sullo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbf{R}^2$.
A) $f_1\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = 3x_1x_2 + 3y_1y_2$.
B) $f_3\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = x_1x_2y_1y_2$.
C) $f_4\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = -1$.
D) $f_2\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = x_1 + x_2 + y_1 + y_2$.

5) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
A) insieme delle successioni reali che hanno infiniti termini uguali a 0.
B) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado pari.
C) insieme delle terne di numeri reali (x_1, x_2, x_3) tali che $x_1 + x_2 + x_3$ sia un numero intero.
D) insieme delle matrici reali 4×2 a coefficienti reali.

6) Siano $S : V \to W$ e $T : V \to W$ due omomorfismi fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\dim \operatorname{Im} T = \dim W$.

B) $T + 2S$ è una trasformazione lineare.

C) $\dim \operatorname{Im} S = \dim V - \dim \ker S$.

D) $\dim \ker(T - S) = 0$.

7) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -s \\ y = s \\ z = 4t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\mathcal{A}$ è una retta non parallela all'asse delle x.

B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle z.

C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

D) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?

A) se il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(-2, 1)$ e il punto P ha coordinate $(1, 0)$, allora il punto Q ha coordinate $(-5, 2)$.

B) la conica di equazione $3x^2 + 8y^2 = 1$ è una ellisse.

C) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 0)$ e il punto di coordinate $(20, 0)$ è 30.

D) le rette di equazioni $x - y = 0$ e $x + y = 1$ sono ortogonali.

9) Si consideri l'insieme $\mathbf{R}^2[t]$ dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti reali di grado non superiore a 2. Siano $+$ e $\cdot$ le usuali operazioni di somma e di prodotto tra polinomi. Allora

A) $(\mathbf{R}^2[t], +)$ è un gruppo.

B) $(\mathbf{R}^2[t], \cdot)$ è un gruppo.

C) $(\mathbf{R}^2[t], \cdot)$ è un anello.

D) $(\mathbf{R}^2[t], +, \cdot)$ è un campo.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(5, 5)$ e la retta di equazione $3x - 4y = 0$ è 1.
   B) la conica di equazione $y = -x^2$ è una parabola.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(1, -1)$ e il punto di coordinate $(-1, 1)$ è $2\sqrt{2}$.
   D) le rette di equazioni cartesiane $x - 2y = 0$ e $x - 4y = 0$ sono fra loro parallele.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) il sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$ associato a $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(C) = \rho(A)$.
   B) $\rho(C) \geq \rho(A)$.
   C) $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) \neq 0$.
   D) se $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni allora $m > n$.

3) Si considerino sull'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi l'usuale somma $+$ e l'usuale prodotto $\cdot$. Allora
   A) $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ è un campo.
   B) $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ è un anello.
   C) $(\mathbf{C}, +)$ è un gruppo commutativo.
   D) $(\mathbf{C}, \cdot)$ è un gruppo.

4) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se A è diagonalizzabile per similitudine allora è anche simmetrica.
   B) se T ammette n autovalori reali distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.
   C) un numero reale λ è autovalore di T se e solo se è radice del suo polinomio caratteristico.
   D) se λ è un autovalore di T allora è anche un autovalore di $-T^2 + 4T^5$.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y - z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle x.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle y.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.

6) Dire quali delle seguenti funzioni $f_i : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ sono prodotti scalari sullo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbf{R}^3$.
   A) $f_2\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + z_1^2 z_2^2$.
   B) $f_3\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = 0$.
   C) $f_4\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1 x_2$.
   D) $f_1\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

7) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme dei numeri interi.
   B) insieme dei numeri reali.
   C) insieme delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ derivabili.
   D) insieme delle terne di numeri reali (y_1, y_2, y_3) con $y_1 + y_2 - y_3 \neq 0$.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ a determinante non nullo. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $Tr(A + B + C) \neq 0$.
   B) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 + BA - AB$.
   C) $\det({}^tA \cdot C^2 \cdot {}^tB \cdot A \cdot B) > 0$.
   D) $A + B + C$ ha determinante non nullo.

9) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $(T(v_1), \dots, T(v_n))$ è una base di V allora anche $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V.
   B) T^3 è iniettivo se e solo se è suriettivo.
   C) se $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V allora anche $(T(v_1), \dots, T(v_n))$ è una base di V.
   D) $\dim \ker T = \dim \operatorname{Im} T$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ a determinante non nullo. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $Tr(A+B+C) \neq 0$.
   B) $\det({}^tA \cdot C^2 \cdot {}^tB \cdot A \cdot B) > 0$.
   C) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 + BA - AB$.
   D) $A+B+C$ ha determinante non nullo.

2) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme dei numeri interi.
   B) insieme delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ derivabili.
   C) insieme dei numeri reali.
   D) insieme delle terne di numeri reali (y_1, y_2, y_3) con $y_1 + y_2 - y_3 \neq 0$.

3) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y - z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle x.

4) Siano $S : V \to W$ e $T : V \to W$ due omomorfismi fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim \operatorname{Im} S = \dim V - \dim \ker S$.
   B) $\dim \ker(T - S) = 0$.
   C) $\dim \operatorname{Im} T = \dim W$.
   D) $T + 2S$ è una trasformazione lineare.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni se e solo se A e C hanno rango diverso.
   B) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora anche $2y$ è soluzione di $\mathbf{S}$.
   C) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.
   D) $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) < \rho(C)$.

6) Sia T un endomorfismo dello spazio vettoriale reale V di dimensione finita n. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) T ammette esattamente n autovalori reali (contati con la loro molteplicità algebrica).
   B) T ammette almeno un autovettore.
   C) ogni autovalore di T^2 è radice del polinomio caratteristico di T^2.
   D) se T ammette l'autovalore nullo allora T è l'omomorfismo nullo.

7) Dire quali delle seguenti funzioni $f_i : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ sono prodotti scalari sullo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbf{R}^3$.
   A) $f_2\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + z_1^2 z_2^2$.
   B) $f_4\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1 x_2$.
   C) $f_1\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.
   D) $f_3\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = 0$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(5, 5)$ e la retta di equazione $3x - 4y = 0$ è 1.
   B) la distanza fra il punto di coordinate $(1, -1)$ e il punto di coordinate $(-1, 1)$ è $2\sqrt{2}$.
   C) le rette di equazioni cartesiane $x - 2y = 0$ e $x - 4y = 0$ sono fra loro parallele.
   D) la conica di equazione $y = -x^2$ è una parabola.

9) Si considerino sull'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi l'usuale somma $+$ e l'usuale prodotto $\cdot$. Allora
   A) $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ è un campo.
   B) $(\mathbf{C}, +)$ è un gruppo commutativo.
   C) $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ è un anello.
   D) $(\mathbf{C}, \cdot)$ è un gruppo.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Dire quali delle seguenti funzioni $f_i : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sono prodotti scalari sullo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbf{R}^2$.
   A) $f_3\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = x_1 x_2 y_1 y_2$.
   B) $f_1\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = 3x_1 x_2 + 3y_1 y_2$.
   C) $f_2\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = x_1 + x_2 + y_1 + y_2$.
   D) $f_4\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = -1$.

2) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) un numero reale λ è autovalore di T se e solo se è radice del suo polinomio caratteristico.
   B) se λ è un autovalore di T allora è anche un autovalore di $-T^2 + 4T^5$.
   C) se T ammette n autovalori reali distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.
   D) se A è diagonalizzabile per similitudine allora è anche simmetrica.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

   A) $\det(A \cdot B \cdot C) = \det(C \cdot B \cdot A)$.
   B) la matrice $A + B + C$ è simmetrica.
   C) $A \cdot B = B \cdot A$.
   D) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora la matrice $A \cdot B$ è simmetrica.

4) Si consideri l'insieme $\mathbf{R}^2[t]$ dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti reali di grado non superiore a 2. Siano $+$ e $\cdot$ le usuali operazioni di somma e di prodotto tra polinomi. Allora
   A) $(\mathbf{R}^2[t], \cdot)$ è un anello.
   B) $(\mathbf{R}^2[t], +, \cdot)$ è un campo.
   C) $(\mathbf{R}^2[t], \cdot)$ è un gruppo.
   D) $(\mathbf{R}^2[t], +)$ è un gruppo.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -s \\ y = s \\ z = 4t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle z.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta non parallela all'asse delle x.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) la conica di equazione $3x^2 + 8y^2 = 1$ è una ellisse.
   B) se il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(-2, 1)$ e il punto P ha coordinate $(1, 0)$, allora il punto Q ha coordinate $(-5, 2)$.
   C) le rette di equazioni $x - y = 0$ e $x + y = 1$ sono ortogonali.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 0)$ e il punto di coordinate $(20, 0)$ è 30.

7) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V allora anche $(T(v_1), \dots, T(v_n))$ è una base di V.
   B) $\dim \ker T = \dim \operatorname{Im} T$.
   C) T^3 è iniettivo se e solo se è suriettivo.
   D) se $(T(v_1), \dots, T(v_n))$ è una base di V allora anche $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V.

8) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme delle terne di numeri reali (x_1, x_2, x_3) tali che $x_1 + x_2 + x_3$ sia un numero intero.
   B) insieme delle matrici reali 4×2 a coefficienti reali.
   C) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado pari.
   D) insieme delle successioni reali che hanno infiniti termini uguali a 0.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) \neq 0$.
   B) se $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni allora $m > n$.
   C) $\rho(C) \geq \rho(A)$.
   D) il sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$ associato a $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(C) = \rho(A)$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ a determinante non nullo. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 + BA - AB$.
   B) $A+B+C$ ha determinante non nullo.
   C) $Tr(A+B+C) \neq 0$.
   D) $\det({}^tA \cdot C^2 \cdot {}^tB \cdot A \cdot B) > 0$.

2) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme dei numeri reali.
   B) insieme delle terne di numeri reali (y_1, y_2, y_3) con $y_1 + y_2 - y_3 \neq 0$.
   C) insieme dei numeri interi.
   D) insieme delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ derivabili.

3) Siano $S : V \to W$ e $T : V \to W$ due omomorfismi fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim \mathrm{Im}\, S = \dim V - \dim \ker S$.
   B) $T + 2S$ è una trasformazione lineare.
   C) $\dim \ker(T - S) = 0$.
   D) $\dim \mathrm{Im}\, T = \dim W$.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni se e solo se A e C hanno rango diverso.
   B) $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) < \rho(C)$.
   C) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora anche $2y$ è soluzione di $\mathbf{S}$.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) se il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(-2, 1)$ e il punto P ha coordinate $(1, 0)$, allora il punto Q ha coordinate $(-5, 2)$.
   B) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 0)$ e il punto di coordinate $(20, 0)$ è 30.
   C) le rette di equazioni $x - y = 0$ e $x + y = 1$ sono ortogonali.
   D) la conica di equazione $3x^2 + 8y^2 = 1$ è una ellisse.

6) Si considerino sull'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi l'usuale somma $+$ e l'usuale prodotto $\cdot$. Allora

A) $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ è un anello.
B) $(\mathbf{C}, \cdot)$ è un gruppo.
C) $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ è un campo.
D) $(\mathbf{C}, +)$ è un gruppo commutativo.

7) Sia T un endomorfismo dello spazio vettoriale reale V di dimensione finita n. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) T ammette esattamente n autovalori reali (contati con la loro molteplicità algebrica).
B) se T ammette l'autovalore nullo allora T è l'omomorfismo nullo.
C) T ammette almeno un autovettore.
D) ogni autovalore di T^2 è radice del polinomio caratteristico di T^2.

8) Dire quali delle seguenti funzioni $f_i : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sono prodotti scalari sullo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbf{R}^2$.

A) $f_1\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = 3x_1x_2 + 3y_1y_2$.
B) $f_4\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = -1$.
C) $f_2\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = x_1 + x_2 + y_1 + y_2$.
D) $f_3\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = x_1x_2y_1y_2$.

9) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -s \\ y = s \\ z = 4t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\mathcal{A}$ è una retta non parallela all'asse delle x.
B) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
C) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.
D) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle z.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni allora $m > n$.
   B) $\rho(C) \geq \rho(A)$.
   C) il sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$ associato a $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(C) = \rho(A)$.
   D) $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) \neq 0$.

2) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y - z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle x.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle y.

3) Si consideri l'insieme $\mathbf{R}^2[t]$ dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti reali di grado non superiore a 2. Siano $+$ e $\cdot$ le usuali operazioni di somma e di prodotto tra polinomi. Allora
   A) $(\mathbf{R}^2[t], \cdot)$ è un gruppo.
   B) $(\mathbf{R}^2[t], \cdot)$ è un anello.
   C) $(\mathbf{R}^2[t], +)$ è un gruppo.
   D) $(\mathbf{R}^2[t], +, \cdot)$ è un campo.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la conica di equazione $y = -x^2$ è una parabola.
   B) la distanza fra il punto di coordinate $(5, 5)$ e la retta di equazione $3x - 4y = 0$ è 1.
   C) le rette di equazioni cartesiane $x - 2y = 0$ e $x - 4y = 0$ sono fra loro parallele.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(1, -1)$ e il punto di coordinate $(-1, 1)$ è $2\sqrt{2}$.

5) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado pari.
   B) insieme delle terne di numeri reali (x_1, x_2, x_3) tali che $x_1 + x_2 + x_3$ sia un numero intero.
   C) insieme delle successioni reali che hanno infiniti termini uguali a 0.
   D) insieme delle matrici reali 4×2 a coefficienti reali.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $A \cdot B = B \cdot A$.
B) $\det(A \cdot B \cdot C) = \det(C \cdot B \cdot A)$.
C) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora la matrice $A \cdot B$ è simmetrica.
D) la matrice $A + B + C$ è simmetrica.

7) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) se λ è un autovalore di T allora è anche un autovalore di $-T^2 + 4T^5$.
B) se T ammette n autovalori reali distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.
C) se A è diagonalizzabile per similitudine allora è anche simmetrica.
D) un numero reale λ è autovalore di T se e solo se è radice del suo polinomio caratteristico.

8) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) $\dim \ker T = \dim \operatorname{Im} T$.
B) T^3 è iniettivo se e solo se è suriettivo.
C) se $(T(v_1), \ldots, T(v_n))$ è una base di V allora anche $(v_1, \ldots, v_n)$ è una base di V.
D) se $(v_1, \ldots, v_n)$ è una base di V allora anche $(T(v_1), \ldots, T(v_n))$ è una base di V.

9) Dire quali delle seguenti funzioni $f_i : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ sono prodotti scalari sullo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbf{R}^3$.
A) $f_3\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = 0$.
B) $f_2\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + z_1^2 z_2^2$.
C) $f_1\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.
D) $f_4\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1 x_2$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme delle terne di numeri reali (x_1, x_2, x_3) tali che $x_1 + x_2 + x_3$ sia un numero intero.
   B) insieme delle successioni reali che hanno infiniti termini uguali a 0.
   C) insieme delle matrici reali 4×2 a coefficienti reali.
   D) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado pari.

2) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y - z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle x.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle y.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(5, 5)$ e la retta di equazione $3x - 4y = 0$ è 1.
   B) le rette di equazioni cartesiane $x - 2y = 0$ e $x - 4y = 0$ sono fra loro parallele.
   C) la conica di equazione $y = -x^2$ è una parabola.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(1, -1)$ e il punto di coordinate $(-1, 1)$ è $2\sqrt{2}$.

4) Siano $S : V \to W$ e $T : V \to W$ due omomorfismi fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim \operatorname{Im} T = \dim W$.
   B) $T + 2S$ è una trasformazione lineare.
   C) $\dim \ker(T - S) = 0$.
   D) $\dim \operatorname{Im} S = \dim V - \dim \ker S$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.
   B) $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) < \rho(C)$.
   C) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora anche $2y$ è soluzione di $\mathbf{S}$.
   D) $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni se e solo se A e C hanno rango diverso.

6) Sia T un endomorfismo dello spazio vettoriale reale V di dimensione finita n. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) ogni autovalore di T^2 è radice del polinomio caratteristico di T^2.
   B) se T ammette l'autovalore nullo allora T è l'omomorfismo nullo.
   C) T ammette almeno un autovettore.
   D) T ammette esattamente n autovalori reali (contati con la loro molteplicità algebrica).

7) Dire quali delle seguenti funzioni $f_i : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ sono prodotti scalari sullo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbf{R}^3$.
   A) $f_2\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + z_1^2 z_2^2$.
   B) $f_1\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.
   C) $f_3\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = 0$.
   D) $f_4\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1 x_2$.

8) Si consideri l'insieme $\mathbf{R}^2[t]$ dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti reali di grado non superiore a 2. Siano $+$ e $\cdot$ le usuali operazioni di somma e di prodotto tra polinomi. Allora
   A) $(\mathbf{R}^2[t], \cdot)$ è un anello.
   B) $(\mathbf{R}^2[t], +)$ è un gruppo.
   C) $(\mathbf{R}^2[t], +, \cdot)$ è un campo.
   D) $(\mathbf{R}^2[t], \cdot)$ è un gruppo.

9) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

   A) $\det(A \cdot B \cdot C) = \det(C \cdot B \cdot A)$.
   B) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora la matrice $A \cdot B$ è simmetrica.
   C) la matrice $A + B + C$ è simmetrica.
   D) $A \cdot B = B \cdot A$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -s \\ y = s \\ z = 4t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle z.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta non parallela all'asse delle x.

2) Dire quali delle seguenti funzioni $f_i : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sono prodotti scalari sullo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbf{R}^2$.
   A) $f_3\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = x_1x_2y_1y_2$.
   B) $f_2\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = x_1 + x_2 + y_1 + y_2$.
   C) $f_4\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = -1$.
   D) $f_1\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = 3x_1x_2 + 3y_1y_2$.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ a determinante non nullo. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $A + B + C$ ha determinante non nullo.
   B) $\det({}^tA \cdot C^2 \cdot \ {}^tB \cdot A \cdot B) > 0$.
   C) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 + BA - AB$.
   D) $Tr(A + B + C) \neq 0$.

4) Si considerino sull'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi l'usuale somma $+$ e l'usuale prodotto $\cdot$. Allora
   A) $(\mathbf{C}, \cdot)$ è un gruppo.
   B) $(\mathbf{C}, +)$ è un gruppo commutativo.
   C) $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ è un anello.
   D) $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ è un campo.

5) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme delle terne di numeri reali (y_1, y_2, y_3) con $y_1 + y_2 - y_3 \neq 0$.
   B) insieme delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ derivabili.
   C) insieme dei numeri reali.
   D) insieme dei numeri interi.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) un numero reale λ è autovalore di T se e solo se è radice del suo polinomio caratteristico.
   B) se λ è un autovalore di T allora è anche un autovalore di $-T^2 + 4T^5$.
   C) se T ammette n autovalori reali distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.
   D) se A è diagonalizzabile per similitudine allora è anche simmetrica.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) \neq 0$.
   B) se $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni allora $m > n$.
   C) $\rho(C) \geq \rho(A)$.
   D) il sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$ associato a $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(C) = \rho(A)$.

8) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V allora anche $(T(v_1), \dots, T(v_n))$ è una base di V.
   B) $\dim \ker T = \dim \operatorname{Im} T$.
   C) T^3 è iniettivo se e solo se è suriettivo.
   D) se $(T(v_1), \dots, T(v_n))$ è una base di V allora anche $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) la conica di equazione $3x^2 + 8y^2 = 1$ è una ellisse.
   B) le rette di equazioni $x - y = 0$ e $x + y = 1$ sono ortogonali.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 0)$ e il punto di coordinate $(20, 0)$ è 30.
   D) se il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(-2, 1)$ e il punto P ha coordinate $(1, 0)$, allora il punto Q ha coordinate $(-5, 2)$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $S : V \to W$ e $T : V \to W$ due omomorfismi fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim \operatorname{Im} T = \dim W$.
   B) $\dim \ker(T - S) = 0$.
   C) $\dim \operatorname{Im} S = \dim V - \dim \ker S$.
   D) $T + 2S$ è una trasformazione lineare.

2) Sia T un endomorfismo dello spazio vettoriale reale V di dimensione finita n. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) ogni autovalore di T^2 è radice del polinomio caratteristico di T^2.
   B) T ammette almeno un autovettore.
   C) T ammette esattamente n autovalori reali (contati con la loro molteplicità algebrica).
   D) se T ammette l'autovalore nullo allora T è l'omomorfismo nullo.

3) Dire quali delle seguenti funzioni $f_i : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sono prodotti scalari sullo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbf{R}^2$.
   A) $f_1\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = 3x_1x_2 + 3y_1y_2$.
   B) $f_3\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = x_1x_2y_1y_2$.
   C) $f_2\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = x_1 + x_2 + y_1 + y_2$.
   D) $f_4\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = -1$.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.
   B) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora anche $2y$ è soluzione di $\mathbf{S}$.
   C) $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni se e solo se A e C hanno rango diverso.
   D) $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) < \rho(C)$.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -s \\ y = s \\ z = 4t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta non parallela all'asse delle x.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle z.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) se il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(-2, 1)$ e il punto P ha coordinate $(1, 0)$, allora il punto Q ha coordinate $(-5, 2)$.
   B) la conica di equazione $3x^2 + 8y^2 = 1$ è una ellisse.
   C) le rette di equazioni $x - y = 0$ e $x + y = 1$ sono ortogonali.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 0)$ e il punto di coordinate $(20, 0)$ è 30.

7) Si consideri l'insieme $\mathbf{R}^2[t]$ dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti reali di grado non superiore a 2. Siano $+$ e $\cdot$ le usuali operazioni di somma e di prodotto tra polinomi. Allora
   A) $(\mathbf{R}^2[t], +)$ è un gruppo.
   B) $(\mathbf{R}^2[t], +, \cdot)$ è un campo.
   C) $(\mathbf{R}^2[t], \cdot)$ è un anello.
   D) $(\mathbf{R}^2[t], \cdot)$ è un gruppo.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora la matrice $A \cdot B$ è simmetrica.
   B) la matrice $A + B + C$ è simmetrica.
   C) $\det(A \cdot B \cdot C) = \det(C \cdot B \cdot A)$.
   D) $A \cdot B = B \cdot A$.

9) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme delle successioni reali che hanno infiniti termini uguali a 0.
   B) insieme delle matrici reali 4×2 a coefficienti reali.
   C) insieme delle terne di numeri reali (x_1, x_2, x_3) tali che $x_1 + x_2 + x_3$ sia un numero intero.
   D) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado pari.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ a determinante non nullo. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 + BA - AB$.
B) $A+B+C$ ha determinante non nullo.
C) $\det({}^tA \cdot C^2 \cdot \, {}^tB \cdot A \cdot B) > 0$.
D) $Tr(A+B+C) \neq 0$.

2) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) un numero reale λ è autovalore di T se e solo se è radice del suo polinomio caratteristico.
B) se λ è un autovalore di T allora è anche un autovalore di $-T^2 + 4T^5$.
C) se A è diagonalizzabile per similitudine allora è anche simmetrica.
D) se T ammette n autovalori reali distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.

3) Dire quali delle seguenti funzioni $f_i : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ sono prodotti scalari sullo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbf{R}^3$.
A) $f_2\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + z_1^2 z_2^2$.
B) $f_1\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.
C) $f_4\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1 x_2$.
D) $f_3\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = 0$.

4) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
A) insieme dei numeri reali.
B) insieme delle terne di numeri reali (y_1, y_2, y_3) con $y_1 + y_2 - y_3 \neq 0$.
C) insieme delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ derivabili.
D) insieme dei numeri interi.

5) Si considerino sull'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi l'usuale somma $+$ e l'usuale prodotto $\cdot$. Allora
A) $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ è un anello.
B) $(\mathbf{C}, \cdot)$ è un gruppo.
C) $(\mathbf{C}, +)$ è un gruppo commutativo.
D) $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ è un campo.

6) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y - z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle y.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle x.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) \neq 0$.
   B) se $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni allora $m > n$.
   C) il sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$ associato a $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(C) = \rho(A)$.
   D) $\rho(C) \geq \rho(A)$.

8) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $(v_1, \ldots, v_n)$ è una base di V allora anche $(T(v_1), \ldots, T(v_n))$ è una base di V.
   B) $\dim \ker T = \dim \operatorname{Im} T$.
   C) se $(T(v_1), \ldots, T(v_n))$ è una base di V allora anche $(v_1, \ldots, v_n)$ è una base di V.
   D) T^3 è iniettivo se e solo se è suriettivo.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(5, 5)$ e la retta di equazione $3x - 4y = 0$ è 1.
   B) le rette di equazioni cartesiane $x - 2y = 0$ e $x - 4y = 0$ sono fra loro parallele.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(1, -1)$ e il punto di coordinate $(-1, 1)$ è $2\sqrt{2}$.
   D) la conica di equazione $y = -x^2$ è una parabola.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ derivabili.
   B) insieme dei numeri interi.
   C) insieme dei numeri reali.
   D) insieme delle terne di numeri reali (y_1, y_2, y_3) con $y_1 + y_2 - y_3 \neq 0$.

2) Siano $S : V \to W$ e $T : V \to W$ due omomorfismi fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $T + 2S$ è una trasformazione lineare.
   B) $\dim \mathrm{Im}\ T = \dim W$.
   C) $\dim \mathrm{Im}\ S = \dim V - \dim \ker S$.
   D) $\dim \ker(T - S) = 0$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) < \rho(C)$.
   B) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.
   C) $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni se e solo se A e C hanno rango diverso.
   D) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora anche $2y$ è soluzione di $\mathbf{S}$.

4) Sia T un endomorfismo dello spazio vettoriale reale V di dimensione finita n. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se T ammette l'autovalore nullo allora T è l'omomorfismo nullo.
   B) ogni autovalore di T^2 è radice del polinomio caratteristico di T^2.
   C) T ammette esattamente n autovalori reali (contati con la loro molteplicità algebrica).
   D) T ammette almeno un autovettore.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ a determinante non nullo. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\det({}^tA \cdot C^2 \cdot {}^tB \cdot A \cdot B) > 0$.
   B) $Tr(A + B + C) \neq 0$.
   C) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 + BA - AB$.
   D) $A + B + C$ ha determinante non nullo.

6) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y - z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle x.
B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle y.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?

A) la conica di equazione $y = -x^2$ è una parabola.
B) la distanza fra il punto di coordinate $(5, 5)$ e la retta di equazione $3x - 4y = 0$ è 1.
C) le rette di equazioni cartesiane $x - 2y = 0$ e $x - 4y = 0$ sono fra loro parallele.
D) la distanza fra il punto di coordinate $(1, -1)$ e il punto di coordinate $(-1, 1)$ è $2\sqrt{2}$.

8) Dire quali delle seguenti funzioni $f_i : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ sono prodotti scalari sullo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbf{R}^3$.

A) $f_3\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = 0$.
B) $f_2\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + z_1^2 z_2^2$.
C) $f_1\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.
D) $f_4\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1 x_2$.

9) Si considerino sull'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi l'usuale somma $+$ e l'usuale prodotto $\cdot$. Allora

A) $(\mathbf{C}, +)$ è un gruppo commutativo.
B) $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ è un campo.
C) $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ è un anello.
D) $(\mathbf{C}, \cdot)$ è un gruppo.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -s \\ y = s \\ z = 4t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta non parallela all'asse delle x.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle z.

2) Dire quali delle seguenti funzioni $f_i : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sono prodotti scalari sullo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbf{R}^2$.
   A) $f_1\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = 3x_1x_2 + 3y_1y_2$.
   B) $f_2\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = x_1 + x_2 + y_1 + y_2$.
   C) $f_4\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = -1$.
   D) $f_3\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = x_1x_2y_1y_2$.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

   A) la matrice $A + B + C$ è simmetrica.
   B) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora la matrice $A \cdot B$ è simmetrica.
   C) $\det(A \cdot B \cdot C) = \det(C \cdot B \cdot A)$.
   D) $A \cdot B = B \cdot A$.

4) Si consideri l'insieme $\mathbf{R}^2[t]$ dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti reali di grado non superiore a 2. Siano $+$ e $\cdot$ le usuali operazioni di somma e di prodotto tra polinomi. Allora
   A) $(\mathbf{R}^2[t], +, \cdot)$ è un campo.
   B) $(\mathbf{R}^2[t], +)$ è un gruppo.
   C) $(\mathbf{R}^2[t], \cdot)$ è un anello.
   D) $(\mathbf{R}^2[t], \cdot)$ è un gruppo.

5) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $(T(v_1), \dots, T(v_n))$ è una base di V allora anche $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V.
   B) T^3 è iniettivo se e solo se è suriettivo.
   C) se $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V allora anche $(T(v_1), \dots, T(v_n))$ è una base di V.
   D) $\dim \ker T = \dim \operatorname{Im} T$.

6) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme delle matrici reali 4×2 a coefficienti reali.
   B) insieme delle successioni reali che hanno infiniti termini uguali a 0.
   C) insieme delle terne di numeri reali (x_1, x_2, x_3) tali che $x_1 + x_2 + x_3$ sia un numero intero.
   D) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado pari.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) se il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(-2, 1)$ e il punto P ha coordinate $(1, 0)$, allora il punto Q ha coordinate $(-5, 2)$.
   B) le rette di equazioni $x - y = 0$ e $x + y = 1$ sono ortogonali.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 0)$ e il punto di coordinate $(20, 0)$ è 30.
   D) la conica di equazione $3x^2 + 8y^2 = 1$ è una ellisse.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) il sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$ associato a $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(C) = \rho(A)$.
   B) $\rho(C) \geq \rho(A)$.
   C) $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) \neq 0$.
   D) se $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni allora $m > n$.

9) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se A è diagonalizzabile per similitudine allora è anche simmetrica.
   B) se T ammette n autovalori reali distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.
   C) un numero reale λ è autovalore di T se e solo se è radice del suo polinomio caratteristico.
   D) se λ è un autovalore di T allora è anche un autovalore di $-T^2 + 4T^5$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $S : V \to W$ e $T : V \to W$ due omomorfismi fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim \mathrm{Im}\, S = \dim V - \dim \ker S$.
   B) $T + 2S$ è una trasformazione lineare.
   C) $\dim \mathrm{Im}\, T = \dim W$.
   D) $\dim \ker(T - S) = 0$.

2) Dire quali delle seguenti funzioni $f_i : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sono prodotti scalari sullo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbf{R}^2$.
   A) $f_3\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = x_1x_2y_1y_2$.
   B) $f_1\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = 3x_1x_2 + 3y_1y_2$.
   C) $f_4\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = -1$.
   D) $f_2\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = x_1 + x_2 + y_1 + y_2$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni se e solo se A e C hanno rango diverso.
   B) $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) < \rho(C)$.
   C) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.
   D) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora anche $2y$ è soluzione di $\mathbf{S}$.

4) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -s \\ y = s \\ z = 4t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle z.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta non parallela all'asse delle x.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) la conica di equazione $3x^2 + 8y^2 = 1$ è una ellisse.
   B) se il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(-2, 1)$ e il punto P ha coordinate $(1, 0)$, allora il punto Q ha coordinate $(-5, 2)$.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 0)$ e il punto di coordinate $(20, 0)$ è 30.
   D) le rette di equazioni $x - y = 0$ e $x + y = 1$ sono ortogonali.

6) Sia T un endomorfismo dello spazio vettoriale reale V di dimensione finita n. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) T ammette esattamente n autovalori reali (contati con la loro molteplicità algebrica).
   B) se T ammette l'autovalore nullo allora T è l'omomorfismo nullo.
   C) ogni autovalore di T^2 è radice del polinomio caratteristico di T^2.
   D) T ammette almeno un autovettore.

7) Si considerino sull'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi l'usuale somma $+$ e l'usuale prodotto $\cdot$. Allora
   A) $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ è un campo.
   B) $(\mathbf{C}, +)$ è un gruppo commutativo.
   C) $(\mathbf{C}, \cdot)$ è un gruppo.
   D) $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ è un anello.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ a determinante non nullo. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $Tr(A + B + C) \neq 0$.
   B) $\det({}^tA \cdot C^2 \cdot \ {}^tB \cdot A \cdot B) > 0$.
   C) $A + B + C$ ha determinante non nullo.
   D) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 + BA - AB$.

9) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme dei numeri interi.
   B) insieme delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ derivabili.
   C) insieme delle terne di numeri reali (y_1, y_2, y_3) con $y_1 + y_2 - y_3 \neq 0$.
   D) insieme dei numeri reali.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si consideri l'insieme $\mathbf{R}^2[t]$ dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti reali di grado non superiore a 2. Siano $+$ e $\cdot$ le usuali operazioni di somma e di prodotto tra polinomi. Allora
   A) $(\mathbf{R}^2[t], +)$ è un gruppo.
   B) $(\mathbf{R}^2[t], \cdot)$ è un anello.
   C) $(\mathbf{R}^2[t], \cdot)$ è un gruppo.
   D) $(\mathbf{R}^2[t], +, \cdot)$ è un campo.

2) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se A è diagonalizzabile per similitudine allora è anche simmetrica.
   B) un numero reale λ è autovalore di T se e solo se è radice del suo polinomio caratteristico.
   C) se T ammette n autovalori reali distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.
   D) se λ è un autovalore di T allora è anche un autovalore di $-T^2 + 4T^5$.

3) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme delle successioni reali che hanno infiniti termini uguali a 0.
   B) insieme delle terne di numeri reali (x_1, x_2, x_3) tali che $x_1 + x_2 + x_3$ sia un numero intero.
   C) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado pari.
   D) insieme delle matrici reali 4×2 a coefficienti reali.

4) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

   A) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora la matrice $A \cdot B$ è simmetrica.
   B) $\det(A \cdot B \cdot C) = \det(C \cdot B \cdot A)$.
   C) $A \cdot B = B \cdot A$.
   D) la matrice $A + B + C$ è simmetrica.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) il sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$ associato a $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(C) = \rho(A)$.
   B) $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) \neq 0$.
   C) $\rho(C) \geq \rho(A)$.
   D) se $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni allora $m > n$.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) se $(T(v_1), \dots, T(v_n))$ è una base di V allora anche $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V.
B) se $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V allora anche $(T(v_1), \dots, T(v_n))$ è una base di V.
C) T^3 è iniettivo se e solo se è suriettivo.
D) $\dim \ker T = \dim \operatorname{Im} T$.

7) Dire quali delle seguenti funzioni $f_i : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ sono prodotti scalari sullo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbf{R}^3$.
A) $f_4\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1 x_2$.
B) $f_3\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = 0$.
C) $f_2\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + z_1^2 z_2^2$.
D) $f_1\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
A) la distanza fra il punto di coordinate $(1, -1)$ e il punto di coordinate $(-1, 1)$ è $2\sqrt{2}$.
B) la conica di equazione $y = -x^2$ è una parabola.
C) la distanza fra il punto di coordinate $(5, 5)$ e la retta di equazione $3x - 4y = 0$ è 1.
D) le rette di equazioni cartesiane $x - 2y = 0$ e $x - 4y = 0$ sono fra loro parallele.

9) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y - z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle y.
B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle x.
C) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
D) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y - z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle x.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle y.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(5, 5)$ e la retta di equazione $3x - 4y = 0$ è 1.
   B) la conica di equazione $y = -x^2$ è una parabola.
   C) le rette di equazioni cartesiane $x - 2y = 0$ e $x - 4y = 0$ sono fra loro parallele.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(1, -1)$ e il punto di coordinate $(-1, 1)$ è $2\sqrt{2}$.

3) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme delle terne di numeri reali (x_1, x_2, x_3) tali che $x_1 + x_2 + x_3$ sia un numero intero.
   B) insieme delle successioni reali che hanno infiniti termini uguali a 0.
   C) insieme delle matrici reali 4×2 a coefficienti reali.
   D) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado pari.

4) Sia T un endomorfismo dello spazio vettoriale reale V di dimensione finita n. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) T ammette almeno un autovettore.
   B) se T ammette l'autovalore nullo allora T è l'omomorfismo nullo.
   C) T ammette esattamente n autovalori reali (contati con la loro molteplicità algebrica).
   D) ogni autovalore di T^2 è radice del polinomio caratteristico di T^2.

5) Dire quali delle seguenti funzioni $f_i : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ sono prodotti scalari sullo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbf{R}^3$.
   A) $f_2\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + z_1^2 z_2^2$.
   B) $f_3\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = 0$.
   C) $f_1\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.
   D) $f_4\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1 x_2$.

6) Si consideri l'insieme $\mathbf{R}^2[t]$ dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti reali di grado non superiore a 2. Siano $+$ e $\cdot$ le usuali operazioni di somma e di prodotto tra polinomi. Allora
   A) $(\mathbf{R}^2[t], \cdot)$ è un anello.
   B) $(\mathbf{R}^2[t], +)$ è un gruppo.
   C) $(\mathbf{R}^2[t], +, \cdot)$ è un campo.
   D) $(\mathbf{R}^2[t], \cdot)$ è un gruppo.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

   A) $\det(A \cdot B \cdot C) = \det(C \cdot B \cdot A)$.
   B) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora la matrice $A \cdot B$ è simmetrica.
   C) la matrice $A + B + C$ è simmetrica.
   D) $A \cdot B = B \cdot A$.

8) Siano $S : V \to W$ e $T : V \to W$ due omomorfismi fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim \ker(T - S) = 0$.
   B) $T + 2S$ è una trasformazione lineare.
   C) $\dim \mathrm{Im}\ S = \dim V - \dim \ker S$.
   D) $\dim \mathrm{Im}\ T = \dim W$.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora anche $2y$ è soluzione di $\mathbf{S}$.
   B) $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) < \rho(C)$.
   C) $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni se e solo se A e C hanno rango diverso.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) T^3 è iniettivo se e solo se è suriettivo.
   B) $\dim \ker T = \dim \operatorname{Im} T$.
   C) se $(T(v_1), \dots, T(v_n))$ è una base di V allora anche $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V.
   D) se $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V allora anche $(T(v_1), \dots, T(v_n))$ è una base di V.

2) Si considerino sull'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi l'usuale somma $+$ e l'usuale prodotto $\cdot$. Allora
   A) $(\mathbf{C}, +)$ è un gruppo commutativo.
   B) $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ è un campo.
   C) $(\mathbf{C}, \cdot)$ è un gruppo.
   D) $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ è un anello.

3) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se T ammette n autovalori reali distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.
   B) se λ è un autovalore di T allora è anche un autovalore di $-T^2 + 4T^5$.
   C) se A è diagonalizzabile per similitudine allora è anche simmetrica.
   D) un numero reale λ è autovalore di T se e solo se è radice del suo polinomio caratteristico.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) le rette di equazioni $x - y = 0$ e $x + y = 1$ sono ortogonali.
   B) se il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(-2, 1)$ e il punto P ha coordinate $(1, 0)$, allora il punto Q ha coordinate $(-5, 2)$.
   C) la conica di equazione $3x^2 + 8y^2 = 1$ è una ellisse.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 0)$ e il punto di coordinate $(20, 0)$ è 30.

5) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ derivabili.
   B) insieme dei numeri interi.
   C) insieme delle terne di numeri reali (y_1, y_2, y_3) con $y_1 + y_2 - y_3 \neq 0$.
   D) insieme dei numeri reali.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ a determinante non nullo. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) $\det({}^tA \cdot C^2 \cdot {}^tB \cdot A \cdot B) > 0$.
B) $Tr(A + B + C) \neq 0$.
C) $A + B + C$ ha determinante non nullo.
D) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 + BA - AB$.

7) Dire quali delle seguenti funzioni $f_i : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sono prodotti scalari sullo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbf{R}^2$.
A) $f_2\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = x_1 + x_2 + y_1 + y_2$.
B) $f_1\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = 3x_1x_2 + 3y_1y_2$.
C) $f_3\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = x_1x_2y_1y_2$.
D) $f_4\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = -1$.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) $\rho(C) \geq \rho(A)$.
B) se $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni allora $m > n$.
C) il sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$ associato a $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(C) = \rho(A)$.
D) $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) \neq 0$.

9) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -s \\ y = s \\ z = 4t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.
B) $\mathcal{A}$ è una retta non parallela all'asse delle x.
C) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle z.
D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $S : V \to W$ e $T : V \to W$ due omomorfismi fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim \mathrm{Im}\, S = \dim V - \dim \ker S$.
   B) $\dim \ker(T - S) = 0$.
   C) $T + 2S$ è una trasformazione lineare.
   D) $\dim \mathrm{Im}\, T = \dim W$.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni se e solo se A e C hanno rango diverso.
   B) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora anche $2y$ è soluzione di $\mathbf{S}$.
   C) $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) < \rho(C)$.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.

3) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -s \\ y = s \\ z = 4t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta non parallela all'asse delle x.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle z.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) se il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(-2, 1)$ e il punto P ha coordinate $(1, 0)$, allora il punto Q ha coordinate $(-5, 2)$.
   B) la conica di equazione $3x^2 + 8y^2 = 1$ è una ellisse.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 0)$ e il punto di coordinate $(20, 0)$ è 30.
   D) le rette di equazioni $x - y = 0$ e $x + y = 1$ sono ortogonali.

5) Sia T un endomorfismo dello spazio vettoriale reale V di dimensione finita n. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) T ammette esattamente n autovalori reali (contati con la loro molteplicità algebrica).
   B) T ammette almeno un autovettore.
   C) se T ammette l'autovalore nullo allora T è l'omomorfismo nullo.
   D) ogni autovalore di T^2 è radice del polinomio caratteristico di T^2.

6) Dire quali delle seguenti funzioni $f_i : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sono prodotti scalari sullo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbf{R}^2$.
   A) $f_1\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = 3x_1x_2 + 3y_1y_2$.
   B) $f_3\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = x_1x_2y_1y_2$.
   C) $f_4\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = -1$.
   D) $f_2\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = x_1 + x_2 + y_1 + y_2$.

7) Si consideri l'insieme $\mathbf{R}^2[t]$ dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti reali di grado non superiore a 2. Siano $+$ e $\cdot$ le usuali operazioni di somma e di prodotto tra polinomi. Allora
   A) $(\mathbf{R}^2[t], +)$ è un gruppo.
   B) $(\mathbf{R}^2[t], +, \cdot)$ è un campo.
   C) $(\mathbf{R}^2[t], \cdot)$ è un gruppo.
   D) $(\mathbf{R}^2[t], \cdot)$ è un anello.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

   A) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora la matrice $A \cdot B$ è simmetrica.
   B) la matrice $A + B + C$ è simmetrica.
   C) $A \cdot B = B \cdot A$.
   D) $\det(A \cdot B \cdot C) = \det(C \cdot B \cdot A)$.

9) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme delle successioni reali che hanno infiniti termini uguali a 0.
   B) insieme delle matrici reali 4×2 a coefficienti reali.
   C) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado pari.
   D) insieme delle terne di numeri reali (x_1, x_2, x_3) tali che $x_1 + x_2 + x_3$ sia un numero intero.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ a determinante non nullo. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $A + B + C$ ha determinante non nullo.
   B) $Tr(A + B + C) \neq 0$.
   C) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 + BA - AB$.
   D) $\det({}^tA \cdot C^2 \cdot \ {}^tB \cdot A \cdot B) > 0$.

2) Si considerino sull'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi l'usuale somma $+$ e l'usuale prodotto $\cdot$. Allora
   A) $(\mathbf{C}, \cdot)$ è un gruppo.
   B) $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ è un campo.
   C) $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ è un anello.
   D) $(\mathbf{C}, +)$ è un gruppo commutativo.

3) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme delle terne di numeri reali (y_1, y_2, y_3) con $y_1 + y_2 - y_3 \neq 0$.
   B) insieme dei numeri interi.
   C) insieme dei numeri reali.
   D) insieme delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ derivabili.

4) Dire quali delle seguenti funzioni $f_i : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ sono prodotti scalari sullo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbf{R}^3$.
   A) $f_2\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 + z_1^2 z_2^2$.
   B) $f_1\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$.
   C) $f_3\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = 0$.
   D) $f_4\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1 x_2$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) il sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$ associato a $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(C) = \rho(A)$.
   B) $\rho(C) \geq \rho(A)$.
   C) $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) \neq 0$.
   D) se $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni allora $m > n$.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) se $(T(v_1), \dots, T(v_n))$ è una base di V allora anche $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V.

B) T^3 è iniettivo se e solo se è suriettivo.

C) se $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V allora anche $(T(v_1), \dots, T(v_n))$ è una base di V.

D) $\dim \ker T = \dim \operatorname{Im} T$.

7) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y - z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.

B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.

C) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle x.

D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle y.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?

A) la distanza fra il punto di coordinate $(5, 5)$ e la retta di equazione $3x - 4y = 0$ è 1.

B) le rette di equazioni cartesiane $x - 2y = 0$ e $x - 4y = 0$ sono fra loro parallele.

C) la conica di equazione $y = -x^2$ è una parabola.

D) la distanza fra il punto di coordinate $(1, -1)$ e il punto di coordinate $(-1, 1)$ è $2\sqrt{2}$.

9) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) se A è diagonalizzabile per similitudine allora è anche simmetrica.

B) se T ammette n autovalori reali distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.

C) un numero reale λ è autovalore di T se e solo se è radice del suo polinomio caratteristico.

D) se λ è un autovalore di T allora è anche un autovalore di $-T^2 + 4T^5$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni se e solo se A e C hanno rango diverso.
   B) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora anche $2y$ è soluzione di $\mathbf{S}$.
   C) $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) < \rho(C)$.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.

2) Sia T un endomorfismo dello spazio vettoriale reale V di dimensione finita n. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) T ammette esattamente n autovalori reali (contati con la loro molteplicità algebrica).
   B) T ammette almeno un autovettore.
   C) se T ammette l'autovalore nullo allora T è l'omomorfismo nullo.
   D) ogni autovalore di T^2 è radice del polinomio caratteristico di T^2.

3) Dire quali delle seguenti funzioni $f_i : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ sono prodotti scalari sullo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbf{R}^3$.
   A) $f_2\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + z_1^2z_2^2$.
   B) $f_3\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = 0$.
   C) $f_4\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1x_2$.
   D) $f_1\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.

4) Si considerino sull'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi l'usuale somma $+$ e l'usuale prodotto $\cdot$. Allora
   A) $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ è un anello.
   B) $(\mathbf{C}, \cdot)$ è un gruppo.
   C) $(\mathbf{C}, +)$ è un gruppo commutativo.
   D) $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ è un campo.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y - z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle x.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle y.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(5,5)$ e la retta di equazione $3x-4y=0$ è 1.
   B) la conica di equazione $y=-x^2$ è una parabola.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(1,-1)$ e il punto di coordinate $(-1,1)$ è $2\sqrt{2}$.
   D) le rette di equazioni cartesiane $x-2y=0$ e $x-4y=0$ sono fra loro parallele.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n\times n$ a determinante non nullo. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $(A+B)(A-B)=A^2-B^2+BA-AB$.
   B) $A+B+C$ ha determinante non nullo.
   C) $\det({}^tA\cdot C^2\cdot\ {}^tB\cdot A\cdot B)>0$.
   D) $Tr(A+B+C)\neq 0$.

8) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme dei numeri reali.
   B) insieme delle terne di numeri reali (y_1,y_2,y_3) con $y_1+y_2-y_3\neq 0$.
   C) insieme delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ derivabili.
   D) insieme dei numeri interi.

9) Siano $S:V\to W$ e $T:V\to W$ due omomorfismi fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\dim \mathrm{Im}\ S=\dim V-\dim\ker S$.
   B) $\dim\ker(T-S)=0$.
   C) $T+2S$ è una trasformazione lineare.
   D) $\dim \mathrm{Im}\ T=\dim W$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\det(A \cdot B \cdot C) = \det(C \cdot B \cdot A)$.
B) $A \cdot B = B \cdot A$.
C) la matrice $A + B + C$ è simmetrica.
D) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora la matrice $A \cdot B$ è simmetrica.

2) Si consideri l'insieme $\mathbf{R}^2[t]$ dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti reali di grado non superiore a 2. Siano $+$ e $\cdot$ le usuali operazioni di somma e di prodotto tra polinomi. Allora
A) $(\mathbf{R}^2[t], \cdot)$ è un anello.
B) $(\mathbf{R}^2[t], \cdot)$ è un gruppo.
C) $(\mathbf{R}^2[t], +, \cdot)$ è un campo.
D) $(\mathbf{R}^2[t], +)$ è un gruppo.

3) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) T^3 è iniettivo se e solo se è suriettivo.
B) se $(T(v_1), \dots, T(v_n))$ è una base di V allora anche $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V.
C) $\dim \ker T = \dim \operatorname{Im} T$.
D) se $(v_1, \dots, v_n)$ è una base di V allora anche $(T(v_1), \dots, T(v_n))$ è una base di V.

4) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
A) insieme delle terne di numeri reali (x_1, x_2, x_3) tali che $x_1 + x_2 + x_3$ sia un numero intero.
B) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado pari.
C) insieme delle matrici reali 4×2 a coefficienti reali.
D) insieme delle successioni reali che hanno infiniti termini uguali a 0.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -s \\ y = s \\ z = 4t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle z.
B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.
C) $\mathcal{A}$ è una retta non parallela all'asse delle x.
D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

6) Dire quali delle seguenti funzioni $f_i : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sono prodotti scalari sullo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbf{R}^2$.
   A) $f_3\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = x_1 x_2 y_1 y_2$.
   B) $f_2\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = x_1 + x_2 + y_1 + y_2$.
   C) $f_1\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = 3x_1 x_2 + 3y_1 y_2$.
   D) $f_4\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = -1$.

7) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se T ammette n autovalori reali distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.
   B) se A è diagonalizzabile per similitudine allora è anche simmetrica.
   C) se λ è un autovalore di T allora è anche un autovalore di $-T^2 + 4T^5$.
   D) un numero reale λ è autovalore di T se e solo se è radice del suo polinomio caratteristico.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) la conica di equazione $3x^2 + 8y^2 = 1$ è una ellisse.
   B) le rette di equazioni $x - y = 0$ e $x + y = 1$ sono ortogonali.
   C) se il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(-2, 1)$ e il punto P ha coordinate $(1, 0)$, allora il punto Q ha coordinate $(-5, 2)$.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 0)$ e il punto di coordinate $(20, 0)$ è 30.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\rho(C) \geq \rho(A)$.
   B) il sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$ associato a $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(C) = \rho(A)$.
   C) se $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni allora $m > n$.
   D) $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) \neq 0$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Dire quali delle seguenti funzioni $f_i : \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ sono prodotti scalari sullo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbf{R}^2$.
   A) $f_2\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = x_1 + x_2 + y_1 + y_2$.
   B) $f_1\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = 3x_1x_2 + 3y_1y_2$.
   C) $f_4\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = -1$.
   D) $f_3\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = x_1x_2y_1y_2$.

2) Siano $S : V \to W$ e $T : V \to W$ due omomorfismi fra spazi vettoriali reali di dimensione finita e positiva. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $T + 2S$ è una trasformazione lineare.
   B) $\dim \operatorname{Im} S = \dim V - \dim \ker S$.
   C) $\dim \ker(T - S) = 0$.
   D) $\dim \operatorname{Im} T = \dim W$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) < \rho(C)$.
   B) $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni se e solo se A e C hanno rango diverso.
   C) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora anche $2y$ è soluzione di $\mathbf{S}$.
   D) se $\rho(A) = \rho(C)$ allora $\dim(Sol(\mathbf{S})) = n - \rho(A)$.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) le rette di equazioni $x - y = 0$ e $x + y = 1$ sono ortogonali.
   B) se il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(-2, 1)$ e il punto P ha coordinate $(1, 0)$, allora il punto Q ha coordinate $(-5, 2)$.
   C) la distanza fra il punto di coordinate $(10, 0)$ e il punto di coordinate $(20, 0)$ è 30.
   D) la conica di equazione $3x^2 + 8y^2 = 1$ è una ellisse.

5) Si considerino sull'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi l'usuale somma $+$ e l'usuale prodotto $\cdot$. Allora
   A) $(\mathbf{C}, +)$ è un gruppo commutativo.
   B) $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ è un anello.
   C) $(\mathbf{C}, +, \cdot)$ è un campo.
   D) $(\mathbf{C}, \cdot)$ è un gruppo.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ a determinante non nullo. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\det({}^tA \cdot C^2 \cdot {}^tB \cdot A \cdot B) > 0$.

B) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2 + BA - AB$.

C) $Tr(A+B+C) \neq 0$.

D) $A+B+C$ ha determinante non nullo.

7) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?

A) insieme delle funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ derivabili.

B) insieme dei numeri reali.

C) insieme dei numeri interi.

D) insieme delle terne di numeri reali (y_1, y_2, y_3) con $y_1 + y_2 - y_3 \neq 0$.

8) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -s \\ y = s \\ z = 4t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle z.

B) $\mathcal{A}$ è una retta non parallela all'asse delle x.

C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

D) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle z.

9) Sia T un endomorfismo dello spazio vettoriale reale V di dimensione finita n. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) se T ammette l'autovalore nullo allora T è l'omomorfismo nullo.

B) T ammette esattamente n autovalori reali (contati con la loro molteplicità algebrica).

C) T ammette almeno un autovettore.

D) ogni autovalore di T^2 è radice del polinomio caratteristico di T^2.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Dire quali delle seguenti funzioni $f_i : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ sono prodotti scalari sullo spazio vettoriale euclideo standard $\mathbf{R}^3$.
   A) $f_1\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$.
   B) $f_4\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1x_2$.
   C) $f_3\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = 0$.
   D) $f_2\big((x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\big) = x_1^2x_2^2 + y_1^2y_2^2 + z_1^2z_2^2$.

2) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) la matrice $A + B + C$ è simmetrica.
   B) $\det(A \cdot B \cdot C) = \det(C \cdot B \cdot A)$.
   C) $A \cdot B = B \cdot A$.
   D) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora la matrice $A \cdot B$ è simmetrica.

3) Quali dei seguenti insiemi, dotati delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, sono spazi vettoriali sul campo dei reali?
   A) insieme delle matrici reali 4×2 a coefficienti reali.
   B) insieme delle terne di numeri reali (x_1, x_2, x_3) tali che $x_1 + x_2 + x_3$ sia un numero intero.
   C) insieme dei polinomi a coefficienti reali di grado pari.
   D) insieme delle successioni reali che hanno infiniti termini uguali a 0.

4) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} y - z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle x.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\rho(C) \geq \rho(A)$.
   B) $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(A) \neq 0$.
   C) se $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni allora $m > n$.
   D) il sistema lineare omogeneo $\mathbf{S}_0$ associato a $\mathbf{S}$ ammette almeno una soluzione se e solo se $\rho(C) = \rho(A)$.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) T^3 è iniettivo se e solo se è suriettivo.
B) se $(v_1, \ldots, v_n)$ è una base di V allora anche $(T(v_1), \ldots, T(v_n))$ è una base di V.
C) $\dim \ker T = \dim \operatorname{Im} T$.
D) se $(T(v_1), \ldots, T(v_n))$ è una base di V allora anche $(v_1, \ldots, v_n)$ è una base di V.

7) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) se T ammette n autovalori reali distinti allora A è diagonalizzabile per similitudine.
B) un numero reale λ è autovalore di T se e solo se è radice del suo polinomio caratteristico.
C) se λ è un autovalore di T allora è anche un autovalore di $-T^2 + 4T^5$.
D) se A è diagonalizzabile per similitudine allora è anche simmetrica.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
A) le rette di equazioni cartesiane $x - 2y = 0$ e $x - 4y = 0$ sono fra loro parallele.
B) la distanza fra il punto di coordinate $(1, -1)$ e il punto di coordinate $(-1, 1)$ è $2\sqrt{2}$.
C) la conica di equazione $y = -x^2$ è una parabola.
D) la distanza fra il punto di coordinate $(5, 5)$ e la retta di equazione $3x - 4y = 0$ è 1.

9) Si consideri l'insieme $\mathbf{R}^2[t]$ dei polinomi nella indeterminata t a coefficienti reali di grado non superiore a 2. Siano $+$ e $\cdot$ le usuali operazioni di somma e di prodotto tra polinomi. Allora
A) $(\mathbf{R}^2[t], +, \cdot)$ è un campo.
B) $(\mathbf{R}^2[t], \cdot)$ è un anello.
C) $(\mathbf{R}^2[t], \cdot)$ è un gruppo.
D) $(\mathbf{R}^2[t], +)$ è un gruppo.