24 luglio 2008 NOME: MATRICOLA: 00101

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ ($n \geq 2$) è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata y è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) nell'insieme dei numeri interi il numero 1 è l'unità rispetto all'usuale operazione di somma.
   D) ogni anello è anche un campo.

2) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ ortogonali. Allora
   A) $A \cdot B$ è ortogonale.
   B) $A + B$ è ortogonale.
   C) la trasposta di A è ortogonale.
   D) A^{100} è invertibile.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata t di grado minore o uguale a 7 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ costanti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(-1,0,0,0),(0,-1,0,0),(0,0,-1,0),(0,0,0,-1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante nullo è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathcal{M}_3 \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni matrice il suo determinante è una trasformazione lineare.
   B) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ($n > 0$) è una trasformazione lineare invertibile allora lo è anche T^{-1}.
   C) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore (x, y, z) in $(x+1, y+1, z+1)$ è un endomorfismo.
   D) se S e T sono automorfismi sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ anche $S \circ T$ è un automorfismo sullo stesso spazio.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) se $\mathbf{S}$ ammette soluzione il rango di C e il rango di A sono uguali.
   B) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se $\det A \neq 0$.
   C) ogni sottospazio vettoriale 4-dimensionale di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, da una (opportuna) equazione lineare in 5 incognite.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.

6) Sia T un automorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) A^{-1} è la matrice associata a T^{-1} rispetto a $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$.
   B) se A è simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   C) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   D) se $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T allora anche $(-\mathbf{u}_1, \ldots, -\mathbf{u}_n)$ lo è.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è la base naturale di $\mathbb{R}^3$ allora $(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.
   B) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche T^{-1}.
   C) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ se e solo se $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.
   D) $((0,1),(1,0))$ e $((1,0),(0,1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.

8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $-x + y = 1$ e $x + y = -1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori linearmente indipendenti dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
   B) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0,0,0)$ e il piano di equazione cartesiana $2x - 2y + 2z = 4$ è uguale a 2.
   C) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0,-1)$, $(3,-2)$, $(1,-4)$, $(4,-5)$ è uguale a 8.
   D) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto $(x, y, 0)$ è una isometria.

24 luglio 2008 NOME: MATRICOLA: 00110

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di S è minore o uguale alla somma delle loro molteplicità algebriche.
   B) se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico sono simili.
   C) se A è una matrice invertibile allora è diagonalizzabile per similitudine.
   D) se A e B sono simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1, -2, 3)$, $(4, -5, 6)$, $(7, -8, 9)$ sono allineati.
   B) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(-1, 1, -1)$, $(2, 1, 2)$, $(2, -2, -1)$, $(-1, -2, 2)$ è 9.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = 4t, z = 3$ e $x = 5 + t, y = t, z = 1$ è nullo.
   D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0)$ e la retta di equazione $12x + 5y = 13$ è uguale a 1.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = 2t, y = 2t, z = 2t - 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore (x, y, z, t) in $(x, 2y, 3z, 4t)$ è una trasformazione lineare.
   B) la funzione $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che porta ogni matrice $A = (a^i_j)$ nella somma di tutti i suoi termini a^i_j è una trasformazione lineare.
   C) la somma di due endomorfismi sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è un endomorfismo sullo stesso spazio.
   D) non esistono isomorfismi fra $\mathbb{R}^9$ e $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche con determinante uguale a 1. Allora
   A) $\det(A \cdot B \cdot C) = 1$.
   B) la matrice $A \cdot B \cdot C$ è simmetrica.
   C) la matrice $A + B + C$ è simmetrica.
   D) la matrice $A + B + C$ è invertibile.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.
   B) l'insieme dei numeri razionali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
   C) l'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme degli isomorfismi dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
   B) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti se e solo se A e C hanno lo stesso rango.
   C) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora ammette la soluzione nulla.
   D) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ allora $\mathbf{S}$ ammette esattamente una soluzione.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
   C) l'insieme delle matrici reali 5×5 che hanno traccia nulla è linearmente dipendente.
   D) l'insieme delle matrici reali di $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ che hanno traccia nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 1$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base ortogonale di V, si ha che $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ per $i \neq j$.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.
   C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2$.
   D) V ammette infinite basi ortogonali distinte.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ ortogonali. Allora
   A) A^{100} è invertibile.
   B) $A \cdot B$ è ortogonale.
   C) $A + B$ è ortogonale.
   D) la trasposta di A è ortogonale.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.
   B) ogni sottospazio vettoriale 4-dimensionale di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, da una (opportuna) equazione lineare in 5 incognite.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se $\det A \neq 0$.
   D) se $\mathbf{S}$ ammette soluzione il rango di C e il rango di A sono uguali.

3) Sia T un automorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T allora anche $(-\mathbf{u}_1, \dots, -\mathbf{u}_n)$ lo è.
   B) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   C) se A è simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   D) A^{-1} è la matrice associata a T^{-1} rispetto a $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 1$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) V ammette infinite basi ortogonali distinte.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2$.
   C) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base ortogonale di V, si ha che $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ per $i \neq j$.
   D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante nullo è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata t di grado minore o uguale a 7 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ costanti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme $\{(-1,0,0,0), (0,-1,0,0), (0,0,-1,0), (0,0,0,-1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se S e T sono automorfismi sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ anche $S \circ T$ è un automorfismo sullo stesso spazio.
   B) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore (x, y, z) in $(x + 1, y + 1, z + 1)$ è un endomorfismo.
   C) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n > 0)$ è una trasformazione lineare invertibile allora lo è anche T^{-1}.
   D) la funzione $F : \mathcal{M}_3 \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni matrice il suo determinante è una trasformazione lineare.

7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = 2t, y = 2t, z = 2t - 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0)$ e la retta di equazione $12x + 5y = 13$ è uguale a 1.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = 4t, z = 3$ e $x = 5 + t, y = t, z = 1$ è nullo.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1, -2, 3)$, $(4, -5, 6)$, $(7, -8, 9)$ sono allineati.
   D) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(-1, 1, -1)$, $(2, 1, 2)$, $(2, -2, -1)$, $(-1, -2, 2)$ è 9.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) ogni anello è anche un campo.
   B) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ $(n \geq 2)$ è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata y è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) nell'insieme dei numeri interi il numero 1 è l'unità rispetto all'usuale operazione di somma.

24 luglio 2008   NOME: MATRICOLA: 01000

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $2x - 2y + 2z = 4$ è uguale a 2.
   B) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0, -1)$, $(3, -2)$, $(1, -4)$, $(4, -5)$ è uguale a 8.
   C) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto $(x, y, 0)$ è una isometria.
   D) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori linearmente indipendenti dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ allora $\mathbf{S}$ ammette esattamente una soluzione.
   B) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora ammette la soluzione nulla.
   C) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti se e solo se A e C hanno lo stesso rango.
   D) l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme degli isomorfismi dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.
   B) l'insieme dei numeri razionali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
   C) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.
   D) l'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

4) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se A e B sono simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   B) se A è una matrice invertibile allora è diagonalizzabile per similitudine.
   C) se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico sono simili.
   D) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di S è minore o uguale alla somma delle loro molteplicità algebriche.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $-x+y=1$ e $x+y=-1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche T^{-1}.
   B) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ se e solo se $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.
   C) $((0,1),(1,0))$ e $((1,0),(0,1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.
   D) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è la base naturale di $\mathbb{R}^3$ allora $(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali di $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ che hanno traccia nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
   B) l'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
   C) l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle matrici reali 5×5 che hanno traccia nulla è linearmente dipendente.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche con determinante uguale a 1. Allora
   A) la matrice $A+B+C$ è invertibile.
   B) la matrice $A \cdot B \cdot C$ è simmetrica.
   C) $\det(A \cdot B \cdot C) = 1$.
   D) la matrice $A+B+C$ è simmetrica.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) non esistono isomorfismi fra $\mathbb{R}^9$ e $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   B) la somma di due endomorfismi sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è un endomorfismo sullo stesso spazio.
   C) la funzione $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che porta ogni matrice $A = (a^i_j)$ nella somma di tutti i suoi termini a^i_j è una trasformazione lineare.
   D) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore (x,y,z,t) in $(x,2y,3z,4t)$ è una trasformazione lineare.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche con determinante uguale a 1. Allora
   A) la matrice $A + B + C$ è invertibile.
   B) $\det(A \cdot B \cdot C) = 1$.
   C) la matrice $A \cdot B \cdot C$ è simmetrica.
   D) la matrice $A + B + C$ è simmetrica.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali di $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ che hanno traccia nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
   B) l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
   D) l'insieme delle matrici reali 5×5 che hanno traccia nulla è linearmente dipendente.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $-x + y = 1$ e $x + y = -1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n > 0)$ è una trasformazione lineare invertibile allora lo è anche T^{-1}.
   B) la funzione $F : \mathcal{M}_3 \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni matrice il suo determinante è una trasformazione lineare.
   C) se S e T sono automorfismi sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ anche $S \circ T$ è un automorfismo sullo stesso spazio.
   D) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore (x, y, z) in $(x + 1, y + 1, z + 1)$ è un endomorfismo.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se $\det A \neq 0$.
   B) se $\mathbf{S}$ ammette soluzione il rango di C e il rango di A sono uguali.
   C) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.
   D) ogni sottospazio vettoriale 4-dimensionale di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, da una (opportuna) equazione lineare in 5 incognite.

6) Sia T un automorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) se A è simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   B) A^{-1} è la matrice associata a T^{-1} rispetto a $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$.
   C) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T allora anche $(-\mathbf{u}_1, \dots, -\mathbf{u}_n)$ lo è.
   D) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche T^{-1}.
   B) $((0, 1), (1, 0))$ e $((1, 0), (0, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.
   C) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è la base naturale di $\mathbb{R}^3$ allora $(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.
   D) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ se e solo se $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $2x - 2y + 2z = 4$ è uguale a 2.
   B) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto $(x, y, 0)$ è una isometria.
   C) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori linearmente indipendenti dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
   D) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0, -1)$, $(3, -2)$, $(1, -4)$, $(4, -5)$ è uguale a 8.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme degli isomorfismi dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.
   B) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.
   C) l'insieme dei numeri razionali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
   D) l'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

24 luglio 2008 NOME: MATRICOLA: 01010

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 1$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2$.
   B) V ammette infinite basi ortogonali distinte.
   C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.
   D) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base ortogonale di V, si ha che $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ per $i \neq j$.

2) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico sono simili.
   B) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di S è minore o uguale alla somma delle loro molteplicità algebriche.
   C) se A è una matrice invertibile allora è diagonalizzabile per similitudine.
   D) se A e B sono simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

3) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ ortogonali. Allora
   A) $A + B$ è ortogonale.
   B) la trasposta di A è ortogonale.
   C) $A \cdot B$ è ortogonale.
   D) A^{100} è invertibile.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata y è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) nell'insieme dei numeri interi il numero 1 è l'unità rispetto all'usuale operazione di somma.
   C) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ ($n \geq 2$) è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) ogni anello è anche un campo.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = 2t, y = 2t, z = 2t - 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = 4t, z = 3$ e $x = 5 + t, y = t, z = 1$ è nullo.

B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0)$ e la retta di equazione $12x + 5y = 13$ è uguale a 1.

C) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(-1, 1, -1)$, $(2, 1, 2)$, $(2, -2, -1)$, $(-1, -2, 2)$ è 9.

D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1, -2, 3)$, $(4, -5, 6)$, $(7, -8, 9)$ sono allineati.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):

A) la funzione $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che porta ogni matrice $A = (a^i_j)$ nella somma di tutti i suoi termini a^i_j è una trasformazione lineare.

B) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore (x, y, z, t) in $(x, 2y, 3z, 4t)$ è una trasformazione lineare.

C) la somma di due endomorfismi sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è un endomorfismo sullo stesso spazio.

D) non esistono isomorfismi fra $\mathbb{R}^9$ e $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ costanti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

B) l'insieme $\{(-1, 0, 0, 0), (0, -1, 0, 0), (0, 0, -1, 0), (0, 0, 0, -1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

C) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata t di grado minore o uguale a 7 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

D) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante nullo è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora

A) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti se e solo se A e C hanno lo stesso rango.

B) l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

C) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora ammette la soluzione nulla.

D) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ allora $\mathbf{S}$ ammette esattamente una soluzione.

24 luglio 2008 NOME: MATRICOLA: 01011

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche con determinante uguale a 1. Allora
   A) la matrice $A \cdot B \cdot C$ è simmetrica.
   B) la matrice $A + B + C$ è simmetrica.
   C) la matrice $A + B + C$ è invertibile.
   D) $\det(A \cdot B \cdot C) = 1$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
   B) l'insieme delle matrici reali 5×5 che hanno traccia nulla è linearmente dipendente.
   C) l'insieme delle matrici reali di $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ che hanno traccia nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
   D) l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n > 0)$ è una trasformazione lineare invertibile allora lo è anche T^{-1}.
   B) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore (x, y, z) in $(x + 1, y + 1, z + 1)$ è un endomorfismo.
   C) la funzione $F : \mathcal{M}_3 \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni matrice il suo determinante è una trasformazione lineare.
   D) se S e T sono automorfismi sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ anche $S \circ T$ è un automorfismo sullo stesso spazio.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se $\det A \neq 0$.
   B) ogni sottospazio vettoriale 4-dimensionale di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, da una (opportuna) equazione lineare in 5 incognite.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette soluzione il rango di C e il rango di A sono uguali.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(0,0)$ e la retta di equazione $12x + 5y = 13$ è uguale a 1.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1,-2,3)$, $(4,-5,6)$, $(7,-8,9)$ sono allineati.
   C) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(-1,1,-1)$, $(2,1,2)$, $(2,-2,-1)$, $(-1,-2,2)$ è 9.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = 4t, z = 3$ e $x = 5 + t, y = t, z = 1$ è nullo.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri razionali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
   B) l'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme degli isomorfismi dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.
   D) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.

7) Sia T un automorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) se A è simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   B) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   C) A^{-1} è la matrice associata a T^{-1} rispetto a $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$.
   D) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T allora anche $(-\mathbf{u}_1, \dots, -\mathbf{u}_n)$ lo è.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 1$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) V ammette infinite basi ortogonali distinte.
   B) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base ortogonale di V, si ha che $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ per $i \neq j$.
   C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.
   D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2$.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = 2t, y = 2t, z = 2t - 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
   B) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora ammette la soluzione nulla.
   C) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ allora $\mathbf{S}$ ammette esattamente una soluzione.
   D) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti se e solo se A e C hanno lo stesso rango.

2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $-x + y = 1$ e $x + y = -1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ ($n \geq 2$) è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata y è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) ogni anello è anche un campo.
   D) nell'insieme dei numeri interi il numero 1 è l'unità rispetto all'usuale operazione di somma.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0, -1)$, $(3, -2)$, $(1, -4)$, $(4, -5)$ è uguale a 8.
   B) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $2x - 2y + 2z = 4$ è uguale a 2.
   C) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori linearmente indipendenti dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
   D) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto $(x, y, 0)$ è una isometria.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata t di grado minore o uguale a 7 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ costanti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante nullo è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme $\{(-1,0,0,0),(0,-1,0,0),(0,0,-1,0),(0,0,0,-1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

6) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ ortogonali. Allora
   A) $A \cdot B$ è ortogonale.
   B) $A + B$ è ortogonale.
   C) A^{100} è invertibile.
   D) la trasposta di A è ortogonale.

7) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di S è minore o uguale alla somma delle loro molteplicità algebriche.
   B) se A è una matrice invertibile allora è diagonalizzabile per similitudine.
   C) se A e B sono simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   D) se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico sono simili.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore (x,y,z,t) in $(x,2y,3z,4t)$ è una trasformazione lineare.
   B) la somma di due endomorfismi sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è un endomorfismo sullo stesso spazio.
   C) non esistono isomorfismi fra $\mathbb{R}^9$ e $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   D) la funzione $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che porta ogni matrice $A = (a^i_j)$ nella somma di tutti i suoi termini a^i_j è una trasformazione lineare.

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ se e solo se $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.
   B) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche T^{-1}.
   C) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è la base naturale di $\mathbb{R}^3$ allora $(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.
   D) $((0,1),(1,0))$ e $((1,0),(0,1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.

24 luglio 2008 NOME: MATRICOLA: 01101

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
  A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ costanti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
  B) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante nullo è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
  C) l'insieme $\{(-1, 0, 0, 0), (0, -1, 0, 0), (0, 0, -1, 0), (0, 0, 0, -1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
  D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata t di grado minore o uguale a 7 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $-x + y = 1$ e $x + y = -1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
  A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
  B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
  C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
  D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $2x - 2y + 2z = 4$ è uguale a 2.
  B) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori linearmente indipendenti dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
  C) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0, -1)$, $(3, -2)$, $(1, -4)$, $(4, -5)$ è uguale a 8.
  D) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto $(x, y, 0)$ è una isometria.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
  A) se S e T sono automorfismi sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ anche $S \circ T$ è un automorfismo sullo stesso spazio.
  B) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore (x, y, z) in $(x + 1, y + 1, z + 1)$ è un endomorfismo.
  C) la funzione $F : \mathcal{M}_3 \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni matrice il suo determinante è una trasformazione lineare.
  D) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n > 0)$ è una trasformazione lineare invertibile allora lo è anche T^{-1}.

5) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Allora
   A) se le equazioni di **S** sono linearmente dipendenti allora **S** non ammette soluzioni.
   B) ogni sottospazio vettoriale 4-dimensionale di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, da una (opportuna) equazione lineare in 5 incognite.
   C) se **S** ammette soluzione il rango di C e il rango di A sono uguali.
   D) **S** ammette soluzione se e solo se $\det A \neq 0$.

6) Sia T un automorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) se $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T allora anche $(-\mathbf{u}_1, \ldots, -\mathbf{u}_n)$ lo è.
   B) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   C) A^{-1} è la matrice associata a T^{-1} rispetto a $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$.
   D) se A è simmetrica allora T è diagonalizzabile.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche T^{-1}.
   B) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è la base naturale di $\mathbb{R}^3$ allora $(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.
   C) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ se e solo se $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.
   D) $((0, 1), (1, 0))$ e $((1, 0), (0, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata y è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) ogni anello è anche un campo.
   C) nell'insieme dei numeri interi il numero 1 è l'unità rispetto all'usuale operazione di somma.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ ($n \geq 2$) è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

9) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ ortogonali. Allora
   A) $A + B$ è ortogonale.
   B) A^{100} è invertibile.
   C) la trasposta di A è ortogonale.
   D) $A \cdot B$ è ortogonale.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = 2t, y = 2t, z = 2t - 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 1$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2$.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.
   C) se $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ è una base ortogonale di V, si ha che $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ per $i \neq j$.
   D) V ammette infinite basi ortogonali distinte.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche con determinante uguale a 1. Allora
   A) la matrice $A + B + C$ è simmetrica.
   B) $\det(A \cdot B \cdot C) = 1$.
   C) la matrice $A \cdot B \cdot C$ è simmetrica.
   D) la matrice $A + B + C$ è invertibile.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.
   C) l'insieme dei numeri razionali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
   D) l'insieme degli isomorfismi dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 5×5 che hanno traccia nulla è linearmente dipendente.
   B) l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
   D) l'insieme delle matrici reali di $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ che hanno traccia nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).

6) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico sono simili.
   B) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di S è minore o uguale alla somma delle loro molteplicità algebriche.
   C) se A è una matrice invertibile allora è diagonalizzabile per similitudine.
   D) se A e B sono simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti se e solo se A e C hanno lo stesso rango.
   B) l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
   C) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora ammette la soluzione nulla.
   D) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ allora $\mathbf{S}$ ammette esattamente una soluzione.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che porta ogni matrice $A = (a^i_j)$ nella somma di tutti i suoi termini a^i_j è una trasformazione lineare.
   B) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore (x, y, z, t) in $(x, 2y, 3z, 4t)$ è una trasformazione lineare.
   C) la somma di due endomorfismi sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è un endomorfismo sullo stesso spazio.
   D) non esistono isomorfismi fra $\mathbb{R}^9$ e $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = 4t, z = 3$ e $x = 5 + t, y = t, z = 1$ è nullo.
   B) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(-1, 1, -1)$, $(2, 1, 2)$, $(2, -2, -1)$, $(-1, -2, 2)$ è 9.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1, -2, 3)$, $(4, -5, 6)$, $(7, -8, 9)$ sono allineati.
   D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0)$ e la retta di equazione $12x + 5y = 13$ è uguale a 1.

24 luglio 2008 NOME: MATRICOLA: 01111

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se S e T sono automorfismi sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ anche $S \circ T$ è un automorfismo sullo stesso spazio.
   B) la funzione $F : \mathcal{M}_3 \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni matrice il suo determinante è una trasformazione lineare.
   C) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n > 0)$ è una trasformazione lineare invertibile allora lo è anche T^{-1}.
   D) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore (x, y, z) in $(x + 1, y + 1, z + 1)$ è un endomorfismo.

2) Sia T un automorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T allora anche $(-\mathbf{u}_1, \dots, -\mathbf{u}_n)$ lo è.
   B) A^{-1} è la matrice associata a T^{-1} rispetto a $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$.
   C) se A è simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   D) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 1$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) V ammette infinite basi ortogonali distinte.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2$.
   C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.
   D) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base ortogonale di V, si ha che $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ per $i \neq j$.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.
   B) se $\mathbf{S}$ ammette soluzione il rango di C e il rango di A sono uguali.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se $\det A \neq 0$.
   D) ogni sottospazio vettoriale 4-dimensionale di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, da una (opportuna) equazione lineare in 5 incognite.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = 2t, y = 2t, z = 2t - 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0)$ e la retta di equazione $12x + 5y = 13$ è uguale a 1.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = 4t, z = 3$ e $x = 5 + t, y = t, z = 1$ è nullo.
   C) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(-1, 1, -1)$, $(2, 1, 2)$, $(2, -2, -1)$, $(-1, -2, 2)$ è 9.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1, -2, 3)$, $(4, -5, 6)$, $(7, -8, 9)$ sono allineati.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) ogni anello è anche un campo.
   B) nell'insieme dei numeri interi il numero 1 è l'unità rispetto all'usuale operazione di somma.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata y è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ $(n \geq 2)$ è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

8) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ ortogonali. Allora
   A) A^{100} è invertibile.
   B) la trasposta di A è ortogonale.
   C) $A + B$ è ortogonale.
   D) $A \cdot B$ è ortogonale.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante nullo è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(-1, 0, 0, 0), (0, -1, 0, 0), (0, 0, -1, 0), (0, 0, 0, -1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ costanti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata t di grado minore o uguale a 7 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

24 luglio 2008 NOME: MATRICOLA: 10000

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche con determinante uguale a 1. Allora
   A) la matrice $A \cdot B \cdot C$ è simmetrica.
   B) la matrice $A + B + C$ è simmetrica.
   C) $\det(A \cdot B \cdot C) = 1$.
   D) la matrice $A + B + C$ è invertibile.

2) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico sono simili.
   B) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di S è minore o uguale alla somma delle loro molteplicità algebriche.
   C) se A e B sono simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   D) se A è una matrice invertibile allora è diagonalizzabile per similitudine.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche T^{-1}.
   B) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è la base naturale di $\mathbb{R}^3$ allora $(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.
   C) $((0,1),(1,0))$ e $((1,0),(0,1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.
   D) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ se e solo se $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
   B) l'insieme delle matrici reali 5×5 che hanno traccia nulla è linearmente dipendente.
   C) l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle matrici reali di $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ che hanno traccia nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri razionali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
   B) l'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.
   D) l'insieme degli isomorfismi dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.

6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $-x+y=1$ e $x+y=-1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.
D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
A) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti se e solo se A e C hanno lo stesso rango.
B) l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
C) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ allora $\mathbf{S}$ ammette esattamente una soluzione.
D) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora ammette la soluzione nulla.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
A) la funzione $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che porta ogni matrice $A = (a^i_j)$ nella somma di tutti i suoi termini a^i_j è una trasformazione lineare.
B) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore (x, y, z, t) in $(x, 2y, 3z, 4t)$ è una trasformazione lineare.
C) non esistono isomorfismi fra $\mathbb{R}^9$ e $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
D) la somma di due endomorfismi sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è un endomorfismo sullo stesso spazio.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $2x - 2y + 2z = 4$ è uguale a 2.
B) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori linearmente indipendenti dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
C) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto $(x, y, 0)$ è una isometria.
D) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0, -1)$, $(3, -2)$, $(1, -4)$, $(4, -5)$ è uguale a 8.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali di $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ che hanno traccia nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
   D) l'insieme delle matrici reali 5×5 che hanno traccia nulla è linearmente dipendente.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore (x, y, z) in $(x + 1, y + 1, z + 1)$ è un endomorfismo.
   B) se S e T sono automorfismi sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ anche $S \circ T$ è un automorfismo sullo stesso spazio.
   C) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n > 0)$ è una trasformazione lineare invertibile allora lo è anche T^{-1}.
   D) la funzione $F : \mathcal{M}_3 \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni matrice il suo determinante è una trasformazione lineare.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) ogni sottospazio vettoriale 4-dimensionale di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, da una (opportuna) equazione lineare in 5 incognite.
   B) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se $\det A \neq 0$.
   D) se $\mathbf{S}$ ammette soluzione il rango di C e il rango di A sono uguali.

4) Sia T un automorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   B) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T allora anche $(-\mathbf{u}_1, \dots, -\mathbf{u}_n)$ lo è.
   C) se A è simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   D) A^{-1} è la matrice associata a T^{-1} rispetto a $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche con determinante uguale a 1. Allora
  A) $\det(A \cdot B \cdot C) = 1$.
  B) la matrice $A + B + C$ è invertibile.
  C) la matrice $A \cdot B \cdot C$ è simmetrica.
  D) la matrice $A + B + C$ è simmetrica.

6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $-x + y = 1$ e $x + y = -1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
  A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
  B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
  C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
  D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  A) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0, -1)$, $(3, -2)$, $(1, -4)$, $(4, -5)$ è uguale a 8.
  B) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $2x - 2y + 2z = 4$ è uguale a 2.
  C) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori linearmente indipendenti dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
  D) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto $(x, y, 0)$ è una isometria.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
  A) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ se e solo se $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.
  B) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche T^{-1}.
  C) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è la base naturale di $\mathbb{R}^3$ allora $(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.
  D) $((0, 1), (1, 0))$ e $((1, 0), (0, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
  A) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.
  B) l'insieme degli isomorfismi dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.
  C) l'insieme dei numeri razionali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
  D) l'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

24 luglio 2008 NOME: MATRICOLA: 10010

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = 2t, y = 2t, z = 2t - 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 1$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) V ammette infinite basi ortogonali distinte.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.
   C) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base ortogonale di V, si ha che $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ per $i \neq j$.
   D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2$.

3) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ ortogonali. Allora
   A) la trasposta di A è ortogonale.
   B) A^{100} è invertibile.
   C) $A + B$ è ortogonale.
   D) $A \cdot B$ è ortogonale.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) nell'insieme dei numeri interi il numero 1 è l'unità rispetto all'usuale operazione di somma.
   B) ogni anello è anche un campo.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata y è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ $(n \geq 2)$ è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) non esistono isomorfismi fra $\mathbb{R}^9$ e $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   B) la somma di due endomorfismi sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è un endomorfismo sullo stesso spazio.
   C) la funzione $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che porta ogni matrice $A = (a^i_j)$ nella somma di tutti i suoi termini a^i_j è una trasformazione lineare.
   D) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore (x, y, z, t) in $(x, 2y, 3z, 4t)$ è una trasformazione lineare.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(-1,0,0,0),(0,-1,0,0),(0,0,-1,0),(0,0,0,-1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   B) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante nullo è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ costanti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata t di grado minore o uguale a 7 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(0,0)$ e la retta di equazione $12x + 5y = 13$ è uguale a 1.
   B) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(-1,1,-1)$, $(2,1,2)$, $(2,-2,-1)$, $(-1,-2,2)$ è 9.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1,-2,3)$, $(4,-5,6)$, $(7,-8,9)$ sono allineati.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = 4t, z = 3$ e $x = 5 + t, y = t, z = 1$ è nullo.

8) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Allora
   A) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ allora **S** ammette esattamente una soluzione.
   B) se **S** è un sistema lineare omogeneo allora ammette la soluzione nulla.
   C) le equazioni di **S** sono linearmente indipendenti se e solo se A e C hanno lo stesso rango.
   D) l'insieme delle soluzioni di **S** è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

9) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se A e B sono simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   B) se A è una matrice invertibile allora è diagonalizzabile per similitudine.
   C) se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico sono simili.
   D) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di S è minore o uguale alla somma delle loro molteplicità algebriche.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n > 0)$ è una trasformazione lineare invertibile allora lo è anche T^{-1}.
   B) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore (x, y, z) in $(x + 1, y + 1, z + 1)$ è un endomorfismo.
   C) se S e T sono automorfismi sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ anche $S \circ T$ è un automorfismo sullo stesso spazio.
   D) la funzione $F : \mathcal{M}_3 \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni matrice il suo determinante è una trasformazione lineare.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 1$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2$.
   B) V ammette infinite basi ortogonali distinte.
   C) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base ortogonale di V, si ha che $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ per $i \neq j$.
   D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se $\det A \neq 0$.
   B) ogni sottospazio vettoriale 4-dimensionale di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, da una (opportuna) equazione lineare in 5 incognite.
   C) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.
   D) se $\mathbf{S}$ ammette soluzione il rango di C e il rango di A sono uguali.

4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = 2t, y = 2t, z = 2t - 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = 4t, z = 3$ e $x = 5 + t, y = t, z = 1$ è nullo.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0)$ e la retta di equazione $12x + 5y = 13$ è uguale a 1.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1, -2, 3)$, $(4, -5, 6)$, $(7, -8, 9)$ sono allineati.
   D) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(-1, 1, -1)$, $(2, 1, 2)$, $(2, -2, -1)$, $(-1, -2, 2)$ è 9.

6) Sia T un automorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) se A è simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   B) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   C) se $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T allora anche $(-\mathbf{u}_1, \ldots, -\mathbf{u}_n)$ lo è.
   D) A^{-1} è la matrice associata a T^{-1} rispetto a $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme degli isomorfismi dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.
   B) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.
   C) l'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme dei numeri razionali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche con determinante uguale a 1. Allora
   A) la matrice $A + B + C$ è invertibile.
   B) $\det(A \cdot B \cdot C) = 1$.
   C) la matrice $A + B + C$ è simmetrica.
   D) la matrice $A \cdot B \cdot C$ è simmetrica.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali di $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ che hanno traccia nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
   B) l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle matrici reali 5×5 che hanno traccia nulla è linearmente dipendente.
   D) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) ogni anello è anche un campo.
   B) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata y è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ $(n \geq 2)$ è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) nell'insieme dei numeri interi il numero 1 è l'unità rispetto all'usuale operazione di somma.

2) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se A e B sono simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   B) se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico sono simili.
   C) se A è una matrice invertibile allora è diagonalizzabile per similitudine.
   D) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di S è minore o uguale alla somma delle loro molteplicità algebriche.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante nullo è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ costanti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata t di grado minore o uguale a 7 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme $\{(-1,0,0,0),(0,-1,0,0),(0,0,-1,0),(0,0,0,-1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

4) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ ortogonali. Allora
   A) A^{100} è invertibile.
   B) $A + B$ è ortogonale.
   C) $A \cdot B$ è ortogonale.
   D) la trasposta di A è ortogonale.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ allora $\mathbf{S}$ ammette esattamente una soluzione.
   B) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti se e solo se A e C hanno lo stesso rango.
   C) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora ammette la soluzione nulla.
   D) l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) non esistono isomorfismi fra $\mathbb{R}^9$ e $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   B) la funzione $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che porta ogni matrice $A = (a^i_j)$ nella somma di tutti i suoi termini a^i_j è una trasformazione lineare.
   C) la somma di due endomorfismi sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è un endomorfismo sullo stesso spazio.
   D) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore (x, y, z, t) in $(x, 2y, 3z, 4t)$ è una trasformazione lineare.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) $((0, 1), (1, 0))$ e $((1, 0), (0, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.
   B) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ se e solo se $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.
   C) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche T^{-1}.
   D) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è la base naturale di $\mathbb{R}^3$ allora $(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto $(x, y, 0)$ è una isometria.
   B) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0, -1)$, $(3, -2)$, $(1, -4)$, $(4, -5)$ è uguale a 8.
   C) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $2x - 2y + 2z = 4$ è uguale a 2.
   D) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori linearmente indipendenti dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $-x + y = 1$ e $x + y = -1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $-x+y=1$ e $x+y=-1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0,0,0)$ e il piano di equazione cartesiana $2x-2y+2z=4$ è uguale a 2.
   B) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0,-1)$, $(3,-2)$, $(1,-4)$, $(4,-5)$ è uguale a 8.
   C) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori linearmente indipendenti dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
   D) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x,y,z) nel punto $(x,y,0)$ è una isometria.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ costanti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante nullo è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(-1,0,0,0),(0,-1,0,0),(0,0,-1,0),(0,0,0,-1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata t di grado minore o uguale a 7 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Sia T un automorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) A^{-1} è la matrice associata a T^{-1} rispetto a $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$.
   B) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   C) se A è simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   D) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T allora anche $(-\mathbf{u}_1, \dots, -\mathbf{u}_n)$ lo è.

5) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche T^{-1}.
   B) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle = 0$ se e solo se $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.
   C) se $(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3)$ è la base naturale di $\mathbb{R}^3$ allora $(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.
   D) $((0,1),(1,0))$ e $((1,0),(0,1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata y è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) ogni anello è anche un campo.
   C) nell'insieme dei numeri interi il numero 1 è l'unità rispetto all'usuale operazione di somma.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ ($n \geq 2$) è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

7) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ ortogonali. Allora
   A) $A + B$ è ortogonale.
   B) A^{100} è invertibile.
   C) la trasposta di A è ortogonale.
   D) $A \cdot B$ è ortogonale.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathcal{M}_3 \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni matrice il suo determinante è una trasformazione lineare.
   B) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore (x,y,z) in $(x+1,y+1,z+1)$ è un endomorfismo.
   C) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ($n > 0$) è una trasformazione lineare invertibile allora lo è anche T^{-1}.
   D) se S e T sono automorfismi sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ anche $S \circ T$ è un automorfismo sullo stesso spazio.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m,n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) se $\mathbf{S}$ ammette soluzione il rango di C e il rango di A sono uguali.
   B) ogni sottospazio vettoriale 4-dimensionale di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, da una (opportuna) equazione lineare in 5 incognite.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se $\det A \neq 0$.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la somma di due endomorfismi sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è un endomorfismo sullo stesso spazio.
   B) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore (x, y, z, t) in $(x, 2y, 3z, 4t)$ è una trasformazione lineare.
   C) non esistono isomorfismi fra $\mathbb{R}^9$ e $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   D) la funzione $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che porta ogni matrice $A = (a^i_j)$ nella somma di tutti i suoi termini a^i_j è una trasformazione lineare.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.
   B) l'insieme degli isomorfismi dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.
   C) l'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme dei numeri razionali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.

3) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se A è una matrice invertibile allora è diagonalizzabile per similitudine.
   B) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di S è minore o uguale alla somma delle loro molteplicità algebriche.
   C) se A e B sono simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   D) se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico sono simili.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(-1, 1, -1)$, $(2, 1, 2)$, $(2, -2, -1)$, $(-1, -2, 2)$ è 9.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0)$ e la retta di equazione $12x + 5y = 13$ è uguale a 1.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = 4t, z = 3$ e $x = 5 + t, y = t, z = 1$ è nullo.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1, -2, 3)$, $(4, -5, 6)$, $(7, -8, 9)$ sono allineati.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali di $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ che hanno traccia nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
   C) l'insieme delle matrici reali 5×5 che hanno traccia nulla è linearmente dipendente.
   D) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche con determinante uguale a 1. Allora
   A) $\det(A \cdot B \cdot C) = 1$.
   B) la matrice $A + B + C$ è invertibile.
   C) la matrice $A + B + C$ è simmetrica.
   D) la matrice $A \cdot B \cdot C$ è simmetrica.

7) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 1$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = -\langle\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle$.
   B) V ammette infinite basi ortogonali distinte.
   C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}\rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2$.
   D) se $(\mathbf{u}_1, \dots , \mathbf{u}_n)$ è una base ortogonale di V, si ha che $\langle\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j\rangle = 0$ per $i \neq j$.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora ammette la soluzione nulla.
   B) l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
   C) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ allora $\mathbf{S}$ ammette esattamente una soluzione.
   D) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti se e solo se A e C hanno lo stesso rango.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = 2t, y = 2t, z = 2t - 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n > 0)$ è una trasformazione lineare invertibile allora lo è anche T^{-1}.
   B) la funzione $F : \mathcal{M}_3 \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni matrice il suo determinante è una trasformazione lineare.
   C) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore (x, y, z) in $(x + 1, y + 1, z + 1)$ è un endomorfismo.
   D) se S e T sono automorfismi sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ anche $S \circ T$ è un automorfismo sullo stesso spazio.

2) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Allora
   A) **S** ammette soluzione se e solo se $\det A \neq 0$.
   B) se **S** ammette soluzione il rango di C e il rango di A sono uguali.
   C) ogni sottospazio vettoriale 4-dimensionale di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, da una (opportuna) equazione lineare in 5 incognite.
   D) se le equazioni di **S** sono linearmente dipendenti allora **S** non ammette soluzioni.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = 2t, y = 2t, z = 2t - 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0)$ e la retta di equazione $12x + 5y = 13$ è uguale a 1.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = 4t, z = 3$ e $x = 5 + t, y = t, z = 1$ è nullo.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1, -2, 3)$, $(4, -5, 6)$, $(7, -8, 9)$ sono allineati.
   D) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(-1, 1, -1)$, $(2, 1, 2)$, $(2, -2, -1)$, $(-1, -2, 2)$ è 9.

5) Sia T un automorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) se A è simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   B) A^{-1} è la matrice associata a T^{-1} rispetto a $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$.
   C) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   D) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T allora anche $(-\mathbf{u}_1, \dots, -\mathbf{u}_n)$ lo è.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 1$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) V ammette infinite basi ortogonali distinte.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2$.
   C) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base ortogonale di V, si ha che $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ per $i \neq j$.
   D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) ogni anello è anche un campo.
   B) nell'insieme dei numeri interi il numero 1 è l'unità rispetto all'usuale operazione di somma.
   C) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ $(n \geq 2)$ è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata y è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

8) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ ortogonali. Allora
   A) A^{100} è invertibile.
   B) la trasposta di A è ortogonale.
   C) $A \cdot B$ è ortogonale.
   D) $A + B$ è ortogonale.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante nullo è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(-1, 0, 0, 0), (0, -1, 0, 0), (0, 0, -1, 0), (0, 0, 0, -1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata t di grado minore o uguale a 7 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ costanti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche con determinante uguale a 1. Allora
   A) la matrice $A + B + C$ è simmetrica.
   B) la matrice $A + B + C$ è invertibile.
   C) la matrice $A \cdot B \cdot C$ è simmetrica.
   D) $\det(A \cdot B \cdot C) = 1$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme degli isomorfismi dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.
   C) l'insieme dei numeri razionali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
   D) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 5×5 che hanno traccia nulla è linearmente dipendente.
   B) l'insieme delle matrici reali di $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ che hanno traccia nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
   D) l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche T^{-1}.
   B) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è la base naturale di $\mathbb{R}^3$ allora $(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.
   C) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ se e solo se $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.
   D) $((0, 1), (1, 0))$ e $((1, 0), (0, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ allora $\mathbf{S}$ ammette esattamente una soluzione.
   B) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora ammette la soluzione nulla.
   C) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti se e solo se A e C hanno lo stesso rango.
   D) l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) non esistono isomorfismi fra $\mathbb{R}^9$ e $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   B) la somma di due endomorfismi sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è un endomorfismo sullo stesso spazio.
   C) la funzione $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che porta ogni matrice $A = (a^i_j)$ nella somma di tutti i suoi termini a^i_j è una trasformazione lineare.
   D) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore (x, y, z, t) in $(x, 2y, 3z, 4t)$ è una trasformazione lineare.

7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $-x + y = 1$ e $x + y = -1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $2x - 2y + 2z = 4$ è uguale a 2.
   B) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori linearmente indipendenti dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
   C) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0, -1)$, $(3, -2)$, $(1, -4)$, $(4, -5)$ è uguale a 8.
   D) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto $(x, y, 0)$ è una isometria.

9) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se A e B sono simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   B) se A è una matrice invertibile allora è diagonalizzabile per similitudine.
   C) se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico sono simili.
   D) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di S è minore o uguale alla somma delle loro molteplicità algebriche.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se $\det A \neq 0$.
   B) se $\mathbf{S}$ ammette soluzione il rango di C e il rango di A sono uguali.
   C) ogni sottospazio vettoriale 4-dimensionale di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, da una (opportuna) equazione lineare in 5 incognite.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.

2) Sia T un automorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) se A è simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   B) A^{-1} è la matrice associata a T^{-1} rispetto a $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$.
   C) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   D) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T allora anche $(-\mathbf{u}_1, \dots, -\mathbf{u}_n)$ lo è.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche T^{-1}.
   B) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ se e solo se $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.
   C) $((0,1),(1,0))$ e $((1,0),(0,1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.
   D) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è la base naturale di $\mathbb{R}^3$ allora $(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri razionali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
   B) l'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.
   D) l'insieme degli isomorfismi dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $-x + y = 1$ e $x + y = -1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0,0,0)$ e il piano di equazione cartesiana $2x-2y+2z=4$ è uguale a 2.
  B) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0,-1)$, $(3,-2)$, $(1,-4)$, $(4,-5)$ è uguale a 8.
  C) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x,y,z) nel punto $(x,y,0)$ è una isometria.
  D) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori linearmente indipendenti dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})$ è una base di $\mathbb{R}^3$.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n\times n$ simmetriche con determinante uguale a 1. Allora
  A) la matrice $A\cdot B\cdot C$ è simmetrica.
  B) la matrice $A+B+C$ è simmetrica.
  C) $\det(A\cdot B\cdot C)=1$.
  D) la matrice $A+B+C$ è invertibile.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
  A) l'insieme $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=y=z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
  B) l'insieme delle matrici reali 5×5 che hanno traccia nulla è linearmente dipendente.
  C) l'insieme delle funzioni $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tali che $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
  D) l'insieme delle matrici reali di $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ che hanno traccia nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
  A) se $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ $(n>0)$ è una trasformazione lineare invertibile allora lo è anche T^{-1}.
  B) la funzione $F:\mathcal{M}_3\to\mathbb{R}$ che associa ad ogni matrice il suo determinante è una trasformazione lineare.
  C) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore (x,y,z) in $(x+1,y+1,z+1)$ è un endomorfismo.
  D) se S e T sono automorfismi sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ anche $S\circ T$ è un automorfismo sullo stesso spazio.

24 luglio 2008 NOME: MATRICOLA: 11010

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ ortogonali. Allora
   A) $A + B$ è ortogonale.
   B) $A \cdot B$ è ortogonale.
   C) la trasposta di A è ortogonale.
   D) A^{100} è invertibile.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata y è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ $(n \geq 2)$ è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) nell'insieme dei numeri interi il numero 1 è l'unità rispetto all'usuale operazione di somma.
   D) ogni anello è anche un campo.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la somma di due endomorfismi sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è un endomorfismo sullo stesso spazio.
   B) non esistono isomorfismi fra $\mathbb{R}^9$ e $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   C) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore (x, y, z, t) in $(x, 2y, 3z, 4t)$ è una trasformazione lineare.
   D) la funzione $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che porta ogni matrice $A = (a^i_j)$ nella somma di tutti i suoi termini a^i_j è una trasformazione lineare.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ costanti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata t di grado minore o uguale a 7 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(-1, 0, 0, 0), (0, -1, 0, 0), (0, 0, -1, 0), (0, 0, 0, -1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante nullo è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = 2t, y = 2t, z = 2t - 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 1$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2$.
B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.
C) V ammette infinite basi ortogonali distinte.
D) se $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ è una base ortogonale di V, si ha che $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ per $i \neq j$.

7) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
A) se A è una matrice invertibile allora è diagonalizzabile per similitudine.
B) se A e B sono simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.
C) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di S è minore o uguale alla somma delle loro molteplicità algebriche.
D) se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico sono simili.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = 4t, z = 3$ e $x = 5 + t, y = t, z = 1$ è nullo.
B) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(-1, 1, -1)$, $(2, 1, 2)$, $(2, -2, -1)$, $(-1, -2, 2)$ è 9.
C) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0)$ e la retta di equazione $12x + 5y = 13$ è uguale a 1.
D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1, -2, 3)$, $(4, -5, 6)$, $(7, -8, 9)$ sono allineati.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
A) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora ammette la soluzione nulla.
B) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ allora $\mathbf{S}$ ammette esattamente una soluzione.
C) l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
D) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti se e solo se A e C hanno lo stesso rango.

24 luglio 2008 NOME: MATRICOLA: 11011

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 1$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.
   B) V ammette infinite basi ortogonali distinte.
   C) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base ortogonale di V, si ha che $\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle = 0$ per $i \neq j$.
   D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}+\mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore (x, y, z) in $(x+1, y+1, z+1)$ è un endomorfismo.
   B) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(n > 0)$ è una trasformazione lineare invertibile allora lo è anche T^{-1}.
   C) la funzione $F : \mathcal{M}_3 \to \mathbb{R}$ che associa ad ogni matrice il suo determinante è una trasformazione lineare.
   D) se S e T sono automorfismi sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ anche $S \circ T$ è un automorfismo sullo stesso spazio.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) ogni sottospazio vettoriale 4-dimensionale di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, da una (opportuna) equazione lineare in 5 incognite.
   B) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se $\det A \neq 0$.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette soluzione il rango di C e il rango di A sono uguali.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti allora $\mathbf{S}$ non ammette soluzioni.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(-1, 1, -1)$, $(2, 1, 2)$, $(2, -2, -1)$, $(-1, -2, 2)$ è 9.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(0, 0)$ e la retta di equazione $12x + 5y = 13$ è uguale a 1.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1, -2, 3)$, $(4, -5, 6)$, $(7, -8, 9)$ sono allineati.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 4t, y = 4t, z = 3$ e $x = 5 + t, y = t, z = 1$ è nullo.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 3×3 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto righe per colonne.
   B) l'insieme dei numeri razionali è un gruppo commutativo rispetto all'usuale operazione di somma.
   C) l'insieme degli isomorfismi dello spazio vettoriale standard 3-dimensionale è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.
   D) l'insieme dei numeri interi è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ simmetriche con determinante uguale a 1. Allora
   A) $\det(A \cdot B \cdot C) = 1$.
   B) la matrice $A \cdot B \cdot C$ è simmetrica.
   C) la matrice $A + B + C$ è invertibile.
   D) la matrice $A + B + C$ è simmetrica.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
   C) l'insieme delle matrici reali di $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ che hanno traccia nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
   D) l'insieme delle matrici reali 5×5 che hanno traccia nulla è linearmente dipendente.

8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = t, y = t, z = t$ e $x = 2t, y = 2t, z = 2t - 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

9) Sia T un automorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n.
   B) se A è simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   C) A^{-1} è la matrice associata a T^{-1} rispetto a $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$.
   D) se $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T allora anche $(-\mathbf{u}_1, \dots, -\mathbf{u}_n)$ lo è.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ il prodotto scalare dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è la base naturale di $\mathbb{R}^3$ allora $(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \wedge \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$.
   B) $((0,1),(1,0))$ e $((1,0),(0,1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.

   C) per ogni $\mathbf{u} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ se e solo se $\mathbf{u}$ è il vettore nullo.
   D) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche T^{-1}.

2) Siano A e B due matrici reali $n \times n$ ortogonali. Allora
   A) la trasposta di A è ortogonale.
   B) $A + B$ è ortogonale.
   C) $A \cdot B$ è ortogonale.
   D) A^{100} è invertibile.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(-1,0,0,0),(0,-1,0,0),(0,0,-1,0),(0,0,0,-1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ costanti è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata t di grado minore o uguale a 7 è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle matrici reali 4×4 con determinante nullo è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $-x + y = 1$ e $x + y = -1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro né ortogonali né paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo allora ammette la soluzione nulla.
   B) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti se e solo se A e C hanno lo stesso rango.
   C) l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.
   D) se A è quadrata e $\det A \neq 0$ allora $\mathbf{S}$ ammette esattamente una soluzione.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la somma di due endomorfismi sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ è un endomorfismo sullo stesso spazio.
   B) la funzione $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ che porta ogni matrice $A = (a^i_j)$ nella somma di tutti i suoi termini a^i_j è una trasformazione lineare.
   C) la funzione da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ che porta ogni vettore (x, y, z, t) in $(x, 2y, 3z, 4t)$ è una trasformazione lineare.
   D) non esistono isomorfismi fra $\mathbb{R}^9$ e $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

7) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se A è una matrice invertibile allora è diagonalizzabile per similitudine.
   B) se A e B hanno lo stesso polinomio caratteristico sono simili.
   C) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di S è minore o uguale alla somma delle loro molteplicità algebriche.
   D) se A e B sono simili allora hanno lo stesso polinomio caratteristico.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori linearmente indipendenti dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ è una base di $\mathbb{R}^3$.
   B) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto $(x, y, 0)$ è una isometria.
   C) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0, -1)$, $(3, -2)$, $(1, -4)$, $(4, -5)$ è uguale a 8.
   D) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $2x - 2y + 2z = 4$ è uguale a 2.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) nell'insieme dei numeri interi il numero 1 è l'unità rispetto all'usuale operazione di somma.
   B) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata y è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ $(n \geq 2)$ è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) ogni anello è anche un campo.