*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli $m$ ed $n$ denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi commutativi?
A) $(\mathbf{M}, +)(\mathbf{M} =$ insieme dei multipli interi di 7, $+ =$ usuale somma di numeri interi).
B) $(F, -)$ ($F =$ insieme di tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $- =$ usuale differenza di funzioni).
C) $(M_{4\times 5}(\mathbb{R}), +)$ ($M_{4\times 5}(\mathbb{R}) =$ insieme delle matrici reali $4 \times 5$, $+ =$ usuale somma di matrici).

D) $(\mathbf{Q}^+, +)$ ($\mathbf{Q}^+ =$ insieme dei numeri razionali strettamente maggiori di 0, $+ =$ usuale somma di numeri razionali).

2) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
A) $(M_{8\times 8}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ($M_{8\times 8}(\mathbb{R}) =$ insieme delle matrici reali $8\times 8$, $+ =$ usuale somma di matrici, $\cdot =$ usuale prodotto fra matrici).
B) ogni anello con unità.
C) $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$ ($\mathbb{Z}_{11} =$ insieme delle classi di resto modulo 11, $+ =$ usuale somma modulo 11, $\cdot$ $=$ usuale prodotto modulo 11).
D) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)(\mathbf{Q} =$ insieme dei numeri razionali, $+ =$ usuale somma di numeri razionali, $\cdot =$ usuale prodotto di numeri razionali).

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
A) in ogni anello $(A, +, \cdot)$ l'operazione $\cdot$ è associativa.
B) esistono gruppi che hanno lo stesso numero di elementi ma non sono isomorfi.
C) la funzione che porta ogni intero $x$ nel suo triplo $3x$ è un omomorfismo del gruppo degli interi in sé (rispetto all'usuale operazione di somma).
D) esistono gruppi $(G, +)$ dotati di elementi non invertibili rispetto all'operazione $+$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere per due permutazioni $p$ e $q$ su $n$ oggetti:
A) $\text{sign}(p \circ q^{-1}) = (\text{sign } p) \cdot (\text{sign } q)$.
B) $p \circ q = q \circ p$.
C) se $p$ ha un numero dispari di coppie in inversione allora ha segno negativo.
D) se $n$ è dispari allora il segno di $p$ e di $q$ è $-1$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
A) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che $(A + B)^3 = A^3 + 3 \cdot A^2 \cdot B + 3 \cdot A \cdot B^2 + B^3$.
B) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che ${}^t(A \cdot B) = {}^tA \cdot {}^tB$.
C) esistono matrici quadrate che coincidono sia con la propria inversa che con la propria trasposta.
D) se $A$ e $B$ sono due matrici reali invertibili $n \times n$ tali che $A \cdot B = B \cdot A$ allora vale anche $A^{-1} \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se una matrice $A$ è ortogonale allora anche la matrice $A \cdot {}^tA$ è ortogonale.
   B) ogni matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni di tipo $T_1$ e $T_2$.
   C) la matrice $A = (a^i_j) \in M_5(\mathbb{R})$ con $a^i_j = i \cdot j$ $(1 \leq i \leq 5,\ 1 \leq j \leq 5)$ ha determinante nullo.
   D) la somma di due matrici a determinante nullo ha determinante nullo.

7) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Sia $A^i_j$ il complemento algebrico di $a^i_j$ in $A$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $i \neq j$ allora $\sum_{r=1}^n a^i_r A^j_r = 0$.
   B) se $A$ è regolare allora anche $-2 \cdot A$ lo è.
   C) se $A$ è triangolare il suo determinante coincide col prodotto di tutti gli elementi $a^i_i$ con $1 \leq i \leq n$.
   D) se più di $n$ elementi $a^i_j$ sono nulli allora il determinante di $A$ è nullo.

8) Dire quali dei seguenti insiemi risultano spazi vettoriali sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano nell'intervallo $[0, 1]$.
   B) insieme delle successioni che hanno solo un numero finito di termini diversi da zero.
   C) insieme delle matrici reali $3 \times 3$ che coincidono con la propria trasposta.
   D) insieme delle matrici reali $4 \times 4$ che hanno determinante strettamente maggiore di 0.

9) Dire quali dei seguenti insiemi risultano sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 1\}$.
   B) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \cdot (x - y) = 0\}$.
   C) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z^4 = 0\}$.
   D) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \in \mathbb{Z}\}$ (dove $\mathbb{Z}$ denota l'insieme dei numeri interi).

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli $m$ ed $n$ denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $A$ è ortogonale allora anche $-A$ lo è.
   B) $\det A = \sum_{p \in S_n} a_1^{p(1)} \cdot a_2^{p(2)} \cdot \dots \cdot a_n^{p(n)}$, dove $S_n$ rappresenta l'insieme delle permutazioni su $n$ oggetti.
   C) se $A = -A$ allora $\det A = 0$.
   D) $\det(2 \cdot A) = 2^n \cdot \det A$.

2) Dire quali dei seguenti insiemi risultano sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 2z\}$.
   B) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \cdot y \cdot z = 1\}$.
   C) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (y - 3)^2 = x^2 + y^2 + z^2\}$.
   D) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \log(x^2 + 1) = 0\}$.

3) Dire quali dei seguenti insiemi risultano spazi vettoriali sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano su tutti i numeri interi.
   B) insieme dei polinomi di tipo $ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $b^2 - 4ac \le 0$.
   C) insieme delle matrici $5 \times 9$ a coefficienti tutti reali e maggiori o uguali a zero.
   D) insieme delle successioni reali che convergono a 2.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) tutte le permutazioni sullo stesso numero di oggetti hanno lo stesso segno.
   B) la composizione di un numero pari di permutazioni su $n$ oggetti è sempre pari.
   C) il numero delle permutazioni su $n$ oggetti è $n^n$.
   D) se $p$ è una permutazione su $n$ oggetti tale che $p^4$ coincide con $p^{-1}$ allora il segno di $p$ è 1.

5) Quali delle seguenti strutture algebriche sono anelli?
   A) $(S, \cup, \cap)$ ($S$ = insieme di tutti i sottoinsiemi dei numeri reali, $\cup$ = usuale unione di insiemi, $\cap$ = usuale intersezione di insiemi).
   B) $(M_5(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ($M_5(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici $5 \times 5$ a coefficienti reali, $+$ = usuale somma di matrici, $\cdot$ = usuale prodotto di matrici).
   C) $(C(\mathbb{R}), +, \cdot)(C(\mathbb{R})$ = insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $+$ = usuale somma di funzioni, $\cdot$ = usuale prodotto di funzioni).
   D) $(\mathbb{N}, +, \cdot)(\mathbb{N}$ = insieme dei numeri naturali, $+$ = usuale somma di numeri naturali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri naturali).

6) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
   A) $(\mathbb{R}^*, \cdot)(\mathbb{R}^* =$ insieme dei numeri reali non nulli, $\cdot =$ usuale prodotto fra numeri reali).
   B) $(GL_8(\mathbb{R}), \cdot)$ $(GL_8(\mathbb{R}) =$ insieme delle matrici reali $8 \times 8$ invertibili, $\cdot =$ usuale prodotto di matrici).
   C) $(S, +)$ $(S =$ insieme delle successioni reali non convergenti, $+ =$ usuale somma di successioni reali).
   D) $(O_7(\mathbb{R}), +)$ $(O_7(\mathbb{R}) =$ insieme delle matrici reali $7 \times 7$ ortogonali, $+ =$ usuale somma di matrici).

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$.
   B) una matrice quadrata $A$ è ortogonale se e solo se $A + {}^tA = I$.
   C) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che ${}^t(A - {}^tB) = {}^tA - B$.
   D) la somma di due matrici $n \times n$ invertibili è invertibile.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se due campi sono isomorfi ed uno dei due ha caratteristica 5 allora anche l'altro ha caratteristica 5.
   B) ogni anello commutativo è privo di divisori dello zero.
   C) esistono infiniti gruppi di cardinalità diverse fra loro.
   D) se due gruppi sono isomorfi ed il primo è commutativo allora anche il secondo lo è.

9) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Sia $A^i_j$ il complemento algebrico di $a^i_j$ in $A$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $\det A^2 = (\det A)^2$.
   B) $A$ è invertibile se e solo se $\det A > 0$.
   C) se tutti gli elementi di $A$ sono numeri interi pari allora $\det A$ è un numero intero pari.
   D) per ogni indice $s$ con $1 \leq s \leq n$ si ha che $\det A = \sum_{k=1}^n a^k_s A^k_s$.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli $m$ ed $n$ denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
   A) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$($\mathbf{Q}$ = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri razionali).
   B) $(M_{8\times 8}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ($M_{8\times 8}(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici reali $8\times 8$, $+$ = usuale somma di matrici, $\cdot$ = usuale prodotto fra matrici).
   C) ogni anello con unità.
   D) $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$ ($\mathbb{Z}_{11}$ = insieme delle classi di resto modulo 11, $+$ = usuale somma modulo 11, $\cdot$ = usuale prodotto modulo 11).

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $A$ e $B$ sono due matrici reali invertibili $n \times n$ tali che $A \cdot B = B \cdot A$ allora vale anche $A^{-1} \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
   B) esistono matrici quadrate che coincidono sia con la propria inversa che con la propria trasposta.
   C) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che ${}^t(A \cdot B) = {}^tA \cdot {}^tB$.
   D) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che $(A+B)^3 = A^3 + 3 \cdot A^2 \cdot B + 3 \cdot A \cdot B^2 + B^3$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) la somma di due matrici a determinante nullo ha determinante nullo.
   B) la matrice $A = (a^i_j) \in M_5(\mathbb{R})$ con $a^i_j = i \cdot j$ $(1 \leq i \leq 5,\ 1 \leq j \leq 5)$ ha determinante nullo.
   C) ogni matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni di tipo $T_1$ e $T_2$.
   D) se una matrice $A$ è ortogonale allora anche la matrice $A \cdot {}^tA$ è ortogonale.

4) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Sia $A^i_j$ il complemento algebrico di $a^i_j$ in $A$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) per ogni indice $s$ con $1 \leq s \leq n$ si ha che $\det A = \sum_{k=1}^n a^k_s A^k_s$.
   B) se tutti gli elementi di $A$ sono numeri interi pari allora $\det A$ è un numero intero pari.
   C) $\det A^2 = (\det A)^2$.
   D) $A$ è invertibile se e solo se $\det A > 0$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi $(G, +)$ dotati di elementi non invertibili rispetto all'operazione $+$.
   B) in ogni anello $(A, +, \cdot)$ l'operazione $\cdot$ è associativa.
   C) esistono gruppi che hanno lo stesso numero di elementi ma non sono isomorfi.
   D) la funzione che porta ogni intero $x$ nel suo triplo $3x$ è un omomorfismo del gruppo degli interi in sé (rispetto all'usuale operazione di somma).

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere per due permutazioni $p$ e $q$ su $n$ oggetti:
   A) se $n$ è dispari allora il segno di $p$ e di $q$ è $-1$.
   B) se $p$ ha un numero dispari di coppie in inversione allora ha segno negativo.
   C) $p \circ q = q \circ p$.
   D) $\text{sign}(p \circ q^{-1}) = (\text{sign } p) \cdot (\text{sign } q)$.

7) Dire quali dei seguenti insiemi risultano spazi vettoriali sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) insieme delle successioni reali che convergono a 2.
   B) insieme delle matrici $5 \times 9$ a coefficienti tutti reali e maggiori o uguali a zero.
   C) insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano su tutti i numeri interi.
   D) insieme dei polinomi di tipo $ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $b^2 - 4ac \leq 0$.

8) Dire quali dei seguenti insiemi risultano sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \log(x^2 + 1) = 0\}$.
   B) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (y - 3)^2 = x^2 + y^2 + z^2\}$.
   C) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 2z\}$.
   D) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \cdot y \cdot z = 1\}$.

9) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi commutativi?
   A) $(\mathbf{Q}^+, +)$ ($\mathbf{Q}^+$ = insieme dei numeri razionali strettamente maggiori di 0, $+$ = usuale somma di numeri razionali).
   B) $(\mathbf{M}, +)$($\mathbf{M}$ = insieme dei multipli interi di 7, $+$ = usuale somma di numeri interi).
   C) $(F, -)$ ($F$ = insieme di tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $-$ = usuale differenza di funzioni).
   D) $(M_{4\times5}(\mathbb{R}), +)$ ($M_{4\times5}(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici reali $4 \times 5$, $+$ = usuale somma di matrici).

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli $m$ ed $n$ denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Dire quali dei seguenti insiemi risultano sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \cdot (x - y) = 0\}$.
   B) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z^4 = 0\}$.
   C) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \in \mathbb{Z}\}$ (dove $\mathbb{Z}$ denota l'insieme dei numeri interi).
   D) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 1\}$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) la somma di due matrici $n \times n$ invertibili è invertibile.
   B) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che ${}^t(A - {}^tB) = {}^tA - B$.
   C) una matrice quadrata $A$ è ortogonale se e solo se $A + {}^tA = I$.
   D) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$.

3) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
   A) $(O_7(\mathbb{R}), +)$ ($O_7(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici reali $7 \times 7$ ortogonali, $+$ = usuale somma di matrici).
   B) $(GL_8(\mathbb{R}), \cdot)$ ($GL_8(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici reali $8 \times 8$ invertibili, $\cdot$ = usuale prodotto di matrici).
   C) $(\mathbb{R}^*, \cdot)$($\mathbb{R}^*$ = insieme dei numeri reali non nulli, $\cdot$ = usuale prodotto fra numeri reali).
   D) $(S, +)$ ($S$ = insieme delle successioni reali non convergenti, $+$ = usuale somma di successioni reali).

4) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $\det(2 \cdot A) = 2^n \cdot \det A$.
   B) se $A = -A$ allora $\det A = 0$.
   C) $\det A = \sum_{p \in S_n} a_1^{p(1)} \cdot a_2^{p(2)} \cdot \dots \cdot a_n^{p(n)}$, dove $S_n$ rappresenta l'insieme delle permutazioni su $n$ oggetti.
   D) se $A$ è ortogonale allora anche $-A$ lo è.

5) Dire quali dei seguenti insiemi risultano spazi vettoriali sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) insieme delle successioni che hanno solo un numero finito di termini diversi da zero.
   B) insieme delle matrici reali $3 \times 3$ che coincidono con la propria trasposta.
   C) insieme delle matrici reali $4 \times 4$ che hanno determinante strettamente maggiore di 0.
   D) insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano nell'intervallo $[0, 1]$.

6) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Sia $A^i_j$ il complemento algebrico di $a^i_j$ in $A$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $A$ è regolare allora anche $-2 \cdot A$ lo è.
   B) se $A$ è triangolare il suo determinante coincide col prodotto di tutti gli elementi $a^i_i$ con $1 \leq i \leq n$.
   C) se più di $n$ elementi $a^i_j$ sono nulli allora il determinante di $A$ è nullo.
   D) se $i \neq j$ allora $\sum_{r=1}^n a^i_r A^j_r = 0$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se due gruppi sono isomorfi ed il primo è commutativo allora anche il secondo lo è.
   B) ogni anello commutativo è privo di divisori dello zero.
   C) se due campi sono isomorfi ed uno dei due ha caratteristica 5 allora anche l'altro ha caratteristica 5.
   D) esistono infiniti gruppi di cardinalità diverse fra loro.

8) Quali delle seguenti strutture algebriche sono anelli?
   A) $(I\!N, +, \cdot)(I\!N =$ insieme dei numeri naturali, $+ =$ usuale somma di numeri naturali, $\cdot =$ usuale prodotto di numeri naturali).
   B) $(M_5(I\!R), +, \cdot)$ $(M_5(I\!R) =$ insieme delle matrici $5 \times 5$ a coefficienti reali, $+ =$ usuale somma di matrici, $\cdot =$ usuale prodotto di matrici).
   C) $(S, \cup, \cap)$ $(S =$ insieme di tutti i sottoinsiemi dei numeri reali, $\cup =$ usuale unione di insiemi, $\cap =$ usuale intersezione di insiemi).
   D) $(C(I\!R), +, \cdot)(C(I\!R) =$ insieme delle funzioni continue da $I\!R$ in $I\!R$, $+ =$ usuale somma di funzioni, $\cdot =$ usuale prodotto di funzioni).

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $p$ è una permutazione su $n$ oggetti tale che $p^4$ coincide con $p^{-1}$ allora il segno di $p$ è 1.
   B) il numero delle permutazioni su $n$ oggetti è $n^n$.
   C) la composizione di un numero pari di permutazioni su $n$ oggetti è sempre pari.
   D) tutte le permutazioni sullo stesso numero di oggetti hanno lo stesso segno.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli $m$ ed $n$ denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Quali delle seguenti strutture algebriche sono anelli?
   A) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$($\mathbb{N}$ = insieme dei numeri naturali, $+$ = usuale somma di numeri naturali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri naturali).
   B) $(S, \cup, \cap)$ ($S$ = insieme di tutti i sottoinsiemi dei numeri reali, $\cup$ = usuale unione di insiemi, $\cap$ = usuale intersezione di insiemi).
   C) $(M_5(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ($M_5(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici $5 \times 5$ a coefficienti reali, $+$ = usuale somma di matrici, $\cdot$ = usuale prodotto di matrici).
   D) $(C(\mathbb{R}), +, \cdot)$($C(\mathbb{R})$ = insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $+$ = usuale somma di funzioni, $\cdot$ = usuale prodotto di funzioni).

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se due gruppi sono isomorfi ed il primo è commutativo allora anche il secondo lo è.
   B) se due campi sono isomorfi ed uno dei due ha caratteristica 5 allora anche l'altro ha caratteristica 5.
   C) ogni anello commutativo è privo di divisori dello zero.
   D) esistono infiniti gruppi di cardinalità diverse fra loro.

3) Dire quali dei seguenti insiemi risultano spazi vettoriali sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) insieme delle successioni che hanno solo un numero finito di termini diversi da zero.
   B) insieme delle matrici reali $4 \times 4$ che hanno determinante strettamente maggiore di 0.
   C) insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano nell'intervallo $[0, 1]$.
   D) insieme delle matrici reali $3 \times 3$ che coincidono con la propria trasposta.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere per due permutazioni $p$ e $q$ su $n$ oggetti:
   A) $p \circ q = q \circ p$.
   B) $\text{sign}(p \circ q^{-1}) = (\text{sign } p) \cdot (\text{sign } q)$.
   C) se $n$ è dispari allora il segno di $p$ e di $q$ è $-1$.
   D) se $p$ ha un numero dispari di coppie in inversione allora ha segno negativo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che ${}^t(A \cdot B) = {}^tA \cdot {}^tB$.
   B) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che $(A + B)^3 = A^3 + 3 \cdot A^2 \cdot B + 3 \cdot A \cdot B^2 + B^3$.
   C) se $A$ e $B$ sono due matrici reali invertibili $n \times n$ tali che $A \cdot B = B \cdot A$ allora vale anche $A^{-1} \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
   D) esistono matrici quadrate che coincidono sia con la propria inversa che con la propria trasposta.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) ogni matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni di tipo $T_1$ e $T_2$.
   B) se una matrice $A$ è ortogonale allora anche la matrice $A \cdot {}^tA$ è ortogonale.
   C) la somma di due matrici a determinante nullo ha determinante nullo.
   D) la matrice $A = (a^i_j) \in M_5(\mathbb{R})$ con $a^i_j = i \cdot j$ $(1 \leq i \leq 5,\ 1 \leq j \leq 5)$ ha determinante nullo.

7) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Sia $A^i_j$ il complemento algebrico di $a^i_j$ in $A$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $A$ è regolare allora anche $-2 \cdot A$ lo è.
   B) se più di $n$ elementi $a^i_j$ sono nulli allora il determinante di $A$ è nullo.
   C) se $i \neq j$ allora $\sum_{r=1}^{n} a^i_r A^j_r = 0$.
   D) se $A$ è triangolare il suo determinante coincide col prodotto di tutti gli elementi $a^i_i$ con $1 \leq i \leq n$.

8) Dire quali dei seguenti insiemi risultano sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \cdot (x - y) = 0\}$.
   B) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \in \mathbb{Z}\}$ (dove $\mathbb{Z}$ denota l'insieme dei numeri interi).
   C) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 1\}$.
   D) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z^4 = 0\}$.

9) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
   A) $(O_7(\mathbb{R}), +)$ ($O_7(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici reali $7 \times 7$ ortogonali, $+$ = usuale somma di matrici).
   B) $(\mathbb{R}^*, \cdot)$($\mathbb{R}^*$ = insieme dei numeri reali non nulli, $\cdot$ = usuale prodotto fra numeri reali).
   C) $(GL_8(\mathbb{R}), \cdot)$ ($GL_8(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici reali $8 \times 8$ invertibili, $\cdot$ = usuale prodotto di matrici).
   D) $(S, +)$ ($S$ = insieme delle successioni reali non convergenti, $+$ = usuale somma di successioni reali).

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli $m$ ed $n$ denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Sia $A^i_j$ il complemento algebrico di $a^i_j$ in $A$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se tutti gli elementi di $A$ sono numeri interi pari allora $\det A$ è un numero intero pari.
   B) per ogni indice $s$ con $1 \leq s \leq n$ si ha che $\det A = \sum_{k=1}^{n} a^k_s A^k_s$.
   C) $A$ è invertibile se e solo se $\det A > 0$.
   D) $\det A^2 = (\det A)^2$.

2) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $\det A = \sum_{p \in S_n} a_1^{p(1)} \cdot a_2^{p(2)} \cdot \cdots \cdot a_n^{p(n)}$, dove $S_n$ rappresenta l'insieme delle permutazioni su $n$ oggetti.
   B) se $A$ è ortogonale allora anche $-A$ lo è.
   C) se $A = -A$ allora $\det A = 0$.
   D) $\det(2 \cdot A) = 2^n \cdot \det A$.

3) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
   A) ogni anello con unità.
   B) $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$ ($\mathbb{Z}_{11}$ = insieme delle classi di resto modulo 11, $+$ = usuale somma modulo 11, $\cdot$ = usuale prodotto modulo 11).
   C) $(M_{8\times 8}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ($M_{8\times 8}(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici reali $8 \times 8$, $+$ = usuale somma di matrici, $\cdot$ = usuale prodotto fra matrici).
   D) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$($\mathbf{Q}$ = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri razionali).

4) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi commutativi?
   A) $(F, -)$ ($F$ = insieme di tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $-$ = usuale differenza di funzioni).
   B) $(M_{4\times 5}(\mathbb{R}), +)$ ($M_{4\times 5}(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici reali $4 \times 5$, $+$ = usuale somma di matrici).
   C) $(\mathbf{M}, +)$($\mathbf{M}$ = insieme dei multipli interi di 7, $+$ = usuale somma di numeri interi).
   D) $(\mathbf{Q}^+, +)$ ($\mathbf{Q}^+$ = insieme dei numeri razionali strettamente maggiori di 0, $+$ = usuale somma di numeri razionali).

5) Dire quali dei seguenti insiemi risultano spazi vettoriali sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) insieme delle matrici $5 \times 9$ a coefficienti tutti reali e maggiori o uguali a zero.
   B) insieme delle successioni reali che convergono a 2.
   C) insieme dei polinomi di tipo $ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $b^2 - 4ac \leq 0$.
   D) insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano su tutti i numeri interi.

6) Dire quali dei seguenti insiemi risultano sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $I\!R^3$ sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) $\{(x, y, z) \in I\!R^3 | (x-1)^2 + (y-2)^2 + (y-3)^2 = x^2 + y^2 + z^2\}$.
   B) $\{(x, y, z) \in I\!R^3 | \log(x^2 + 1) = 0\}$.
   C) $\{(x, y, z) \in I\!R^3 | x \cdot y \cdot z = 1\}$.
   D) $\{(x, y, z) \in I\!R^3 | x = 2z\}$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) la composizione di un numero pari di permutazioni su $n$ oggetti è sempre pari.
   B) tutte le permutazioni sullo stesso numero di oggetti hanno lo stesso segno.
   C) il numero delle permutazioni su $n$ oggetti è $n^n$.
   D) se $p$ è una permutazione su $n$ oggetti tale che $p^4$ coincide con $p^{-1}$ allora il segno di $p$ è 1.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi che hanno lo stesso numero di elementi ma non sono isomorfi.
   B) la funzione che porta ogni intero $x$ nel suo triplo $3x$ è un omomorfismo del gruppo degli interi in sé (rispetto all'usuale operazione di somma).
   C) in ogni anello $(A, +, \cdot)$ l'operazione $\cdot$ è associativa.
   D) esistono gruppi $(G, +)$ dotati di elementi non invertibili rispetto all'operazione $+$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) una matrice quadrata $A$ è ortogonale se e solo se $A + {}^tA = I$.
   B) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$.
   C) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che ${}^t(A - {}^tB) = {}^tA - B$.
   D) la somma di due matrici $n \times n$ invertibili è invertibile.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli $m$ ed $n$ denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Quali delle seguenti strutture algebriche sono anelli?
   A) $(M_5(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ($M_5(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici $5 \times 5$ a coefficienti reali, $+$ = usuale somma di matrici, $\cdot$ = usuale prodotto di matrici).
   B) $(C(\mathbb{R}), +, \cdot)$($C(\mathbb{R})$ = insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $+$ = usuale somma di funzioni, $\cdot$ = usuale prodotto di funzioni).
   C) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$($\mathbb{N}$ = insieme dei numeri naturali, $+$ = usuale somma di numeri naturali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri naturali).
   D) $(S, \cup, \cap)$ ($S$ = insieme di tutti i sottoinsiemi dei numeri reali, $\cup$ = usuale unione di insiemi, $\cap$ = usuale intersezione di insiemi).

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) ogni anello commutativo è privo di divisori dello zero.
   B) esistono infiniti gruppi di cardinalità diverse fra loro.
   C) se due gruppi sono isomorfi ed il primo è commutativo allora anche il secondo lo è.
   D) se due campi sono isomorfi ed uno dei due ha caratteristica 5 allora anche l'altro ha caratteristica 5.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere per due permutazioni $p$ e $q$ su $n$ oggetti:
   A) $p \circ q = q \circ p$.
   B) se $p$ ha un numero dispari di coppie in inversione allora ha segno negativo.
   C) $\mathrm{sign}(p \circ q^{-1}) = (\mathrm{sign}\ p) \cdot (\mathrm{sign}\ q)$.
   D) se $n$ è dispari allora il segno di $p$ e di $q$ è $-1$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che ${}^t(A \cdot B) = {}^tA \cdot {}^tB$.
   B) esistono matrici quadrate che coincidono sia con la propria inversa che con la propria trasposta.
   C) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che $(A + B)^3 = A^3 + 3 \cdot A^2 \cdot B + 3 \cdot A \cdot B^2 + B^3$.
   D) se $A$ e $B$ sono due matrici reali invertibili $n \times n$ tali che $A \cdot B = B \cdot A$ allora vale anche $A^{-1} \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

5) Dire quali dei seguenti insiemi risultano sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \log(x^2 + 1) = 0\}$.
   B) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 2z\}$.
   C) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \cdot y \cdot z = 1\}$.
   D) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (y - 3)^2 = x^2 + y^2 + z^2\}$.

6) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
   A) $(GL_8(\mathbb{R}), \cdot)$ ($GL_8(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici reali $8 \times 8$ invertibili, $\cdot$ = usuale prodotto di matrici).
   B) $(S, +)$ ($S$ = insieme delle successioni reali non convergenti, $+$ = usuale somma di successioni reali).
   C) $(O_7(\mathbb{R}), +)$ ($O_7(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici reali $7 \times 7$ ortogonali, $+$ = usuale somma di matrici).
   D) $(\mathbb{R}^*, \cdot)$($\mathbb{R}^*$ = insieme dei numeri reali non nulli, $\cdot$ = usuale prodotto fra numeri reali).

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) ogni matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni di tipo $T_1$ e $T_2$.
   B) la matrice $A = (a^i_j) \in M_5(\mathbb{R})$ con $a^i_j = i \cdot j$ $(1 \leq i \leq 5,\ 1 \leq j \leq 5)$ ha determinante nullo.
   C) se una matrice $A$ è ortogonale allora anche la matrice $A \cdot {}^tA$ è ortogonale.
   D) la somma di due matrici a determinante nullo ha determinante nullo.

8) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Sia $A^i_j$ il complemento algebrico di $a^i_j$ in $A$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) per ogni indice $s$ con $1 \leq s \leq n$ si ha che $\det A = \sum_{k=1}^n a^k_s A^k_s$.
   B) $\det A^2 = (\det A)^2$.
   C) $A$ è invertibile se e solo se $\det A > 0$.
   D) se tutti gli elementi di $A$ sono numeri interi pari allora $\det A$ è un numero intero pari.

9) Dire quali dei seguenti insiemi risultano spazi vettoriali sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) insieme delle successioni reali che convergono a 2.
   B) insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano su tutti i numeri interi.
   C) insieme dei polinomi di tipo $ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $b^2 - 4ac \leq 0$.
   D) insieme delle matrici $5 \times 9$ a coefficienti tutti reali e maggiori o uguali a zero.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli $m$ ed $n$ denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che $(A+B)\cdot(A-B) = A^2 - B^2$.
   B) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che ${}^t(A - {}^tB) = {}^tA - B$.
   C) la somma di due matrici $n \times n$ invertibili è invertibile.
   D) una matrice quadrata $A$ è ortogonale se e solo se $A + {}^tA = I$.

2) Dire quali dei seguenti insiemi risultano spazi vettoriali sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) insieme delle matrici reali $3 \times 3$ che coincidono con la propria trasposta.
   B) insieme delle successioni che hanno solo un numero finito di termini diversi da zero.
   C) insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano nell'intervallo $[0,1]$.
   D) insieme delle matrici reali $4 \times 4$ che hanno determinante strettamente maggiore di 0.

3) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi commutativi?
   A) $(\mathbf{M},+)(\mathbf{M} =$ insieme dei multipli interi di 7, $+ =$ usuale somma di numeri interi).
   B) $(F,-)$ ($F =$ insieme di tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $- =$ usuale differenza di funzioni).
   C) $(\mathbf{Q}^+,+)$ ($\mathbf{Q}^+ =$ insieme dei numeri razionali strettamente maggiori di 0, $+ =$ usuale somma di numeri razionali).
   D) $(M_{4\times5}(\mathbb{R}),+)$ ($M_{4\times5}(\mathbb{R}) =$ insieme delle matrici reali $4\times5$, $+ =$ usuale somma di matrici).

4) Dire quali dei seguenti insiemi risultano sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z^4 = 0\}$.
   B) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x \cdot (x-y) = 0\}$.
   C) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = 1\}$.
   D) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x \in \mathbb{Z}\}$ (dove $\mathbb{Z}$ denota l'insieme dei numeri interi).

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) in ogni anello $(A,+,\cdot)$ l'operazione $\cdot$ è associativa.
   B) esistono gruppi che hanno lo stesso numero di elementi ma non sono isomorfi.
   C) esistono gruppi $(G,+)$ dotati di elementi non invertibili rispetto all'operazione $+$.
   D) la funzione che porta ogni intero $x$ nel suo triplo $3x$ è un omomorfismo del gruppo degli interi in sé (rispetto all'usuale operazione di somma).

6) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?

A) $(M_{8\times 8}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ($M_{8\times 8}(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici reali $8\times 8$, $+$ = usuale somma di matrici, $\cdot$ = usuale prodotto fra matrici).

B) ogni anello con unità.

C) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$($\mathbf{Q}$ = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri razionali).

D) $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$ ($\mathbb{Z}_{11}$ = insieme delle classi di resto modulo 11, $+$ = usuale somma modulo 11, $\cdot$ = usuale prodotto modulo 11).

7) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) se $A$ è ortogonale allora anche $-A$ lo è.

B) se $A = -A$ allora $\det A = 0$.

C) $\det(2 \cdot A) = 2^n \cdot \det A$.

D) $\det A = \sum_{p\in S_n} a_1^{p(1)} \cdot a_2^{p(2)} \cdot \dots \cdot a_n^{p(n)}$, dove $S_n$ rappresenta l'insieme delle permutazioni su $n$ oggetti.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) tutte le permutazioni sullo stesso numero di oggetti hanno lo stesso segno.

B) il numero delle permutazioni su $n$ oggetti è $n^n$.

C) se $p$ è una permutazione su $n$ oggetti tale che $p^4$ coincide con $p^{-1}$ allora il segno di $p$ è 1.

D) la composizione di un numero pari di permutazioni su $n$ oggetti è sempre pari.

9) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Sia $A^i_j$ il complemento algebrico di $a^i_j$ in $A$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) se $A$ è triangolare il suo determinante coincide col prodotto di tutti gli elementi $a^i_i$ con $1 \le i \le n$.

B) se $A$ è regolare allora anche $-2 \cdot A$ lo è.

C) se $i \neq j$ allora $\sum_{r=1}^n a^i_r A^j_r = 0$.

D) se più di $n$ elementi $a^i_j$ sono nulli allora il determinante di $A$ è nullo.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli $m$ ed $n$ denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi che hanno lo stesso numero di elementi ma non sono isomorfi.
   B) esistono gruppi $(G, +)$ dotati di elementi non invertibili rispetto all'operazione $+$.
   C) la funzione che porta ogni intero $x$ nel suo triplo $3x$ è un omomorfismo del gruppo degli interi in sé (rispetto all'usuale operazione di somma).
   D) in ogni anello $(A, +, \cdot)$ l'operazione $\cdot$ è associativa.

2) Dire quali dei seguenti insiemi risultano spazi vettoriali sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) insieme delle successioni che hanno solo un numero finito di termini diversi da zero.
   B) insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano nell'intervallo $[0, 1]$.
   C) insieme delle matrici reali $3 \times 3$ che coincidono con la propria trasposta.
   D) insieme delle matrici reali $4 \times 4$ che hanno determinante strettamente maggiore di 0.

3) Dire quali dei seguenti insiemi risultano sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \cdot (x - y) = 0\}$.
   B) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 1\}$.
   C) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z^4 = 0\}$.
   D) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \in \mathbb{Z}\}$ (dove $\mathbb{Z}$ denota l'insieme dei numeri interi).

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere per due permutazioni $p$ e $q$ su $n$ oggetti:
   A) se $n$ è dispari allora il segno di $p$ e di $q$ è $-1$.
   B) se $p$ ha un numero dispari di coppie in inversione allora ha segno negativo.
   C) $\text{sign}(p \circ q^{-1}) = (\text{sign } p) \cdot (\text{sign } q)$.
   D) $p \circ q = q \circ p$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $A$ e $B$ sono due matrici reali invertibili $n \times n$ tali che $A \cdot B = B \cdot A$ allora vale anche $A^{-1} \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
   B) esistono matrici quadrate che coincidono sia con la propria inversa che con la propria trasposta.
   C) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che $(A + B)^3 = A^3 + 3 \cdot A^2 \cdot B + 3 \cdot A \cdot B^2 + B^3$.
   D) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che ${}^t(A \cdot B) = {}^tA \cdot {}^tB$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) la somma di due matrici a determinante nullo ha determinante nullo.
   B) la matrice $A = (a^i_j) \in M_5(I\!R)$ con $a^i_j = i \cdot j$ $(1 \leq i \leq 5,\ 1 \leq j \leq 5)$ ha determinante nullo.
   C) se una matrice $A$ è ortogonale allora anche la matrice $A \cdot {}^tA$ è ortogonale.
   D) ogni matrice $A \in M_{m\times n}(I\!R)$ è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni di tipo $T_1$ e $T_2$.

7) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Sia $A^i_j$ il complemento algebrico di $a^i_j$ in $A$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $A$ è regolare allora anche $-2 \cdot A$ lo è.
   B) se $i \neq j$ allora $\sum_{r=1}^n a^i_r A^j_r = 0$.
   C) se $A$ è triangolare il suo determinante coincide col prodotto di tutti gli elementi $a^i_i$ con $1 \leq i \leq n$.
   D) se più di $n$ elementi $a^i_j$ sono nulli allora il determinante di $A$ è nullo.

8) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi commutativi?
   A) $(F, -)$ ($F$ = insieme di tutte le funzioni da $I\!R$ in $I\!R$, $-$ = usuale differenza di funzioni).
   B) $(\mathbf{Q}^+, +)$ ($\mathbf{Q}^+$ = insieme dei numeri razionali strettamente maggiori di 0, $+$ = usuale somma di numeri razionali).
   C) $(M_{4\times 5}(I\!R), +)$ ($M_{4\times 5}(I\!R)$ = insieme delle matrici reali $4 \times 5$, $+$ = usuale somma di matrici).
   D) $(\mathbf{M}, +)$($\mathbf{M}$ = insieme dei multipli interi di 7, $+$ = usuale somma di numeri interi).

9) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
   A) ogni anello con unità.
   B) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$($\mathbf{Q}$ = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri razionali).
   C) $(Z\!\!\!Z_{11}, +, \cdot)$ ($Z\!\!\!Z_{11}$ = insieme delle classi di resto modulo 11, $+$ = usuale somma modulo 11, $\cdot$ = usuale prodotto modulo 11).
   D) $(M_{8\times 8}(I\!R), +, \cdot)$ ($M_{8\times 8}(I\!R)$ = insieme delle matrici reali $8 \times 8$, $+$ = usuale somma di matrici, $\cdot$ = usuale prodotto fra matrici).

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli $m$ ed $n$ denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Dire quali dei seguenti insiemi risultano spazi vettoriali sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) insieme delle matrici $5 \times 9$ a coefficienti tutti reali e maggiori o uguali a zero.
   B) insieme dei polinomi di tipo $ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in I\!R$ e $b^2 - 4ac \leq 0$.
   C) insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ che si annullano su tutti i numeri interi.
   D) insieme delle successioni reali che convergono a 2.

2) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Sia $A^i_j$ il complemento algebrico di $a^i_j$ in $A$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se tutti gli elementi di $A$ sono numeri interi pari allora $\det A$ è un numero intero pari.
   B) $A$ è invertibile se e solo se $\det A > 0$.
   C) $\det A^2 = (\det A)^2$.
   D) per ogni indice $s$ con $1 \leq s \leq n$ si ha che $\det A = \sum_{k=1}^{n} a^k_s A^k_s$.

3) Quali delle seguenti strutture algebriche sono anelli?
   A) $(C(I\!R), +, \cdot)(C(I\!R)$ = insieme delle funzioni continue da $I\!R$ in $I\!R$, $+$ = usuale somma di funzioni, $\cdot$ = usuale prodotto di funzioni).
   B) $(S, \cup, \cap)$ ($S$ = insieme di tutti i sottoinsiemi dei numeri reali, $\cup$ = usuale unione di insiemi, $\cap$ = usuale intersezione di insiemi).
   C) $(M_5(I\!R), +, \cdot)$ ($M_5(I\!R)$ = insieme delle matrici $5 \times 5$ a coefficienti reali, $+$ = usuale somma di matrici, $\cdot$ = usuale prodotto di matrici).
   D) $(I\!N, +, \cdot)(I\!N$ = insieme dei numeri naturali, $+$ = usuale somma di numeri naturali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri naturali).

4) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
   A) $(S, +)$ ($S$ = insieme delle successioni reali non convergenti, $+$ = usuale somma di successioni reali).
   B) $(I\!R^*, \cdot)(I\!R^*$ = insieme dei numeri reali non nulli, $\cdot$ = usuale prodotto fra numeri reali).
   C) $(GL_8(I\!R), \cdot)$ ($GL_8(I\!R)$ = insieme delle matrici reali $8 \times 8$ invertibili, $\cdot$ = usuale prodotto di matrici).
   D) $(O_7(I\!R), +)$ ($O_7(I\!R)$ = insieme delle matrici reali $7 \times 7$ ortogonali, $+$ = usuale somma di matrici).

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono infiniti gruppi di cardinalità diverse fra loro.
   B) se due campi sono isomorfi ed uno dei due ha caratteristica 5 allora anche l'altro ha caratteristica 5.
   C) ogni anello commutativo è privo di divisori dello zero.
   D) se due gruppi sono isomorfi ed il primo è commutativo allora anche il secondo lo è.

6) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $\det A = \sum_{p \in S_n} a_1^{p(1)} \cdot a_2^{p(2)} \cdot \dots \cdot a_n^{p(n)}$, dove $S_n$ rappresenta l'insieme delle permutazioni su $n$ oggetti.
   B) se $A$ è ortogonale allora anche $-A$ lo è.
   C) se $A = -A$ allora $\det A = 0$.
   D) $\det(2 \cdot A) = 2^n \cdot \det A$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) una matrice quadrata $A$ è ortogonale se e solo se $A + {}^tA = I$.
   B) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$.
   C) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che ${}^t(A - {}^tB) = {}^tA - B$.
   D) la somma di due matrici $n \times n$ invertibili è invertibile.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) la composizione di un numero pari di permutazioni su $n$ oggetti è sempre pari.
   B) tutte le permutazioni sullo stesso numero di oggetti hanno lo stesso segno.
   C) il numero delle permutazioni su $n$ oggetti è $n^n$.
   D) se $p$ è una permutazione su $n$ oggetti tale che $p^4$ coincide con $p^{-1}$ allora il segno di $p$ è 1.

9) Dire quali dei seguenti insiemi risultano sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $I\!R^3$ sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) $\{(x, y, z) \in I\!R^3 | (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (y - 3)^2 = x^2 + y^2 + z^2\}$.
   B) $\{(x, y, z) \in I\!R^3 | x \cdot y \cdot z = 1\}$.
   C) $\{(x, y, z) \in I\!R^3 | x = 2z\}$.
   D) $\{(x, y, z) \in I\!R^3 | \log(x^2 + 1) = 0\}$.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli $m$ ed $n$ denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere per due permutazioni $p$ e $q$ su $n$ oggetti:
   A) se $n$ è dispari allora il segno di $p$ e di $q$ è $-1$.
   B) $\text{sign}(p \circ q^{-1}) = (\text{sign } p) \cdot (\text{sign } q)$.
   C) $p \circ q = q \circ p$.
   D) se $p$ ha un numero dispari di coppie in inversione allora ha segno negativo.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) la somma di due matrici a determinante nullo ha determinante nullo.
   B) se una matrice $A$ è ortogonale allora anche la matrice $A \cdot {}^tA$ è ortogonale.
   C) ogni matrice $A \in M_{m \times n}(I\!R)$ è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni di tipo $T_1$ e $T_2$.
   D) la matrice $A = (a^i_j) \in M_5(I\!R)$ con $a^i_j = i \cdot j$ $(1 \leq i \leq 5,\ 1 \leq j \leq 5)$ ha determinante nullo.

3) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Sia $A^i_j$ il complemento algebrico di $a^i_j$ in $A$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) per ogni indice $s$ con $1 \leq s \leq n$ si ha che $\det A = \sum_{k=1}^{n} a^k_s A^k_s$.
   B) se tutti gli elementi di $A$ sono numeri interi pari allora $\det A$ è un numero intero pari.
   C) $A$ è invertibile se e solo se $\det A > 0$.
   D) $\det A^2 = (\det A)^2$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $A$ e $B$ sono due matrici reali invertibili $n \times n$ tali che $A \cdot B = B \cdot A$ allora vale anche $A^{-1} \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
   B) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che $(A + B)^3 = A^3 + 3 \cdot A^2 \cdot B + 3 \cdot A \cdot B^2 + B^3$.
   C) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che ${}^t(A \cdot B) = {}^tA \cdot {}^tB$.
   D) esistono matrici quadrate che coincidono sia con la propria inversa che con la propria trasposta.

5) Dire quali dei seguenti insiemi risultano spazi vettoriali sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) insieme delle successioni reali che convergono a 2.
   B) insieme delle matrici $5 \times 9$ a coefficienti tutti reali e maggiori o uguali a zero.
   C) insieme dei polinomi di tipo $ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in I\!R$ e $b^2 - 4ac \leq 0$.
   D) insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ che si annullano su tutti i numeri interi.

6) Dire quali dei seguenti insiemi risultano sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \log(x^2 + 1) = 0\}$.
   B) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (y - 3)^2 = x^2 + y^2 + z^2\}$.
   C) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \cdot y \cdot z = 1\}$.
   D) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 2z\}$.

7) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi commutativi?
   A) $(\mathbf{Q}^+, +)$ ($\mathbf{Q}^+$ = insieme dei numeri razionali strettamente maggiori di 0, $+$ = usuale somma di numeri razionali).
   B) $(M_{4\times 5}(\mathbb{R}), +)$ ($M_{4\times 5}(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici reali $4 \times 5$, $+$ = usuale somma di matrici).
   C) $(F, -)$ ($F$ = insieme di tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $-$ = usuale differenza di funzioni).
   D) $(\mathbf{M}, +)$($\mathbf{M}$ = insieme dei multipli interi di 7, $+$ = usuale somma di numeri interi).

8) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
   A) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$($\mathbf{Q}$ = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri razionali).
   B) $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$ ($\mathbb{Z}_{11}$ = insieme delle classi di resto modulo 11, $+$ = usuale somma modulo 11, $\cdot$ = usuale prodotto modulo 11).
   C) ogni anello con unità.
   D) $(M_{8\times 8}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ($M_{8\times 8}(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici reali $8 \times 8$, $+$ = usuale somma di matrici, $\cdot$ = usuale prodotto fra matrici).

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi $(G, +)$ dotati di elementi non invertibili rispetto all'operazione $+$.
   B) la funzione che porta ogni intero $x$ nel suo triplo $3x$ è un omomorfismo del gruppo degli interi in sé (rispetto all'usuale operazione di somma).
   C) esistono gruppi che hanno lo stesso numero di elementi ma non sono isomorfi.
   D) in ogni anello $(A, +, \cdot)$ l'operazione $\cdot$ è associativa.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli $m$ ed $n$ denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Quali delle seguenti strutture algebriche sono anelli?
   A) $(M_5(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ($M_5(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici $5 \times 5$ a coefficienti reali, $+$ = usuale somma di matrici, $\cdot$ = usuale prodotto di matrici).
   B) $(C(\mathbb{R}), +, \cdot)(C(\mathbb{R})$ = insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $+$ = usuale somma di funzioni, $\cdot$ = usuale prodotto di funzioni).
   C) $(S, \cup, \cap)$ ($S$ = insieme di tutti i sottoinsiemi dei numeri reali, $\cup$ = usuale unione di insiemi, $\cap$ = usuale intersezione di insiemi).
   D) $(\mathbb{N}, +, \cdot)(\mathbb{N}$ = insieme dei numeri naturali, $+$ = usuale somma di numeri naturali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri naturali).

2) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $\det A = \sum_{p \in S_n} a_1^{p(1)} \cdot a_2^{p(2)} \cdot \cdots \cdot a_n^{p(n)}$, dove $S_n$ rappresenta l'insieme delle permutazioni su $n$ oggetti.
   B) se $A$ è ortogonale allora anche $-A$ lo è.
   C) $\det(2 \cdot A) = 2^n \cdot \det A$.
   D) se $A = -A$ allora $\det A = 0$.

3) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Sia $A^i_j$ il complemento algebrico di $a^i_j$ in $A$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $A$ è regolare allora anche $-2 \cdot A$ lo è.
   B) se $i \neq j$ allora $\sum_{r=1}^n a^i_r A^j_r = 0$.
   C) se più di $n$ elementi $a^i_j$ sono nulli allora il determinante di $A$ è nullo.
   D) se $A$ è triangolare il suo determinante coincide col prodotto di tutti gli elementi $a^i_i$ con $1 \leq i \leq n$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) ogni anello commutativo è privo di divisori dello zero.
   B) esistono infiniti gruppi di cardinalità diverse fra loro.
   C) se due campi sono isomorfi ed uno dei due ha caratteristica 5 allora anche l'altro ha caratteristica 5.
   D) se due gruppi sono isomorfi ed il primo è commutativo allora anche il secondo lo è.

5) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
   A) $(GL_8(I\!R), \cdot)$ ($GL_8(I\!R)$ = insieme delle matrici reali $8 \times 8$ invertibili, $\cdot$ = usuale prodotto di matrici).
   B) $(S, +)$ ($S$ = insieme delle successioni reali non convergenti, $+$ = usuale somma di successioni reali).
   C) $(I\!R^*, \cdot)(I\!R^*$ = insieme dei numeri reali non nulli, $\cdot$ = usuale prodotto fra numeri reali).
   D) $(O_7(I\!R), +)$ ($O_7(I\!R)$ = insieme delle matrici reali $7 \times 7$ ortogonali, $+$ = usuale somma di matrici).

6) Dire quali dei seguenti insiemi risultano spazi vettoriali sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) insieme delle successioni che hanno solo un numero finito di termini diversi da zero.
   B) insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ che si annullano nell'intervallo $[0, 1]$.
   C) insieme delle matrici reali $4 \times 4$ che hanno determinante strettamente maggiore di 0.
   D) insieme delle matrici reali $3 \times 3$ che coincidono con la propria trasposta.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) una matrice quadrata $A$ è ortogonale se e solo se $A + {}^tA = I$.
   B) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$.
   C) la somma di due matrici $n \times n$ invertibili è invertibile.
   D) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che ${}^t(A - {}^tB) = {}^tA - B$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) la composizione di un numero pari di permutazioni su $n$ oggetti è sempre pari.
   B) tutte le permutazioni sullo stesso numero di oggetti hanno lo stesso segno.
   C) se $p$ è una permutazione su $n$ oggetti tale che $p^4$ coincide con $p^{-1}$ allora il segno di $p$ è 1.
   D) il numero delle permutazioni su $n$ oggetti è $n^n$.

9) Dire quali dei seguenti insiemi risultano sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $I\!R^3$ sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) $\{(x, y, z) \in I\!R^3 | x \cdot (x - y) = 0\}$.
   B) $\{(x, y, z) \in I\!R^3 | x = 1\}$.
   C) $\{(x, y, z) \in I\!R^3 | x \in Z\!\!\!Z\}$ (dove $Z\!\!\!Z$ denota l'insieme dei numeri interi).
   D) $\{(x, y, z) \in I\!R^3 | z^4 = 0\}$.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli $m$ ed $n$ denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se due campi sono isomorfi ed uno dei due ha caratteristica 5 allora anche l'altro ha caratteristica 5.
   B) se due gruppi sono isomorfi ed il primo è commutativo allora anche il secondo lo è.
   C) ogni anello commutativo è privo di divisori dello zero.
   D) esistono infiniti gruppi di cardinalità diverse fra loro.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere per due permutazioni $p$ e $q$ su $n$ oggetti:
   A) se $p$ ha un numero dispari di coppie in inversione allora ha segno negativo.
   B) se $n$ è dispari allora il segno di $p$ e di $q$ è $-1$.
   C) $p \circ q = q \circ p$.
   D) $\operatorname{sign}(p \circ q^{-1}) = (\operatorname{sign} p) \cdot (\operatorname{sign} q)$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono matrici quadrate che coincidono sia con la propria inversa che con la propria trasposta.
   B) se $A$ e $B$ sono due matrici reali invertibili $n \times n$ tali che $A \cdot B = B \cdot A$ allora vale anche $A^{-1} \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
   C) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che ${}^t(A \cdot B) = {}^tA \cdot {}^tB$.
   D) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che $(A+B)^3 = A^3 + 3 \cdot A^2 \cdot B + 3 \cdot A \cdot B^2 + B^3$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) la matrice $A = (a^i_j) \in M_5(\mathbb{R})$ con $a^i_j = i \cdot j$ $(1 \le i \le 5,\ 1 \le j \le 5)$ ha determinante nullo.
   B) la somma di due matrici a determinante nullo ha determinante nullo.
   C) ogni matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni di tipo $T_1$ e $T_2$.
   D) se una matrice $A$ è ortogonale allora anche la matrice $A \cdot {}^tA$ è ortogonale.

5) Quali delle seguenti strutture algebriche sono anelli?
   A) $(S, \cup, \cap)$ ($S$ = insieme di tutti i sottoinsiemi dei numeri reali, $\cup$ = usuale unione di insiemi, $\cap$ = usuale intersezione di insiemi).
   B) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$($\mathbb{N}$ = insieme dei numeri naturali, $+$ = usuale somma di numeri naturali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri naturali).
   C) $(M_5(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ($M_5(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici $5 \times 5$ a coefficienti reali, $+$ = usuale somma di matrici, $\cdot$ = usuale prodotto di matrici).
   D) $(C(\mathbb{R}), +, \cdot)$($C(\mathbb{R})$ = insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $+$ = usuale somma di funzioni, $\cdot$ = usuale prodotto di funzioni).

6) Dire quali dei seguenti insiemi risultano spazi vettoriali sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) insieme delle matrici reali $3 \times 3$ che coincidono con la propria trasposta.
   B) insieme delle successioni che hanno solo un numero finito di termini diversi da zero.
   C) insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano nell'intervallo $[0, 1]$.
   D) insieme delle matrici reali $4 \times 4$ che hanno determinante strettamente maggiore di 0.

7) Dire quali dei seguenti insiemi risultano sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z^4 = 0\}$.
   B) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \cdot (x - y) = 0\}$.
   C) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 1\}$.
   D) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \in \mathbb{Z}\}$ (dove $\mathbb{Z}$ denota l'insieme dei numeri interi).

8) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Sia $A^i_j$ il complemento algebrico di $a^i_j$ in $A$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $A$ è triangolare il suo determinante coincide col prodotto di tutti gli elementi $a^i_i$ con $1 \leq i \leq n$.
   B) se $A$ è regolare allora anche $-2 \cdot A$ lo è.
   C) se $i \neq j$ allora $\sum_{r=1}^{n} a^i_r A^j_r = 0$.
   D) se più di $n$ elementi $a^i_j$ sono nulli allora il determinante di $A$ è nullo.

9) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
   A) $(\mathbb{R}^*, \cdot)(\mathbb{R}^* =$ insieme dei numeri reali non nulli, $\cdot =$ usuale prodotto fra numeri reali).
   B) $(O_7(\mathbb{R}), +)$ ($O_7(\mathbb{R}) =$ insieme delle matrici reali $7 \times 7$ ortogonali, $+ =$ usuale somma di matrici).
   C) $(GL_8(\mathbb{R}), \cdot)$ ($GL_8(\mathbb{R}) =$ insieme delle matrici reali $8 \times 8$ invertibili, $\cdot =$ usuale prodotto di matrici).
   D) $(S, +)$ ($S =$ insieme delle successioni reali non convergenti, $+ =$ usuale somma di successioni reali).

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli $m$ ed $n$ denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Dire quali dei seguenti insiemi risultano spazi vettoriali sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) insieme delle successioni reali che convergono a 2.
   B) insieme dei polinomi di tipo $ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in I\!R$ e $b^2 - 4ac \leq 0$.
   C) insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ che si annullano su tutti i numeri interi.
   D) insieme delle matrici $5 \times 9$ a coefficienti tutti reali e maggiori o uguali a zero.

2) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Sia $A^i_j$ il complemento algebrico di $a^i_j$ in $A$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) per ogni indice $s$ con $1 \leq s \leq n$ si ha che $\det A = \sum_{k=1}^n a^k_s A^k_s$.
   B) $A$ è invertibile se e solo se $\det A > 0$.
   C) $\det A^2 = (\det A)^2$.
   D) se tutti gli elementi di $A$ sono numeri interi pari allora $\det A$ è un numero intero pari.

3) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
   A) $(Z\!\!\!Z_{11}, +, \cdot)$ ($Z\!\!\!Z_{11}$ = insieme delle classi di resto modulo 11, $+$ = usuale somma modulo 11, $\cdot$ = usuale prodotto modulo 11).
   B) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$($\mathbf{Q}$ = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri razionali).
   C) ogni anello con unità.
   D) $(M_{8\times 8}(I\!R), +, \cdot)$ ($M_{8\times 8}(I\!R)$ = insieme delle matrici reali $8 \times 8$, $+$ = usuale somma di matrici, $\cdot$ = usuale prodotto fra matrici).

4) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi commutativi?
   A) $(M_{4\times 5}(I\!R), +)$ ($M_{4\times 5}(I\!R)$ = insieme delle matrici reali $4 \times 5$, $+$ = usuale somma di matrici).

   B) $(\mathbf{Q}^+, +)$ ($\mathbf{Q}^+$ = insieme dei numeri razionali strettamente maggiori di 0, $+$ = usuale somma di numeri razionali).
   C) $(F, -)$ ($F$ = insieme di tutte le funzioni da $I\!R$ in $I\!R$, $-$ = usuale differenza di funzioni).
   D) $(\mathbf{M}, +)$($\mathbf{M}$ = insieme dei multipli interi di 7, $+$ = usuale somma di numeri interi).

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $p$ è una permutazione su $n$ oggetti tale che $p^4$ coincide con $p^{-1}$ allora il segno di $p$ è 1.
   B) il numero delle permutazioni su $n$ oggetti è $n^n$.
   C) la composizione di un numero pari di permutazioni su $n$ oggetti è sempre pari.
   D) tutte le permutazioni sullo stesso numero di oggetti hanno lo stesso segno.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) la funzione che porta ogni intero $x$ nel suo triplo $3x$ è un omomorfismo del gruppo degli interi in sé (rispetto all'usuale operazione di somma).
   B) esistono gruppi $(G, +)$ dotati di elementi non invertibili rispetto all'operazione $+$.
   C) esistono gruppi che hanno lo stesso numero di elementi ma non sono isomorfi.
   D) in ogni anello $(A, +, \cdot)$ l'operazione $\cdot$ è associativa.

7) Dire quali dei seguenti insiemi risultano sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \log(x^2 + 1) = 0\}$.
   B) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \cdot y \cdot z = 1\}$.
   C) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 2z\}$.
   D) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x-1)^2 + (y-2)^2 + (y-3)^2 = x^2 + y^2 + z^2\}$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) la somma di due matrici $n \times n$ invertibili è invertibile.
   B) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che ${}^t(A - {}^tB) = {}^tA - B$.
   C) una matrice quadrata $A$ è ortogonale se e solo se $A + {}^tA = I$.
   D) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$.

9) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $\det(2 \cdot A) = 2^n \cdot \det A$.
   B) se $A = -A$ allora $\det A = 0$.
   C) $\det A = \sum_{p \in S_n} a_1^{p(1)} \cdot a_2^{p(2)} \cdot \dots \cdot a_n^{p(n)}$, dove $S_n$ rappresenta l'insieme delle permutazioni su $n$ oggetti.
   D) se $A$ è ortogonale allora anche $-A$ lo è.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli $m$ ed $n$ denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere per due permutazioni $p$ e $q$ su $n$ oggetti:
   A) $p \circ q = q \circ p$.
   B) se $p$ ha un numero dispari di coppie in inversione allora ha segno negativo.
   C) se $n$ è dispari allora il segno di $p$ e di $q$ è $-1$.
   D) $\operatorname{sign}(p \circ q^{-1}) = (\operatorname{sign} p) \cdot (\operatorname{sign} q)$.

2) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Sia $A^i_j$ il complemento algebrico di $a^i_j$ in $A$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se tutti gli elementi di $A$ sono numeri interi pari allora $\det A$ è un numero intero pari.
   B) per ogni indice $s$ con $1 \leq s \leq n$ si ha che $\det A = \sum_{k=1}^{n} a^k_s A^k_s$.
   C) $\det A^2 = (\det A)^2$.
   D) $A$ è invertibile se e solo se $\det A > 0$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che ${}^t(A \cdot B) = {}^tA \cdot {}^tB$.
   B) esistono matrici quadrate che coincidono sia con la propria inversa che con la propria trasposta.
   C) se $A$ e $B$ sono due matrici reali invertibili $n \times n$ tali che $A \cdot B = B \cdot A$ allora vale anche $A^{-1} \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
   D) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che $(A+B)^3 = A^3 + 3 \cdot A^2 \cdot B + 3 \cdot A \cdot B^2 + B^3$.

4) Dire quali dei seguenti insiemi risultano spazi vettoriali sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) insieme delle matrici $5 \times 9$ a coefficienti tutti reali e maggiori o uguali a zero.
   B) insieme delle successioni reali che convergono a 2.
   C) insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano su tutti i numeri interi.
   D) insieme dei polinomi di tipo $ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $b^2 - 4ac \leq 0$.

5) Dire quali dei seguenti insiemi risultano sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x-1)^2 + (y-2)^2 + (y-3)^2 = x^2 + y^2 + z^2\}$.
   B) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \log(x^2 + 1) = 0\}$.
   C) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 2z\}$.
   D) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \cdot y \cdot z = 1\}$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) ogni matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni di tipo $T_1$ e $T_2$.
   B) la matrice $A = (a^i_j) \in M_5(\mathbb{R})$ con $a^i_j = i \cdot j$ $(1 \le i \le 5,\ 1 \le j \le 5)$ ha determinante nullo.
   C) la somma di due matrici a determinante nullo ha determinante nullo.
   D) se una matrice $A$ è ortogonale allora anche la matrice $A \cdot {}^tA$ è ortogonale.

7) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
   A) $(O_7(\mathbb{R}), +)$ ($O_7(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici reali $7 \times 7$ ortogonali, $+$ = usuale somma di matrici).
   B) $(\mathbb{R}^*, \cdot)$($\mathbb{R}^*$ = insieme dei numeri reali non nulli, $\cdot$ = usuale prodotto fra numeri reali).
   C) $(S, +)$ ($S$ = insieme delle successioni reali non convergenti, $+$ = usuale somma di successioni reali).
   D) $(GL_8(\mathbb{R}), \cdot)$ ($GL_8(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici reali $8 \times 8$ invertibili, $\cdot$ = usuale prodotto di matrici).

8) Quali delle seguenti strutture algebriche sono anelli?
   A) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$($\mathbb{N}$ = insieme dei numeri naturali, $+$ = usuale somma di numeri naturali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri naturali).
   B) $(S, \cup, \cap)$ ($S$ = insieme di tutti i sottoinsiemi dei numeri reali, $\cup$ = usuale unione di insiemi, $\cap$ = usuale intersezione di insiemi).
   C) $(C(\mathbb{R}), +, \cdot)$($C(\mathbb{R})$ = insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $+$ = usuale somma di funzioni, $\cdot$ = usuale prodotto di funzioni).
   D) $(M_5(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ($M_5(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici $5 \times 5$ a coefficienti reali, $+$ = usuale somma di matrici, $\cdot$ = usuale prodotto di matrici).

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se due gruppi sono isomorfi ed il primo è commutativo allora anche il secondo lo è.
   B) se due campi sono isomorfi ed uno dei due ha caratteristica 5 allora anche l'altro ha caratteristica 5.
   C) esistono infiniti gruppi di cardinalità diverse fra loro.
   D) ogni anello commutativo è privo di divisori dello zero.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli $m$ ed $n$ denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi commutativi?
   A) $(\mathbf{Q}^+,+)$ ($\mathbf{Q}^+$ = insieme dei numeri razionali strettamente maggiori di 0, + = usuale somma di numeri razionali).
   B) $(F,-)$ ($F$ = insieme di tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $-$ = usuale differenza di funzioni).
   C) $(\mathbf{M},+)$($\mathbf{M}$ = insieme dei multipli interi di 7, + = usuale somma di numeri interi).
   D) $(M_{4\times 5}(\mathbb{R}),+)$ ($M_{4\times 5}(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici reali $4\times 5$, + = usuale somma di matrici).

2) Sia $A=(a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n\times n$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $\det(2\cdot A)=2^n\cdot\det A$.
   B) $\det A=\sum_{p\in S_n} a_1^{p(1)}\cdot a_2^{p(2)}\cdot\dots\cdot a_n^{p(n)}$, dove $S_n$ rappresenta l'insieme delle permutazioni su $n$ oggetti.
   C) se $A=-A$ allora $\det A=0$.
   D) se $A$ è ortogonale allora anche $-A$ lo è.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi $(G,+)$ dotati di elementi non invertibili rispetto all'operazione +.
   B) esistono gruppi che hanno lo stesso numero di elementi ma non sono isomorfi.
   C) in ogni anello $(A,+,\cdot)$ l'operazione $\cdot$ è associativa.
   D) la funzione che porta ogni intero $x$ nel suo triplo $3x$ è un omomorfismo del gruppo degli interi in sé (rispetto all'usuale operazione di somma).

4) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
   A) $(\mathbf{Q},+,\cdot)$($\mathbf{Q}$ = insieme dei numeri razionali, + = usuale somma di numeri razionali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri razionali).
   B) ogni anello con unità.
   C) $(M_{8\times 8}(\mathbb{R}),+,\cdot)$ ($M_{8\times 8}(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici reali $8\times 8$, + = usuale somma di matrici, $\cdot$ = usuale prodotto fra matrici).
   D) $(\mathbb{Z}_{11},+,\cdot)$ ($\mathbb{Z}_{11}$ = insieme delle classi di resto modulo 11, + = usuale somma modulo 11, $\cdot$ = usuale prodotto modulo 11).

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) la somma di due matrici $n\times n$ invertibili è invertibile.
   B) una matrice quadrata $A$ è ortogonale se e solo se $A+{}^tA=I$.
   C) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n\times n$ si ha che ${}^t(A-{}^tB)={}^tA-B$.
   D) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n\times n$ si ha che $(A+B)\cdot(A-B)=A^2-B^2$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $p$ è una permutazione su $n$ oggetti tale che $p^4$ coincide con $p^{-1}$ allora il segno di $p$ è 1.
   B) la composizione di un numero pari di permutazioni su $n$ oggetti è sempre pari.
   C) il numero delle permutazioni su $n$ oggetti è $n^n$.
   D) tutte le permutazioni sullo stesso numero di oggetti hanno lo stesso segno.

7) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Sia $A^i_j$ il complemento algebrico di $a^i_j$ in $A$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se più di $n$ elementi $a^i_j$ sono nulli allora il determinante di $A$ è nullo.
   B) se $A$ è triangolare il suo determinante coincide col prodotto di tutti gli elementi $a^i_i$ con $1 \leq i \leq n$.
   C) se $A$ è regolare allora anche $-2 \cdot A$ lo è.
   D) se $i \neq j$ allora $\sum_{r=1}^{n} a^i_r A^j_r = 0$.

8) Dire quali dei seguenti insiemi risultano sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \in \mathbb{Z}\}$ (dove $\mathbb{Z}$ denota l'insieme dei numeri interi).
   B) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z^4 = 0\}$.
   C) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \cdot (x - y) = 0\}$.
   D) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 1\}$.

9) Dire quali dei seguenti insiemi risultano spazi vettoriali sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) insieme delle matrici reali $4 \times 4$ che hanno determinante strettamente maggiore di 0.
   B) insieme delle matrici reali $3 \times 3$ che coincidono con la propria trasposta.
   C) insieme delle successioni che hanno solo un numero finito di termini diversi da zero.
   D) insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano nell'intervallo $[0, 1]$.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli $m$ ed $n$ denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Dire quali dei seguenti insiemi risultano spazi vettoriali sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) insieme delle successioni che hanno solo un numero finito di termini diversi da zero.
   B) insieme delle matrici reali $3 \times 3$ che coincidono con la propria trasposta.
   C) insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano nell'intervallo $[0, 1]$.
   D) insieme delle matrici reali $4 \times 4$ che hanno determinante strettamente maggiore di 0.

2) Dire quali dei seguenti insiemi risultano sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \cdot (x - y) = 0\}$.
   B) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z^4 = 0\}$.
   C) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 1\}$.
   D) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \in \mathbb{Z}\}$ (dove $\mathbb{Z}$ denota l'insieme dei numeri interi).

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi che hanno lo stesso numero di elementi ma non sono isomorfi.
   B) esistono gruppi $(G, +)$ dotati di elementi non invertibili rispetto all'operazione $+$.
   C) la funzione che porta ogni intero $x$ nel suo triplo $3x$ è un omomorfismo del gruppo degli interi in sé (rispetto all'usuale operazione di somma).
   D) in ogni anello $(A, +, \cdot)$ l'operazione $\cdot$ è associativa.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se una matrice $A$ è ortogonale allora anche la matrice $A \cdot {}^tA$ è ortogonale.
   B) la matrice $A = (a^i_j) \in M_5(\mathbb{R})$ con $a^i_j = i \cdot j$ ($1 \leq i \leq 5$, $1 \leq j \leq 5$) ha determinante nullo.
   C) ogni matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni di tipo $T_1$ e $T_2$.
   D) la somma di due matrici a determinante nullo ha determinante nullo.

5) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Sia $A^i_j$ il complemento algebrico di $a^i_j$ in $A$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $A$ è regolare allora anche $-2 \cdot A$ lo è.
   B) se $A$ è triangolare il suo determinante coincide col prodotto di tutti gli elementi $a^i_i$ con $1 \leq i \leq n$.
   C) se $i \neq j$ allora $\sum_{r=1}^{n} a^i_r A^j_r = 0$.
   D) se più di $n$ elementi $a^i_j$ sono nulli allora il determinante di $A$ è nullo.

6) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi commutativi?
   A) $(F, -)$ ($F$ = insieme di tutte le funzioni da $I\!R$ in $I\!R$, $-$ = usuale differenza di funzioni).
   B) $(\mathbf{Q}^+, +)$ ($\mathbf{Q}^+$ = insieme dei numeri razionali strettamente maggiori di 0, $+$ = usuale somma di numeri razionali).
   C) $(M_{4\times 5}(I\!R), +)$ ($M_{4\times 5}(I\!R)$ = insieme delle matrici reali $4 \times 5$, $+$ = usuale somma di matrici).

   D) $(\mathbf{M}, +)$($\mathbf{M}$ = insieme dei multipli interi di 7, $+$ = usuale somma di numeri interi).

7) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
   A) ogni anello con unità.
   B) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$($\mathbf{Q}$ = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri razionali).
   C) $(Z\!\!\!Z_{11}, +, \cdot)$ ($Z\!\!\!Z_{11}$ = insieme delle classi di resto modulo 11, $+$ = usuale somma modulo 11, $\cdot$ = usuale prodotto modulo 11).
   D) $(M_{8\times 8}(I\!R), +, \cdot)$ ($M_{8\times 8}(I\!R)$ = insieme delle matrici reali $8 \times 8$, $+$ = usuale somma di matrici, $\cdot$ = usuale prodotto fra matrici).

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere per due permutazioni $p$ e $q$ su $n$ oggetti:
   A) $\text{sign}(p \circ q^{-1}) = (\text{sign } p) \cdot (\text{sign } q)$.
   B) se $p$ ha un numero dispari di coppie in inversione allora ha segno negativo.
   C) $p \circ q = q \circ p$.
   D) se $n$ è dispari allora il segno di $p$ e di $q$ è $-1$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che $(A + B)^3 = A^3 + 3 \cdot A^2 \cdot B + 3 \cdot A \cdot B^2 + B^3$.
   B) esistono matrici quadrate che coincidono sia con la propria inversa che con la propria trasposta.
   C) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che ${}^t(A \cdot B) = {}^tA \cdot {}^tB$.
   D) se $A$ e $B$ sono due matrici reali invertibili $n \times n$ tali che $A \cdot B = B \cdot A$ allora vale anche $A^{-1} \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli $m$ ed $n$ denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) il numero delle permutazioni su $n$ oggetti è $n^n$.
   B) tutte le permutazioni sullo stesso numero di oggetti hanno lo stesso segno.
   C) se $p$ è una permutazione su $n$ oggetti tale che $p^4$ coincide con $p^{-1}$ allora il segno di $p$ è 1.
   D) la composizione di un numero pari di permutazioni su $n$ oggetti è sempre pari.

2) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
   A) $(\mathbb{R}^*, \cdot)(\mathbb{R}^*$ = insieme dei numeri reali non nulli, $\cdot$ = usuale prodotto fra numeri reali).
   B) $(O_7(\mathbb{R}), +)$ ($O_7(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici reali $7 \times 7$ ortogonali, $+$ = usuale somma di matrici).
   C) $(S, +)$ ($S$ = insieme delle successioni reali non convergenti, $+$ = usuale somma di successioni reali).
   D) $(GL_8(\mathbb{R}), \cdot)$ ($GL_8(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici reali $8 \times 8$ invertibili, $\cdot$ = usuale prodotto di matrici).

3) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $A = -A$ allora $\det A = 0$.
   B) se $A$ è ortogonale allora anche $-A$ lo è.
   C) $\det(2 \cdot A) = 2^n \cdot \det A$.
   D) $\det A = \sum_{p \in S_n} a_1^{p(1)} \cdot a_2^{p(2)} \cdot \cdots \cdot a_n^{p(n)}$, dove $S_n$ rappresenta l'insieme delle permutazioni su $n$ oggetti.

4) Dire quali dei seguenti insiemi risultano sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \cdot y \cdot z = 1\}$.
   B) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \log(x^2 + 1) = 0\}$.
   C) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x-1)^2 + (y-2)^2 + (y-3)^2 = x^2 + y^2 + z^2\}$.
   D) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 2z\}$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se due campi sono isomorfi ed uno dei due ha caratteristica 5 allora anche l'altro ha caratteristica 5.
   B) se due gruppi sono isomorfi ed il primo è commutativo allora anche il secondo lo è.
   C) esistono infiniti gruppi di cardinalità diverse fra loro.
   D) ogni anello commutativo è privo di divisori dello zero.

6) Quali delle seguenti strutture algebriche sono anelli?
   A) $(S, \cup, \cap)$ ($S$ = insieme di tutti i sottoinsiemi dei numeri reali, $\cup$ = usuale unione di insiemi, $\cap$ = usuale intersezione di insiemi).
   B) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$($\mathbb{N}$ = insieme dei numeri naturali, $+$ = usuale somma di numeri naturali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri naturali).
   C) $(C(\mathbb{R}), +, \cdot)$($C(\mathbb{R})$ = insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $+$ = usuale somma di funzioni, $\cdot$ = usuale prodotto di funzioni).
   D) $(M_5(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ($M_5(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici $5 \times 5$ a coefficienti reali, $+$ = usuale somma di matrici, $\cdot$ = usuale prodotto di matrici).

7) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Sia $A^i_j$ il complemento algebrico di $a^i_j$ in $A$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $A$ è invertibile se e solo se $\det A > 0$.
   B) per ogni indice $s$ con $1 \leq s \leq n$ si ha che $\det A = \sum_{k=1}^n a^k_s A^k_s$.
   C) se tutti gli elementi di $A$ sono numeri interi pari allora $\det A$ è un numero intero pari.
   D) $\det A^2 = (\det A)^2$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che ${}^t(A - {}^tB) = {}^tA - B$.
   B) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$.
   C) la somma di due matrici $n \times n$ invertibili è invertibile.
   D) una matrice quadrata $A$ è ortogonale se e solo se $A + {}^tA = I$.

9) Dire quali dei seguenti insiemi risultano spazi vettoriali sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) insieme dei polinomi di tipo $ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $b^2 - 4ac \leq 0$.
   B) insieme delle successioni reali che convergono a 2.
   C) insieme delle matrici $5 \times 9$ a coefficienti tutti reali e maggiori o uguali a zero.
   D) insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano su tutti i numeri interi.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli $m$ ed $n$ denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere per due permutazioni $p$ e $q$ su $n$ oggetti:
   A) $p \circ q = q \circ p$.
   B) $\operatorname{sign}(p \circ q^{-1}) = (\operatorname{sign} p) \cdot (\operatorname{sign} q)$.
   C) se $p$ ha un numero dispari di coppie in inversione allora ha segno negativo.
   D) se $n$ è dispari allora il segno di $p$ e di $q$ è $-1$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che ${}^t(A \cdot B) = {}^tA \cdot {}^tB$.
   B) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che $(A+B)^3 = A^3 + 3 \cdot A^2 \cdot B + 3 \cdot A \cdot B^2 + B^3$.
   C) esistono matrici quadrate che coincidono sia con la propria inversa che con la propria trasposta.
   D) se $A$ e $B$ sono due matrici reali invertibili $n \times n$ tali che $A \cdot B = B \cdot A$ allora vale anche $A^{-1} \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

3) Dire quali dei seguenti insiemi risultano spazi vettoriali sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) insieme delle successioni reali che convergono a 2.
   B) insieme delle matrici $5 \times 9$ a coefficienti tutti reali e maggiori o uguali a zero.
   C) insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano su tutti i numeri interi.
   D) insieme dei polinomi di tipo $ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $b^2 - 4ac \leq 0$.

4) Dire quali dei seguenti insiemi risultano sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \log(x^2 + 1) = 0\}$.
   B) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x-1)^2 + (y-2)^2 + (y-3)^2 = x^2 + y^2 + z^2\}$.
   C) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 2z\}$.
   D) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \cdot y \cdot z = 1\}$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) ogni matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni di tipo $T_1$ e $T_2$.
   B) se una matrice $A$ è ortogonale allora anche la matrice $A \cdot {}^tA$ è ortogonale.
   C) la matrice $A = (a^i_j) \in M_5(\mathbb{R})$ con $a^i_j = i \cdot j$ $(1 \leq i \leq 5,\ 1 \leq j \leq 5)$ ha determinante nullo.
   D) la somma di due matrici a determinante nullo ha determinante nullo.

6) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Sia $A^i_j$ il complemento algebrico di $a^i_j$ in $A$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) per ogni indice $s$ con $1 \leq s \leq n$ si ha che $\det A = \sum_{k=1}^{n} a^k_s A^k_s$.
   B) se tutti gli elementi di $A$ sono numeri interi pari allora $\det A$ è un numero intero pari.
   C) $\det A^2 = (\det A)^2$.
   D) $A$ è invertibile se e solo se $\det A > 0$.

7) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi commutativi?
   A) $(\mathbf{Q}^+, +)$ ($\mathbf{Q}^+$ = insieme dei numeri razionali strettamente maggiori di 0, + = usuale somma di numeri razionali).
   B) $(M_{4\times5}(\mathbb{R}), +)$ ($M_{4\times5}(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici reali $4 \times 5$, + = usuale somma di matrici).

   C) $(\mathbf{M}, +)$($\mathbf{M}$ = insieme dei multipli interi di 7, + = usuale somma di numeri interi).
   D) $(F, -)$ ($F$ = insieme di tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $-$ = usuale differenza di funzioni).

8) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
   A) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$($\mathbf{Q}$ = insieme dei numeri razionali, + = usuale somma di numeri razionali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri razionali).
   B) $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$ ($\mathbb{Z}_{11}$ = insieme delle classi di resto modulo 11, + = usuale somma modulo 11, $\cdot$ = usuale prodotto modulo 11).
   C) $(M_{8\times8}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ($M_{8\times8}(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici reali $8 \times 8$, + = usuale somma di matrici, $\cdot$ = usuale prodotto fra matrici).
   D) ogni anello con unità.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi $(G, +)$ dotati di elementi non invertibili rispetto all'operazione +.
   B) la funzione che porta ogni intero $x$ nel suo triplo $3x$ è un omomorfismo del gruppo degli interi in sé (rispetto all'usuale operazione di somma).
   C) in ogni anello $(A, +, \cdot)$ l'operazione $\cdot$ è associativa.
   D) esistono gruppi che hanno lo stesso numero di elementi ma non sono isomorfi.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli $m$ ed $n$ denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Quali delle seguenti strutture algebriche sono anelli?
   A) $(C(\mathbb{R}),+,\cdot)(C(\mathbb{R})$ = insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $+$ = usuale somma di funzioni, $\cdot$ = usuale prodotto di funzioni).
   B) $(\mathbb{N},+,\cdot)(\mathbb{N}$ = insieme dei numeri naturali, $+$ = usuale somma di numeri naturali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri naturali).
   C) $(M_5(\mathbb{R}),+,\cdot)$ $(M_5(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici $5\times 5$ a coefficienti reali, $+$ = usuale somma di matrici, $\cdot$ = usuale prodotto di matrici).
   D) $(S,\cup,\cap)$ ($S$ = insieme di tutti i sottoinsiemi dei numeri reali, $\cup$ = usuale unione di insiemi, $\cap$ = usuale intersezione di insiemi).

2) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
   A) $(S,+)$ ($S$ = insieme delle successioni reali non convergenti, $+$ = usuale somma di successioni reali).
   B) $(O_7(\mathbb{R}),+)$ $(O_7(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici reali $7\times 7$ ortogonali, $+$ = usuale somma di matrici).
   C) $(GL_8(\mathbb{R}),\cdot)$ $(GL_8(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici reali $8\times 8$ invertibili, $\cdot$ = usuale prodotto di matrici).
   D) $(\mathbb{R}^*,\cdot)(\mathbb{R}^*$ = insieme dei numeri reali non nulli, $\cdot$ = usuale prodotto fra numeri reali).

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono infiniti gruppi di cardinalità diverse fra loro.
   B) se due gruppi sono isomorfi ed il primo è commutativo allora anche il secondo lo è.
   C) ogni anello commutativo è privo di divisori dello zero.
   D) se due campi sono isomorfi ed uno dei due ha caratteristica 5 allora anche l'altro ha caratteristica 5.

4) Sia $A=(a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n\times n$. Sia $A^i_j$ il complemento algebrico di $a^i_j$ in $A$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $A$ è regolare allora anche $-2\cdot A$ lo è.
   B) se $i\neq j$ allora $\sum_{r=1}^n a^i_r A^j_r = 0$.
   C) se $A$ è triangolare il suo determinante coincide col prodotto di tutti gli elementi $a^i_i$ con $1\leq i\leq n$.
   D) se più di $n$ elementi $a^i_j$ sono nulli allora il determinante di $A$ è nullo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) la somma di due matrici $n\times n$ invertibili è invertibile.
   B) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n\times n$ si ha che ${}^t(A-{}^tB)={}^tA-B$.
   C) una matrice quadrata $A$ è ortogonale se e solo se $A+{}^tA=I$.
   D) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n\times n$ si ha che $(A+B)\cdot(A-B)=A^2-B^2$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $p$ è una permutazione su $n$ oggetti tale che $p^4$ coincide con $p^{-1}$ allora il segno di $p$ è 1.
   B) il numero delle permutazioni su $n$ oggetti è $n^n$.
   C) la composizione di un numero pari di permutazioni su $n$ oggetti è sempre pari.
   D) tutte le permutazioni sullo stesso numero di oggetti hanno lo stesso segno.

7) Dire quali dei seguenti insiemi risultano spazi vettoriali sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) insieme delle successioni che hanno solo un numero finito di termini diversi da zero.
   B) insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano nell'intervallo $[0,1]$.
   C) insieme delle matrici reali $3 \times 3$ che coincidono con la propria trasposta.
   D) insieme delle matrici reali $4 \times 4$ che hanno determinante strettamente maggiore di 0.

8) Dire quali dei seguenti insiemi risultano sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x \cdot (x-y) = 0\}$.
   B) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = 1\}$.
   C) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | z^4 = 0\}$.
   D) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x \in \mathbb{Z}\}$ (dove $\mathbb{Z}$ denota l'insieme dei numeri interi).

9) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $\det(2 \cdot A) = 2^n \cdot \det A$.
   B) se $A = -A$ allora $\det A = 0$.
   C) $\det A = \sum_{p \in S_n} a_1^{p(1)} \cdot a_2^{p(2)} \cdot \cdots \cdot a_n^{p(n)}$, dove $S_n$ rappresenta l'insieme delle permutazioni su $n$ oggetti.
   D) se $A$ è ortogonale allora anche $-A$ lo è.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli $m$ ed $n$ denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che ${}^t(A \cdot B) = {}^tA \cdot {}^tB$.
   B) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che $(A+B)^3 = A^3 + 3 \cdot A^2 \cdot B + 3 \cdot A \cdot B^2 + B^3$.
   C) esistono matrici quadrate che coincidono sia con la propria inversa che con la propria trasposta.
   D) se $A$ e $B$ sono due matrici reali invertibili $n \times n$ tali che $A \cdot B = B \cdot A$ allora vale anche $A^{-1} \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) ogni matrice $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni di tipo $T_1$ e $T_2$.
   B) se una matrice $A$ è ortogonale allora anche la matrice $A \cdot {}^tA$ è ortogonale.
   C) la matrice $A = (a^i_j) \in M_5(\mathbb{R})$ con $a^i_j = i \cdot j$ $(1 \leq i \leq 5,\ 1 \leq j \leq 5)$ ha determinante nullo.
   D) la somma di due matrici a determinante nullo ha determinante nullo.

3) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Sia $A^i_j$ il complemento algebrico di $a^i_j$ in $A$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $A$ è regolare allora anche $-2 \cdot A$ lo è.
   B) se $A$ è triangolare il suo determinante coincide col prodotto di tutti gli elementi $a^i_i$ con $1 \leq i \leq n$.
   C) se più di $n$ elementi $a^i_j$ sono nulli allora il determinante di $A$ è nullo.
   D) se $i \neq j$ allora $\sum_{r=1}^n a^i_r A^j_r = 0$.

4) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
   A) $(GL_8(\mathbb{R}), \cdot)$ ($GL_8(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici reali $8 \times 8$ invertibili, $\cdot$ = usuale prodotto di matrici).
   B) $(S, +)$ ($S$ = insieme delle successioni reali non convergenti, $+$ = usuale somma di successioni reali).
   C) $(\mathbb{R}^*, \cdot)$($\mathbb{R}^*$ = insieme dei numeri reali non nulli, $\cdot$ = usuale prodotto fra numeri reali).
   D) $(O_7(\mathbb{R}), +)$ ($O_7(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici reali $7 \times 7$ ortogonali, $+$ = usuale somma di matrici).

5) Dire quali dei seguenti insiemi risultano spazi vettoriali sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) insieme delle successioni che hanno solo un numero finito di termini diversi da zero.
   B) insieme delle matrici reali $3 \times 3$ che coincidono con la propria trasposta.
   C) insieme delle matrici reali $4 \times 4$ che hanno determinante strettamente maggiore di 0.
   D) insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano nell'intervallo $[0, 1]$.

6) Dire quali dei seguenti insiemi risultano sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \cdot (x - y) = 0\}$.
   B) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z^4 = 0\}$.
   C) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \in \mathbb{Z}\}$ (dove $\mathbb{Z}$ denota l'insieme dei numeri interi).
   D) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 1\}$.

7) Quali delle seguenti strutture algebriche sono anelli?
   A) $(M_5(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ($M_5(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici $5 \times 5$ a coefficienti reali, $+$ = usuale somma di matrici, $\cdot$ = usuale prodotto di matrici).
   B) $(C(\mathbb{R}), +, \cdot)$($C(\mathbb{R})$ = insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $+$ = usuale somma di funzioni, $\cdot$ = usuale prodotto di funzioni).
   C) $(S, \cup, \cap)$ ($S$ = insieme di tutti i sottoinsiemi dei numeri reali, $\cup$ = usuale unione di insiemi, $\cap$ = usuale intersezione di insiemi).
   D) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$($\mathbb{N}$ = insieme dei numeri naturali, $+$ = usuale somma di numeri naturali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri naturali).

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) ogni anello commutativo è privo di divisori dello zero.
   B) esistono infiniti gruppi di cardinalità diverse fra loro.
   C) se due campi sono isomorfi ed uno dei due ha caratteristica 5 allora anche l'altro ha caratteristica 5.
   D) se due gruppi sono isomorfi ed il primo è commutativo allora anche il secondo lo è.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere per due permutazioni $p$ e $q$ su $n$ oggetti:
   A) $p \circ q = q \circ p$.
   B) $\text{sign}(p \circ q^{-1}) = (\text{sign } p) \cdot (\text{sign } q)$.
   C) se $p$ ha un numero dispari di coppie in inversione allora ha segno negativo.
   D) se $n$ è dispari allora il segno di $p$ e di $q$ è $-1$.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli $m$ ed $n$ denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
   A) ogni anello con unità.
   B) $(M_{8\times 8}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ($M_{8\times 8}(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici reali $8\times 8$, $+$ = usuale somma di matrici, $\cdot$ = usuale prodotto fra matrici).
   C) $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$ ($\mathbb{Z}_{11}$ = insieme delle classi di resto modulo 11, $+$ = usuale somma modulo 11, $\cdot$ = usuale prodotto modulo 11).
   D) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$($\mathbf{Q}$ = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri razionali).

2) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi commutativi?
   A) $(F, -)$ ($F$ = insieme di tutte le funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $-$ = usuale differenza di funzioni).
   B) $(\mathbf{M}, +)$($\mathbf{M}$ = insieme dei multipli interi di 7, $+$ = usuale somma di numeri interi).
   C) $(M_{4\times 5}(\mathbb{R}), +)$ ($M_{4\times 5}(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici reali $4\times 5$, $+$ = usuale somma di matrici).
   D) $(\mathbf{Q}^+, +)$ ($\mathbf{Q}^+$ = insieme dei numeri razionali strettamente maggiori di 0, $+$ = usuale somma di numeri razionali).

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) il numero delle permutazioni su $n$ oggetti è $n^n$.
   B) se $p$ è una permutazione su $n$ oggetti tale che $p^4$ coincide con $p^{-1}$ allora il segno di $p$ è 1.
   C) tutte le permutazioni sullo stesso numero di oggetti hanno lo stesso segno.
   D) la composizione di un numero pari di permutazioni su $n$ oggetti è sempre pari.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi che hanno lo stesso numero di elementi ma non sono isomorfi.
   B) in ogni anello $(A, +, \cdot)$ l'operazione $\cdot$ è associativa.
   C) la funzione che porta ogni intero $x$ nel suo triplo $3x$ è un omomorfismo del gruppo degli interi in sé (rispetto all'usuale operazione di somma).
   D) esistono gruppi $(G, +)$ dotati di elementi non invertibili rispetto all'operazione $+$.

5) Dire quali dei seguenti insiemi risultano spazi vettoriali sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) insieme delle matrici $5\times 9$ a coefficienti tutti reali e maggiori o uguali a zero.
   B) insieme dei polinomi di tipo $ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $b^2 - 4ac \leq 0$.
   C) insieme delle successioni reali che convergono a 2.
   D) insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano su tutti i numeri interi.

6) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Sia $A^i_j$ il complemento algebrico di $a^i_j$ in $A$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se tutti gli elementi di $A$ sono numeri interi pari allora $\det A$ è un numero intero pari.
   B) $A$ è invertibile se e solo se $\det A > 0$.
   C) per ogni indice $s$ con $1 \leq s \leq n$ si ha che $\det A = \sum_{k=1}^{n} a^k_s A^k_s$.
   D) $\det A^2 = (\det A)^2$.

7) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $A = -A$ allora $\det A = 0$.
   B) $\det(2 \cdot A) = 2^n \cdot \det A$.
   C) se $A$ è ortogonale allora anche $-A$ lo è.
   D) $\det A = \sum_{p \in S_n} a_1^{p(1)} \cdot a_2^{p(2)} \cdot \cdots \cdot a_n^{p(n)}$, dove $S_n$ rappresenta l'insieme delle permutazioni su $n$ oggetti.

8) Dire quali dei seguenti insiemi risultano sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x-1)^2 + (y-2)^2 + (y-3)^2 = x^2 + y^2 + z^2\}$.
   B) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \cdot y \cdot z = 1\}$.
   C) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \log(x^2 + 1) = 0\}$.
   D) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 2z\}$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che ${}^t(A - {}^tB) = {}^tA - B$.
   B) la somma di due matrici $n \times n$ invertibili è invertibile.
   C) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$.
   D) una matrice quadrata $A$ è ortogonale se e solo se $A + {}^tA = I$.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli $m$ ed $n$ denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Sia $A^i_j$ il complemento algebrico di $a^i_j$ in $A$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $A$ è invertibile se e solo se $\det A > 0$.
   B) per ogni indice $s$ con $1 \leq s \leq n$ si ha che $\det A = \sum_{k=1}^{n} a^k_s A^k_s$.
   C) $\det A^2 = (\det A)^2$.
   D) se tutti gli elementi di $A$ sono numeri interi pari allora $\det A$ è un numero intero pari.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere per due permutazioni $p$ e $q$ su $n$ oggetti:
   A) se $p$ ha un numero dispari di coppie in inversione allora ha segno negativo.
   B) $p \circ q = q \circ p$.
   C) $\text{sign}(p \circ q^{-1}) = (\text{sign } p) \cdot (\text{sign } q)$.
   D) se $n$ è dispari allora il segno di $p$ e di $q$ è $-1$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono matrici quadrate che coincidono sia con la propria inversa che con la propria trasposta.
   B) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che ${}^t(A \cdot B) = {}^tA \cdot {}^tB$.
   C) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che $(A+B)^3 = A^3 + 3 \cdot A^2 \cdot B + 3 \cdot A \cdot B^2 + B^3$.
   D) se $A$ e $B$ sono due matrici reali invertibili $n \times n$ tali che $A \cdot B = B \cdot A$ allora vale anche $A^{-1} \cdot B^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

4) Dire quali dei seguenti insiemi risultano sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x \cdot y \cdot z = 1\}$.
   B) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \log(x^2 + 1) = 0\}$.
   C) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 2z\}$.
   D) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x-1)^2 + (y-2)^2 + (y-3)^2 = x^2 + y^2 + z^2\}$.

5) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
   A) $(\mathbb{R}^*, \cdot) (\mathbb{R}^* =$ insieme dei numeri reali non nulli, $\cdot =$ usuale prodotto fra numeri reali).
   B) $(GL_8(\mathbb{R}), \cdot)$ $(GL_8(\mathbb{R}) =$ insieme delle matrici reali $8 \times 8$ invertibili, $\cdot =$ usuale prodotto di matrici).
   C) $(O_7(\mathbb{R}), +)$ $(O_7(\mathbb{R}) =$ insieme delle matrici reali $7 \times 7$ ortogonali, $+ =$ usuale somma di matrici).
   D) $(S, +)$ $(S =$ insieme delle successioni reali non convergenti, $+ =$ usuale somma di successioni reali).

6) Quali delle seguenti strutture algebriche sono anelli?
   A) $(S, \cup, \cap)$ ($S$ = insieme di tutti i sottoinsiemi dei numeri reali, $\cup$ = usuale unione di insiemi, $\cap$ = usuale intersezione di insiemi).
   B) $(M_5(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ($M_5(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici $5 \times 5$ a coefficienti reali, $+$ = usuale somma di matrici, $\cdot$ = usuale prodotto di matrici).
   C) $(\mathbb{N}, +, \cdot)$($\mathbb{N}$ = insieme dei numeri naturali, $+$ = usuale somma di numeri naturali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri naturali).
   D) $(C(\mathbb{R}), +, \cdot)$($C(\mathbb{R})$ = insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $+$ = usuale somma di funzioni, $\cdot$ = usuale prodotto di funzioni).

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se due campi sono isomorfi ed uno dei due ha caratteristica 5 allora anche l'altro ha caratteristica 5.
   B) ogni anello commutativo è privo di divisori dello zero.
   C) se due gruppi sono isomorfi ed il primo è commutativo allora anche il secondo lo è.
   D) esistono infiniti gruppi di cardinalità diverse fra loro.

8) Dire quali dei seguenti insiemi risultano spazi vettoriali sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) insieme dei polinomi di tipo $ax^2 + bx + c$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $b^2 - 4ac \leq 0$.
   B) insieme delle successioni reali che convergono a 2.
   C) insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano su tutti i numeri interi.
   D) insieme delle matrici $5 \times 9$ a coefficienti tutti reali e maggiori o uguali a zero.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) la matrice $A = (a^i_j) \in M_5(\mathbb{R})$ con $a^i_j = i \cdot j$ $(1 \leq i \leq 5,\ 1 \leq j \leq 5)$ ha determinante nullo.
   B) ogni matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ è trasformabile in una matrice ridotta mediante una successione finita di trasformazioni di tipo $T_1$ e $T_2$.
   C) se una matrice $A$ è ortogonale allora anche la matrice $A \cdot {}^tA$ è ortogonale.
   D) la somma di due matrici a determinante nullo ha determinante nullo.

*Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte.* **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli $m$ ed $n$ denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Sia $A = (a^i_j)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Sia $A^i_j$ il complemento algebrico di $a^i_j$ in $A$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $i \neq j$ allora $\sum_{r=1}^n a^i_r A^j_r = 0$.
   B) se più di $n$ elementi $a^i_j$ sono nulli allora il determinante di $A$ è nullo.
   C) se $A$ è triangolare il suo determinante coincide col prodotto di tutti gli elementi $a^i_i$ con $1 \leq i \leq n$.
   D) se $A$ è regolare allora anche $-2 \cdot A$ lo è.

2) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
   A) $(\mathbb{Z}_{11}, +, \cdot)$ ($\mathbb{Z}_{11}$ = insieme delle classi di resto modulo 11, $+$ = usuale somma modulo 11, $\cdot$ = usuale prodotto modulo 11).
   B) ogni anello con unità.
   C) $(M_{8\times 8}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ ($M_{8\times 8}(\mathbb{R})$ = insieme delle matrici reali $8\times 8$, $+$ = usuale somma di matrici, $\cdot$ = usuale prodotto fra matrici).
   D) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$($\mathbf{Q}$ = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri razionali).

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) la funzione che porta ogni intero $x$ nel suo triplo $3x$ è un omomorfismo del gruppo degli interi in sé (rispetto all'usuale operazione di somma).
   B) esistono gruppi che hanno lo stesso numero di elementi ma non sono isomorfi.
   C) in ogni anello $(A, +, \cdot)$ l'operazione $\cdot$ è associativa.
   D) esistono gruppi $(G, +)$ dotati di elementi non invertibili rispetto all'operazione $+$.

4) Dire quali dei seguenti insiemi risultano spazi vettoriali sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
   A) insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si annullano nell'intervallo $[0, 1]$.
   B) insieme delle matrici reali $4 \times 4$ che hanno determinante strettamente maggiore di 0.
   C) insieme delle matrici reali $3 \times 3$ che coincidono con la propria trasposta.
   D) insieme delle successioni che hanno solo un numero finito di termini diversi da zero.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che ${}^t(A - {}^tB) = {}^tA - B$.
   B) una matrice quadrata $A$ è ortogonale se e solo se $A + {}^tA = I$.
   C) se $A$ e $B$ sono due matrici reali $n \times n$ si ha che $(A + B) \cdot (A - B) = A^2 - B^2$.
   D) la somma di due matrici $n \times n$ invertibili è invertibile.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
A) il numero delle permutazioni su $n$ oggetti è $n^n$.
B) la composizione di un numero pari di permutazioni su $n$ oggetti è sempre pari.
C) tutte le permutazioni sullo stesso numero di oggetti hanno lo stesso segno.
D) se $p$ è una permutazione su $n$ oggetti tale che $p^4$ coincide con $p^{-1}$ allora il segno di $p$ è 1.

7) Sia $A = (a_j^i)$ una matrice quadrata reale $n \times n$. Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:
A) se $A = -A$ allora $\det A = 0$.
B) $\det A = \sum_{p \in S_n} a_1^{p(1)} \cdot a_2^{p(2)} \cdot \cdots \cdot a_n^{p(n)}$, dove $S_n$ rappresenta l'insieme delle permutazioni su $n$ oggetti.
C) se $A$ è ortogonale allora anche $-A$ lo è.
D) $\det(2 \cdot A) = 2^n \cdot \det A$.

8) Dire quali dei seguenti insiemi risultano sottospazi vettoriali dello spazio vettoriale $I\!R^3$ sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare:
A) $\{(x, y, z) \in I\!R^3 | x = 1\}$.
B) $\{(x, y, z) \in I\!R^3 | x \in \mathbb{Z}\}$ (dove $\mathbb{Z}$ denota l'insieme dei numeri interi).
C) $\{(x, y, z) \in I\!R^3 | z^4 = 0\}$.
D) $\{(x, y, z) \in I\!R^3 | x \cdot (x - y) = 0\}$.

9) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi commutativi?
A) $(M_{4\times5}(I\!R), +)$ ($M_{4\times5}(I\!R)$ = insieme delle matrici reali $4 \times 5$, $+$ = usuale somma di matrici).

B) $(F, -)$ ($F$ = insieme di tutte le funzioni da $I\!R$ in $I\!R$, $-$ = usuale differenza di funzioni).
C) $(\mathbf{M}, +)$($\mathbf{M}$ = insieme dei multipli interi di 7, $+$ = usuale somma di numeri interi).
D) $(\mathbf{Q}^+, +)$ ($\mathbf{Q}^+$ = insieme dei numeri razionali strettamente maggiori di 0, $+$ = usuale somma di numeri razionali).