Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 50×100 è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi relativi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme dei numeri reali strettamente maggiori di 1 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

2) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante nullo. Allora
   A) ${}^t(A \cdot (A - B))$ non è una matrice regolare.
   B) può accadere che la matrice $A + B + C$ sia regolare.
   C) $A \cdot B \cdot C$ è la matrice nulla.
   D) A, B e C hanno traccia nulla.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali 9×9 con la prima riga nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme $\{(1,0,0,0,0),(1,1,0,0,0),(1,1,1,0,0),(1,1,1,1,0),(1,1,1,1,1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme delle successioni reali, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y) = 2x - 3y + 1$ è una trasformazione lineare.
   B) l'immagine della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua trasposta ha dimensione 4.
   C) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ non è invertibile allora $\rho(A) \neq \rho({}^tA)$.
   D) se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili con $A^2 = B^2$ e $A^3 = B^3$ allora $A = B$.

5) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) se $m = n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non può essere vuoto.
   B) **S** ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   C) il rango di C è sempre non inferiore al rango di A.
   D) se $m < n$ il sistema **S** ammette infinite soluzioni.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) T può ammettere più di n autovalori distinti.
   B) se T è diagonalizzabile allora anche T^{100} è diagonalizzabile.
   C) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è strettamente inferiore a n allora T non è diagonalizzabile.
   D) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è esattamente uguale ad n.

7) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v\rangle < 0$.
   B) se $u, v, w \in V$ allora $\langle u + v + w, u + v + w\rangle = \langle u, u\rangle + \langle v, v\rangle + \langle w, w\rangle$.
   C) il complemento ortogonale di ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione $n/2$.
   D) se $u, v \in V$ e $\lambda \in I\!R$ allora $\|u + \lambda v\| \leq \|u\| + |\lambda|\|v\|$.

8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y = 2$ e $x + y = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(4, 1)$, $(6, -3)$ è $(5, -1)$.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, 4)$ e la retta di equazione $x - 2y = -4$ è 1.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 4xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(2, 0, 0)$, $(0, -2, -4)$, $(2, 0, -2)$ è 3.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se T è un automorfismo allora le matrici A e B sono invertibili.
   B) T è suriettivo se e solo se il nucleo di T contiene soltanto il vettore nullo.
   C) T e T^2 ammettono gli stessi autovalori.
   D) A e B hanno lo stesso determinante.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(0,1,1)$,$(1,0,1)$,$(1,1,0)$,$(0,0,0)$ è $1/3$.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 - 4x = 0$ è una parabola.
   C) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1,2,3)$ rispetto al punto $(2,3,1)$ è il punto $(3,5,4)$.
   D) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge u$ è il vettore nullo.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = -2t, y = t - 3, z = t$ e $x + y + z = 5$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.
   B) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A^2$ è una trasformazione lineare.
   C) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non strettamente superiore a n e lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^{n+1}$ sono fra loro isomorfi.
   D) se una matrice reale 2×2 ha determinante e traccia entrambi nulli allora è necessariamente la matrice nulla.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A + B + C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   B) se A ha due colonne uguali allora A^2 non è regolare.
   C) se A è invertibile e $B = A^{-1}$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
   D) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi che hanno lo stesso numero di elementi ma non sono fra loro isomorfi.
   B) ogni spazio vettoriale $(I\!K, V, +, \cdot)$ è un anello rispetto alle operazioni $+, \cdot$.
   C) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ invertibili è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m > n$.
   B) se tutte le colonne di C sono uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ non può essere vuoto.
   C) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   D) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 7.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ che si possono scrivere come $k \cdot \sin x$ (con k numero reale qualunque) è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme di tutte le matrici 3×3 a coefficienti interi è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.
   D) se un insieme di 49 matrici reali 7×7 è un sistema di generatori per $M_7(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $M_7(I\!R)$.

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v, w \in V$ si ha che se $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle$ allora $v = w$.
   B) se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori di V di norma 1 allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   C) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u - v, v \rangle \leq \langle u, v \rangle$.
   D) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = 0$ se e solo se u è il vettore nullo.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante nullo. Allora
   A) A, B e C hanno traccia nulla.
   B) ${}^t(A \cdot (A - B))$ non è una matrice regolare.
   C) può accadere che la matrice $A + B + C$ sia regolare.
   D) $A \cdot B \cdot C$ è la matrice nulla.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $m < n$ il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   B) il rango di C è sempre non inferiore al rango di A.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   D) se $m = n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non può essere vuoto.

3) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è esattamente uguale ad n.
   B) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è strettamente inferiore a n allora T non è diagonalizzabile.
   C) se T è diagonalizzabile allora anche T^{100} è diagonalizzabile.
   D) T può ammettere più di n autovalori distinti.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = 0$ se e solo se u è il vettore nullo.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u - v, v \rangle \leq \langle u, v \rangle$.
   C) per ogni $u, v, w \in V$ si ha che se $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle$ allora $v = w$.
   D) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori di V di norma 1 allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita.
   B) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle matrici reali 9×9 con la prima riga nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme $\{(1, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili con $A^2 = B^2$ e $A^3 = B^3$ allora $A = B$.
   B) se $A \in M_n(I\!R)$ non è invertibile allora $\rho(A) \neq \rho({}^tA)$.
   C) l'immagine della trasformazione lineare da $M_2(I\!R)$ ad $M_2(I\!R)$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua trasposta ha dimensione 4.
   D) la funzione $F : I\!R^2 \to I\!R$ definita come $F(x, y) = 2x - 3y + 1$ è una trasformazione lineare.

7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = -2t, y = t - 3, z = t$ e $x + y + z = 5$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge u$ è il vettore nullo.
   B) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 2, 3)$ rispetto al punto $(2, 3, 1)$ è il punto $(3, 5, 4)$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(0, 1, 1)$,$(1, 0, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(0, 0, 0)$ è $1/3$.
   D) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 - 4x = 0$ è una parabola.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri reali strettamente maggiori di 1 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme delle matrici reali 50×100 è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi relativi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, 4)$ e la retta di equazione $x - 2y = -4$ è 1.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 4xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(2, 0, 0)$, $(0, -2, -4)$, $(2, 0, -2)$ è 3.
   D) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(4, 1)$, $(6, -3)$ è $(5, -1)$.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 7.
   B) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   C) se tutte le colonne di C sono uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ non può essere vuoto.
   D) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m > n$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ invertibili è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   B) ogni spazio vettoriale $(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$ è un anello rispetto alle operazioni $+, \cdot$.
   C) esistono gruppi che hanno lo stesso numero di elementi ma non sono fra loro isomorfi.
   D) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B hanno lo stesso determinante.
   B) T e T^2 ammettono gli stessi autovalori.
   C) T è suriettivo se e solo se il nucleo di T contiene soltanto il vettore nullo.
   D) se T è un automorfismo allora le matrici A e B sono invertibili.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y = 2$ e $x + y = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v, w \in V$ allora $\langle u + v + w, u + v + w \rangle = \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle$.
   B) il complemento ortogonale di ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione $n/2$.
   C) se $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\|u + \lambda v\| \leq \|u\| + |\lambda| \|v\|$.
   D) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle < 0$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se un insieme di 49 matrici reali 7×7 è un sistema di generatori per $M_7(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $M_7(\mathbb{R})$.
   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si possono scrivere come $k \cdot \sin x$ (con k numero reale qualunque) è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme di tutte le matrici 3×3 a coefficienti interi è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$.
   B) se A ha due colonne uguali allora A^2 non è regolare.
   C) se $A + B + C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   D) se A è invertibile e $B = A^{-1}$ allora A e B hanno lo stesso determinante.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se una matrice reale 2×2 ha determinante e traccia entrambi nulli allora è necessariamente la matrice nulla.
   B) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non strettamente superiore a n e lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^{n+1}$ sono fra loro isomorfi.
   C) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A^2$ è una trasformazione lineare.
   D) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $(A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$.
   B) se $A + B + C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   C) se A ha due colonne uguali allora A^2 non è regolare.
   D) se A è invertibile e $B = A^{-1}$ allora A e B hanno lo stesso determinante.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se un insieme di 49 matrici reali 7×7 è un sistema di generatori per $M_7(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $M_7(\mathbb{R})$.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si possono scrivere come $k \cdot \sin x$ (con k numero reale qualunque) è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme di tutte le matrici 3×3 a coefficienti interi è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y = 2$ e $x + y = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) l'immagine della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua trasposta ha dimensione 4.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y) = 2x - 3y + 1$ è una trasformazione lineare.
   C) se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili con $A^2 = B^2$ e $A^3 = B^3$ allora $A = B$.
   D) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ non è invertibile allora $\rho(A) \neq \rho({}^tA)$.

5) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) **S** ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   B) se $m = n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non può essere vuoto.
   C) se $m < n$ il sistema **S** ammette infinite soluzioni.
   D) il rango di C è sempre non inferiore al rango di A.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora anche T^{100} è diagonalizzabile.
   B) T può ammettere più di n autovalori distinti.
   C) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è esattamente uguale ad n.
   D) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è strettamente inferiore a n allora T non è diagonalizzabile.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v, w \in V$ allora $\langle u + v + w, u + v + w \rangle = \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle$.
   B) se $u, v \in V$ e $\lambda \in I\!R$ allora $\|u + \lambda v\| \leq \|u\| + |\lambda| \|v\|$.
   C) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle < 0$.
   D) il complemento ortogonale di ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione $n/2$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, 4)$ e la retta di equazione $x - 2y = -4$ è 1.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(2, 0, 0)$, $(0, -2, -4)$, $(2, 0, -2)$ è 3.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(4, 1)$, $(6, -3)$ è $(5, -1)$.
   D) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 4xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ invertibili è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   B) esistono gruppi che hanno lo stesso numero di elementi ma non sono fra loro isomorfi.
   C) ogni spazio vettoriale $(I\!K, V, +, \cdot)$ è un anello rispetto alle operazioni $+, \cdot$.
   D) l'insieme **C** dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u - v, v \rangle \leq \langle u, v \rangle$.
   B) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = 0$ se e solo se u è il vettore nullo.
   C) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori di V di norma 1 allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   D) per ogni $u, v, w \in V$ si ha che se $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle$ allora $v = w$.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) T è suriettivo se e solo se il nucleo di T contiene soltanto il vettore nullo.
   B) se T è un automorfismo allora le matrici A e B sono invertibili.
   C) T e T^2 ammettono gli stessi autovalori.
   D) A e B hanno lo stesso determinante.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante nullo. Allora
   A) può accadere che la matrice $A + B + C$ sia regolare.
   B) $A \cdot B \cdot C$ è la matrice nulla.
   C) ${}^t(A \cdot (A - B))$ non è una matrice regolare.
   D) A, B e C hanno traccia nulla.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi relativi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali 50×100 è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme dei numeri reali strettamente maggiori di 1 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = -2t, y = t - 3, z = t$ e $x + y + z = 5$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1,2,3)$ rispetto al punto $(2,3,1)$ è il punto $(3,5,4)$.
   B) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge u$ è il vettore nullo.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 - 4x = 0$ è una parabola.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(0,1,1)$,$(1,0,1)$,$(1,1,0)$,$(0,0,0)$ è 1/3.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : M_2(I\!R) \to M_2(I\!R)$ definita da $F(A) = A^2$ è una trasformazione lineare.
   B) se $A, B \in M_n(I\!R)$ allora $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.
   C) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non strettamente superiore a n e lo spazio vettoriale reale $I\!R^{n+1}$ sono fra loro isomorfi.
   D) se una matrice reale 2×2 ha determinante e traccia entrambi nulli allora è necessariamente la matrice nulla.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 9×9 con la prima riga nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_9(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme $\{(1,0,0,0,0), (1,1,0,0,0), (1,1,1,0,0), (1,1,1,1,0), (1,1,1,1,1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $I\!R$.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle successioni reali, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se tutte le colonne di C sono uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ non può essere vuoto.
   B) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m > n$.
   C) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   D) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 7.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se A ha due colonne uguali allora A^2 non è regolare.
   B) se A è invertibile e $B = A^{-1}$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
   C) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$.
   D) se $A + B + C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme di tutte le matrici 3×3 a coefficienti interi è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   C) se un insieme di 49 matrici reali 7×7 è un sistema di generatori per $M_7(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $M_7(\mathbb{R})$.
   D) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si possono scrivere come $k \cdot \sin x$ (con k numero reale qualunque) è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) l'immagine della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua trasposta ha dimensione 4.
   B) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ non è invertibile allora $\rho(A) \neq \rho({}^tA)$.
   C) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y) = 2x - 3y + 1$ è una trasformazione lineare.
   D) se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili con $A^2 = B^2$ e $A^3 = B^3$ allora $A = B$.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   B) il rango di C è sempre non inferiore al rango di A.
   C) se $m = n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non può essere vuoto.
   D) se $m < n$ il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge u$ è il vettore nullo.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(0,1,1)$,$(1,0,1)$,$(1,1,0)$,$(0,0,0)$ è 1/3.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 - 4x = 0$ è una parabola.
   D) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1,2,3)$ rispetto al punto $(2,3,1)$ è il punto $(3,5,4)$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) ogni spazio vettoriale $(I\!\!K, V, +, \cdot)$ è un anello rispetto alle operazioni $+, \cdot$.
   B) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ invertibili è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) esistono gruppi che hanno lo stesso numero di elementi ma non sono fra loro isomorfi.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora anche T^{100} è diagonalizzabile.
   B) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è strettamente inferiore a n allora T non è diagonalizzabile.
   C) T può ammettere più di n autovalori distinti.
   D) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è esattamente uguale ad n.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = 0$ se e solo se u è il vettore nullo.
   B) per ogni $u, v, w \in V$ si ha che se $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle$ allora $v = w$.
   C) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori di V di norma 1 allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   D) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u - v, v \rangle \leq \langle u, v \rangle$.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = -2t, y = t - 3, z = t$ e $x + y + z = 5$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m > n$.
   B) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   C) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 7.
   D) se tutte le colonne di C sono uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ non può essere vuoto.

2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y = 2$ e $x + y = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 50×100 è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi relativi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme dei numeri reali strettamente maggiori di 1 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 4xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, 4)$ e la retta di equazione $x - 2y = -4$ è 1.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(4, 1)$, $(6, -3)$ è $(5, -1)$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(2, 0, 0)$, $(0, -2, -4)$, $(2, 0, -2)$ è 3.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali 9×9 con la prima riga nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_9(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme delle successioni reali, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita.
   D) l'insieme $\{(1,0,0,0,0),(1,1,0,0,0),(1,1,1,0,0),(1,1,1,1,0),(1,1,1,1,1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $I\!R$.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n\times n$ con determinante nullo. Allora
   A) ${}^t(A\cdot(A-B))$ non è una matrice regolare.
   B) può accadere che la matrice $A+B+C$ sia regolare.
   C) A, B e C hanno traccia nulla.
   D) $A\cdot B\cdot C$ è la matrice nulla.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n>0$ e siano A,B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) se T è un automorfismo allora le matrici A e B sono invertibili.
   B) T e T^2 ammettono gli stessi autovalori.
   C) A e B hanno lo stesso determinante.
   D) T è suriettivo se e solo se il nucleo di T contiene soltanto il vettore nullo.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A,B\in M_n(I\!R)$ allora $\det(A\cdot B)=\det(B\cdot A)$.
   B) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non strettamente superiore a n e lo spazio vettoriale reale $I\!R^{n+1}$ sono fra loro isomorfi.
   C) se una matrice reale 2×2 ha determinante e traccia entrambi nulli allora è necessariamente la matrice nulla.
   D) la funzione $F: M_2(I\!R)\to M_2(I\!R)$ definita da $F(A)=A^2$ è una trasformazione lineare.

9) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n>0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) il complemento ortogonale di ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione $n/2$.
   B) se $u,v,w\in V$ allora $\langle u+v+w,u+v+w\rangle=\langle u,u\rangle+\langle v,v\rangle+\langle w,w\rangle$.
   C) per ogni $v\in V$ risulta $\langle v,v\rangle<0$.
   D) se $u,v\in V$ e $\lambda\in I\!R$ allora $\|u+\lambda v\|\le\|u\|+|\lambda|\|v\|$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 9×9 con la prima riga nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle successioni reali, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita.
   C) l'insieme $\{(1,0,0,0,0),(1,1,0,0,0),(1,1,1,0,0),(1,1,1,1,0),(1,1,1,1,1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x-y=2$ e $x+y=0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2,4)$ e la retta di equazione $x-2y=-4$ è 1.
   B) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(4,1)$, $(6,-3)$ è $(5,-1)$.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2-4xy+y^2-1=0$ è una iperbole.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(2,0,0)$, $(0,-2,-4)$, $(2,0,-2)$ è 3.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se A e B sono due matrici reali $n\times n$ invertibili con $A^2=B^2$ e $A^3=B^3$ allora $A=B$.
   B) se $A\in M_n(\mathbb{R})$ non è invertibile allora $\rho(A)\neq\rho({}^tA)$.
   C) la funzione $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definita come $F(x,y)=2x-3y+1$ è una trasformazione lineare.
   D) l'immagine della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua trasposta ha dimensione 4.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $m < n$ il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   B) il rango di C è sempre non inferiore al rango di A.
   C) se $m = n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non può essere vuoto.
   D) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è esattamente uguale ad n.
   B) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è strettamente inferiore a n allora T non è diagonalizzabile.
   C) T può ammettere più di n autovalori distinti.
   D) se T è diagonalizzabile allora anche T^{100} è diagonalizzabile.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v, w \in V$ allora $\langle u + v + w, u + v + w \rangle = \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle$.
   B) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle < 0$.
   C) il complemento ortogonale di ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione $n/2$.
   D) se $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\|u + \lambda v\| \leq \|u\| + |\lambda| \|v\|$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi relativi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme dei numeri reali strettamente maggiori di 1 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali 50×100 è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

9) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante nullo. Allora
   A) può accadere che la matrice $A + B + C$ sia regolare.
   B) A, B e C hanno traccia nulla.
   C) $A \cdot B \cdot C$ è la matrice nulla.
   D) ${}^t(A \cdot (A - B))$ non è una matrice regolare.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = -2t, y = t - 3, z = t$ e $x + y + z = 5$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u - v, v \rangle \leq \langle u, v \rangle$.
   B) se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori di V di norma 1 allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   C) per ogni $u, v, w \in V$ si ha che se $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle$ allora $v = w$.
   D) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = 0$ se e solo se u è il vettore nullo.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se A è invertibile e $B = A^{-1}$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
   B) se $A + B + C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   C) se A ha due colonne uguali allora A^2 non è regolare.
   D) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) esistono gruppi che hanno lo stesso numero di elementi ma non sono fra loro isomorfi.
   C) ogni spazio vettoriale $(I\!K, V, +, \cdot)$ è un anello rispetto alle operazioni $+, \cdot$.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ invertibili è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme di tutte le matrici 3×3 a coefficienti interi è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   B) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si possono scrivere come $k \cdot \sin x$ (con k numero reale qualunque) è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) se un insieme di 49 matrici reali 7×7 è un sistema di generatori per $M_7(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $M_7(\mathbb{R})$.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) T è suriettivo se e solo se il nucleo di T contiene soltanto il vettore nullo.
   B) se T è un automorfismo allora le matrici A e B sono invertibili.
   C) T e T^2 ammettono gli stessi autovalori.
   D) A e B hanno lo stesso determinante.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se tutte le colonne di C sono uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ non può essere vuoto.
   B) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m > n$.
   C) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   D) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 7.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A^2$ è una trasformazione lineare.
   B) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.
   C) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non strettamente superiore a n e lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^{n+1}$ sono fra loro isomorfi.
   D) se una matrice reale 2×2 ha determinante e traccia entrambi nulli allora è necessariamente la matrice nulla.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 2, 3)$ rispetto al punto $(2, 3, 1)$ è il punto $(3, 5, 4)$.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 - 4x = 0$ è una parabola.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(0, 1, 1)$,$(1, 0, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(0, 0, 0)$ è $1/3$.
   D) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge u$ è il vettore nullo.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili con $A^2 = B^2$ e $A^3 = B^3$ allora $A = B$.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y) = 2x - 3y + 1$ è una trasformazione lineare.
   C) l'immagine della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua trasposta ha dimensione 4.
   D) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ non è invertibile allora $\rho(A) \neq \rho({}^tA)$.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è esattamente uguale ad n.
   B) T può ammettere più di n autovalori distinti.
   C) se T è diagonalizzabile allora anche T^{100} è diagonalizzabile.
   D) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è strettamente inferiore a n allora T non è diagonalizzabile.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = 0$ se e solo se u è il vettore nullo.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u - v, v \rangle \leq \langle u, v \rangle$.
   C) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori di V di norma 1 allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   D) per ogni $u, v, w \in V$ si ha che se $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle$ allora $v = w$.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $m < n$ il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   B) se $m = n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non può essere vuoto.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   D) il rango di C è sempre non inferiore al rango di A.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = -2t, y = t - 3, z = t$ e $x + y + z = 5$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge u$ è il vettore nullo.
   B) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 2, 3)$ rispetto al punto $(2, 3, 1)$ è il punto $(3, 5, 4)$.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 - 4x = 0$ è una parabola.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(0, 1, 1)$,$(1, 0, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(0, 0, 0)$ è 1/3.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri reali strettamente maggiori di 1 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme **Z** dei numeri interi relativi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme delle matrici reali 50×100 è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante nullo. Allora
   A) A, B e C hanno traccia nulla.
   B) $A \cdot B \cdot C$ è la matrice nulla.
   C) può accadere che la matrice $A + B + C$ sia regolare.
   D) ${}^t(A \cdot (A - B))$ non è una matrice regolare.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita.
   B) l'insieme $\{(1, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   C) l'insieme delle matrici reali 9×9 con la prima riga nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se A ha due colonne uguali allora A^2 non è regolare.
   B) se A è invertibile e $B = A^{-1}$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
   C) se $A + B + C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   D) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) T è suriettivo se e solo se il nucleo di T contiene soltanto il vettore nullo.
   B) se T è un automorfismo allora le matrici A e B sono invertibili.
   C) A e B hanno lo stesso determinante.
   D) T e T^2 ammettono gli stessi autovalori.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v, w \in V$ allora $\langle u + v + w, u + v + w \rangle = \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle$.
   B) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle < 0$.
   C) se $u, v \in V$ e $\lambda \in I\!R$ allora $\|u + \lambda v\| \leq \|u\| + |\lambda| \|v\|$.
   D) il complemento ortogonale di ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione $n/2$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme di tutte le matrici 3×3 a coefficienti interi è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ che si possono scrivere come $k \cdot \sin x$ (con k numero reale qualunque) è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) se un insieme di 49 matrici reali 7×7 è un sistema di generatori per $M_7(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $M_7(I\!R)$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) ogni spazio vettoriale $(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$ è un anello rispetto alle operazioni $+, \cdot$.
   B) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) esistono gruppi che hanno lo stesso numero di elementi ma non sono fra loro isomorfi.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ invertibili è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y = 2$ e $x + y = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se tutte le colonne di C sono uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ non può essere vuoto.
   B) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m > n$.
   C) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 7.
   D) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A^2$ è una trasformazione lineare.
   B) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.
   C) se una matrice reale 2×2 ha determinante e traccia entrambi nulli allora è necessariamente la matrice nulla.
   D) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non strettamente superiore a n e lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^{n+1}$ sono fra loro isomorfi.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, 4)$ e la retta di equazione $x - 2y = -4$ è 1.
   B) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(4, 1)$, $(6, -3)$ è $(5, -1)$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(2, 0, 0)$, $(0, -2, -4)$, $(2, 0, -2)$ è 3.
   D) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 4xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ che si possono scrivere come $k \cdot \sin x$ (con k numero reale qualunque) è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) se un insieme di 49 matrici reali 7×7 è un sistema di generatori per $M_7(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $M_7(I\!R)$.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme di tutte le matrici 3×3 a coefficienti interi è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A \in M_n(I\!R)$ non è invertibile allora $\rho(A) \neq \rho({}^tA)$.
   B) se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili con $A^2 = B^2$ e $A^3 = B^3$ allora $A = B$.
   C) l'immagine della trasformazione lineare da $M_2(I\!R)$ ad $M_2(I\!R)$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua trasposta ha dimensione 4.
   D) la funzione $F : I\!R^2 \to I\!R$ definita come $F(x, y) = 2x - 3y + 1$ è una trasformazione lineare.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) il rango di C è sempre non inferiore al rango di A.
   B) se $m < n$ il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   D) se $m = n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non può essere vuoto.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è strettamente inferiore a n allora T non è diagonalizzabile.
   B) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è esattamente uguale ad n.
   C) se T è diagonalizzabile allora anche T^{100} è diagonalizzabile.
   D) T può ammettere più di n autovalori distinti.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A + B + C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   B) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$.
   C) se A ha due colonne uguali allora A^2 non è regolare.
   D) se A è invertibile e $B = A^{-1}$ allora A e B hanno lo stesso determinante.

6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y = 2$ e $x + y = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 4xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, 4)$ e la retta di equazione $x - 2y = -4$ è 1.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(4, 1)$, $(6, -3)$ è $(5, -1)$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(2, 0, 0)$, $(0, -2, -4)$, $(2, 0, -2)$ è 3.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) il complemento ortogonale di ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione $n/2$.
   B) se $u, v, w \in V$ allora $\langle u + v + w, u + v + w \rangle = \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle$.
   C) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle < 0$.
   D) se $u, v \in V$ e $\lambda \in I\!R$ allora $\|u + \lambda v\| \leq \|u\| + |\lambda| \|v\|$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi che hanno lo stesso numero di elementi ma non sono fra loro isomorfi.
   B) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ invertibili è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   C) ogni spazio vettoriale $(I\!K, V, +, \cdot)$ è un anello rispetto alle operazioni $+, \cdot$.
   D) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = -2t, y = t - 3, z = t$ e $x + y + z = 5$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = 0$ se e solo se u è il vettore nullo.
   B) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori di V di norma 1 allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   C) per ogni $u, v, w \in V$ si ha che se $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle$ allora $v = w$.
   D) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u - v, v \rangle \leq \langle u, v \rangle$.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante nullo. Allora
   A) $A \cdot B \cdot C$ è la matrice nulla.
   B) A, B e C hanno traccia nulla.
   C) può accadere che la matrice $A + B + C$ sia regolare.
   D) ${}^t(A \cdot (A - B))$ non è una matrice regolare.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme dei numeri reali strettamente maggiori di 1 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi relativi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme delle matrici reali 50×100 è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se una matrice reale 2×2 ha determinante e traccia entrambi nulli allora è necessariamente la matrice nulla.
   B) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non strettamente superiore a n e lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^{n+1}$ sono fra loro isomorfi.
   C) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A^2$ è una trasformazione lineare.
   D) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(1,0,0,0,0),(1,1,0,0,0),(1,1,1,0,0),(1,1,1,1,0),(1,1,1,1,1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   B) l'insieme delle successioni reali, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita.
   C) l'insieme delle matrici reali 9×9 con la prima riga nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge u$ è il vettore nullo.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 - 4x = 0$ è una parabola.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(0,1,1)$,$(1,0,1)$,$(1,1,0)$,$(0,0,0)$ è $1/3$.
   D) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1,2,3)$ rispetto al punto $(2,3,1)$ è il punto $(3,5,4)$.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 7.
   B) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   C) se tutte le colonne di C sono uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ non può essere vuoto.
   D) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m > n$.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B hanno lo stesso determinante.
   B) T e T^2 ammettono gli stessi autovalori.
   C) T è suriettivo se e solo se il nucleo di T contiene soltanto il vettore nullo.
   D) se T è un automorfismo allora le matrici A e B sono invertibili.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) l'immagine della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua trasposta ha dimensione 4.
   B) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ non è invertibile allora $\rho(A) \neq \rho({}^tA)$.
   C) se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili con $A^2 = B^2$ e $A^3 = B^3$ allora $A = B$.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y) = 2x - 3y + 1$ è una trasformazione lineare.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u - v, v \rangle \leq \langle u, v \rangle$.
   B) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = 0$ se e solo se u è il vettore nullo.
   C) per ogni $u, v, w \in V$ si ha che se $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle$ allora $v = w$.
   D) se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori di V di norma 1 allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   B) il rango di C è sempre non inferiore al rango di A.
   C) se $m < n$ il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   D) se $m = n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non può essere vuoto.

4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = -2t, y = t - 3, z = t$ e $x + y + z = 5$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 2, 3)$ rispetto al punto $(2, 3, 1)$ è il punto $(3, 5, 4)$.
   B) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge u$ è il vettore nullo.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(0, 1, 1)$,$(1, 0, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(0, 0, 0)$ è $1/3$.
   D) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 - 4x = 0$ è una parabola.

6) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora anche T^{100} è diagonalizzabile.
   B) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è strettamente inferiore a n allora T non è diagonalizzabile.
   C) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è esattamente uguale ad n.
   D) T può ammettere più di n autovalori distinti.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ invertibili è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   B) esistono gruppi che hanno lo stesso numero di elementi ma non sono fra loro isomorfi.
   C) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) ogni spazio vettoriale $(I\!\!K, V, +, \cdot)$ è un anello rispetto alle operazioni $+, \cdot$.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$.
   B) se $A + B + C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   C) se A è invertibile e $B = A^{-1}$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
   D) se A ha due colonne uguali allora A^2 non è regolare.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se un insieme di 49 matrici reali 7×7 è un sistema di generatori per $M_7(I\!\!R)$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $M_7(I\!\!R)$.
   B) l'insieme delle funzioni da $I\!\!R$ in $I\!\!R$ che si possono scrivere come $k \cdot \sin x$ (con k numero reale qualunque) è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme di tutte le matrici 3×3 a coefficienti interi è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(I\!\!R)$, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!\!R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri reali strettamente maggiori di 1 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme **Z** dei numeri interi relativi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme delle matrici reali 50×100 è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B hanno lo stesso determinante.
   B) T è suriettivo se e solo se il nucleo di T contiene soltanto il vettore nullo.
   C) T e T^2 ammettono gli stessi autovalori.
   D) se T è un automorfismo allora le matrici A e B sono invertibili.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita.
   B) l'insieme delle matrici reali 9×9 con la prima riga nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme $\{(1,0,0,0,0),(1,1,0,0,0),(1,1,1,0,0),(1,1,1,1,0),(1,1,1,1,1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

4) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante nullo. Allora
   A) A, B e C hanno traccia nulla.
   B) può accadere che la matrice $A + B + C$ sia regolare.
   C) ${}^t(A \cdot (A - B))$ non è una matrice regolare.
   D) $A \cdot B \cdot C$ è la matrice nulla.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 7.
   B) se tutte le colonne di C sono uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ non può essere vuoto.
   C) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   D) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m > n$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se una matrice reale 2×2 ha determinante e traccia entrambi nulli allora è necessariamente la matrice nulla.
   B) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A^2$ è una trasformazione lineare.
   C) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non strettamente superiore a n e lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^{n+1}$ sono fra loro isomorfi.
   D) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ allora $\|u + \lambda v\| \leq \|u\| + |\lambda|\|v\|$.
   B) il complemento ortogonale di ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione $n/2$.
   C) se $u, v, w \in V$ allora $\langle u + v + w, u + v + w \rangle = \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle$.
   D) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle < 0$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(2, 0, 0)$, $(0, -2, -4)$, $(2, 0, -2)$ è 3.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 4xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   C) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, 4)$ e la retta di equazione $x - 2y = -4$ è 1.
   D) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(4, 1)$, $(6, -3)$ è $(5, -1)$.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y = 2$ e $x + y = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y = 2$ e $x + y = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, 4)$ e la retta di equazione $x - 2y = -4$ è 1.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 4xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   C) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(4, 1)$, $(6, -3)$ è $(5, -1)$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(2, 0, 0)$, $(0, -2, -4)$, $(2, 0, -2)$ è 3.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 9×9 con la prima riga nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme delle successioni reali, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita.
   C) l'insieme $\{(1, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) T può ammettere più di n autovalori distinti.
   B) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è strettamente inferiore a n allora T non è diagonalizzabile.
   C) se T è diagonalizzabile allora anche T^{100} è diagonalizzabile.
   D) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è esattamente uguale ad n.

5) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) se $u, v, w \in V$ allora $\langle u+v+w, u+v+w\rangle = \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle + \langle w,w\rangle$.
   B) il complemento ortogonale di ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione $n/2$.
   C) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v,v\rangle < 0$.
   D) se $u, v \in V$ e $\lambda \in I\!R$ allora $\|u + \lambda v\| \leq \|u\| + |\lambda|\|v\|$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi relativi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme dei numeri reali strettamente maggiori di 1 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali 50×100 è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante nullo. Allora
   A) può accadere che la matrice $A + B + C$ sia regolare.
   B) A, B e C hanno traccia nulla.
   C) $A \cdot B \cdot C$ è la matrice nulla.
   D) ${}^t(A \cdot (A - B))$ non è una matrice regolare.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : I\!R^2 \to I\!R$ definita come $F(x,y) = 2x - 3y + 1$ è una trasformazione lineare.
   B) se $A \in M_n(I\!R)$ non è invertibile allora $\rho(A) \neq \rho({}^tA)$.
   C) l'immagine della trasformazione lineare da $M_2(I\!R)$ ad $M_2(I\!R)$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua trasposta ha dimensione 4.
   D) se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili con $A^2 = B^2$ e $A^3 = B^3$ allora $A = B$.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $m = n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non può essere vuoto.
   B) il rango di C è sempre non inferiore al rango di A.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   D) se $m < n$ il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non strettamente superiore a n e lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^{n+1}$ sono fra loro isomorfi.
   B) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.
   C) se una matrice reale 2×2 ha determinante e traccia entrambi nulli allora è necessariamente la matrice nulla.
   D) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A^2$ è una trasformazione lineare.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi che hanno lo stesso numero di elementi ma non sono fra loro isomorfi.
   B) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ invertibili è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   C) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   D) ogni spazio vettoriale $(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$ è un anello rispetto alle operazioni $+, \cdot$.

3) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) T e T^2 ammettono gli stessi autovalori.
   B) se T è un automorfismo allora le matrici A e B sono invertibili.
   C) A e B hanno lo stesso determinante.
   D) T è suriettivo se e solo se il nucleo di T contiene soltanto il vettore nullo.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 - 4x = 0$ è una parabola.
   B) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge u$ è il vettore nullo.
   C) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 2, 3)$ rispetto al punto $(2, 3, 1)$ è il punto $(3, 5, 4)$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(0, 1, 1)$,$(1, 0, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(0, 0, 0)$ è $1/3$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $I\!R$ in $I\!R$ che si possono scrivere come $k \cdot \sin x$ (con k numero reale qualunque) è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) se un insieme di 49 matrici reali 7×7 è un sistema di generatori per $M_7(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $M_7(I\!R)$.
   C) l'insieme di tutte le matrici 3×3 a coefficienti interi è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(I\!R)$, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A + B + C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   B) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$.
   C) se A è invertibile e $B = A^{-1}$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
   D) se A ha due colonne uguali allora A^2 non è regolare.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori di V di norma 1 allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   B) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = 0$ se e solo se u è il vettore nullo.
   C) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u - v, v \rangle \leq \langle u, v \rangle$.
   D) per ogni $u, v, w \in V$ si ha che se $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle$ allora $v = w$.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   B) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m > n$.
   C) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 7.
   D) se tutte le colonne di C sono uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ non può essere vuoto.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = -2t, y = t - 3, z = t$ e $x + y + z = 5$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) l'immagine della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua trasposta ha dimensione 4.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y) = 2x - 3y + 1$ è una trasformazione lineare.
   C) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ non è invertibile allora $\rho(A) \neq \rho({}^tA)$.
   D) se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili con $A^2 = B^2$ e $A^3 = B^3$ allora $A = B$.

2) Sia **S** un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente.
   A) **S** ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   B) se $m = n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non può essere vuoto.
   C) il rango di C è sempre non inferiore al rango di A.
   D) se $m < n$ il sistema **S** ammette infinite soluzioni.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = -2t, y = t - 3, z = t$ e $x + y + z = 5$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge u$ è il vettore nullo.
   B) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 2, 3)$ rispetto al punto $(2, 3, 1)$ è il punto $(3, 5, 4)$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(0, 1, 1)$,$(1, 0, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(0, 0, 0)$ è $1/3$.
   D) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 - 4x = 0$ è una parabola.

5) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora anche T^{100} è diagonalizzabile.
   B) T può ammettere più di n autovalori distinti.
   C) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è strettamente inferiore a n allora T non è diagonalizzabile.
   D) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è esattamente uguale ad n.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = 0$ se e solo se u è il vettore nullo.
   B) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u - v, v \rangle \leq \langle u, v \rangle$.
   C) per ogni $u, v, w \in V$ si ha che se $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle$ allora $v = w$.
   D) se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori di V di norma 1 allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri reali strettamente maggiori di 1 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali 50×100 è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi relativi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante nullo. Allora
   A) A, B e C hanno traccia nulla.
   B) $A \cdot B \cdot C$ è la matrice nulla.
   C) ${}^t(A \cdot (A - B))$ non è una matrice regolare.
   D) può accadere che la matrice $A + B + C$ sia regolare.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle successioni reali, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita.
   B) l'insieme $\{(1,0,0,0,0), (1,1,0,0,0), (1,1,1,0,0), (1,1,1,1,0), (1,1,1,1,1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle matrici reali 9×9 con la prima riga nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se A è invertibile e $B = A^{-1}$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
   B) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $(A+B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$.
   C) se A ha due colonne uguali allora A^2 non è regolare.
   D) se $A + B + C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme **C** dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   B) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ invertibili è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   C) ogni spazio vettoriale $(I\!\!K, V, +, \cdot)$ è un anello rispetto alle operazioni $+, \cdot$.
   D) esistono gruppi che hanno lo stesso numero di elementi ma non sono fra loro isomorfi.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme di tutte le matrici 3×3 a coefficienti interi è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(I\!\!R)$, dotato delle usuali operazioni.
   B) se un insieme di 49 matrici reali 7×7 è un sistema di generatori per $M_7(I\!\!R)$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $M_7(I\!\!R)$.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in I\!\!R^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $I\!\!R^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   D) l'insieme delle funzioni da $I\!\!R$ in $I\!\!R$ che si possono scrivere come $k \cdot \sin x$ (con k numero reale qualunque) è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v, w \in V$ allora $\langle u + v + w, u + v + w \rangle = \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle$.
   B) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle < 0$.
   C) il complemento ortogonale di ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione $n/2$.
   D) se $u, v \in V$ e $\lambda \in I\!\!R$ allora $\|u + \lambda v\| \leq \|u\| + |\lambda| \|v\|$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 7.
   B) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   C) se tutte le colonne di C sono uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ non può essere vuoto.
   D) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m > n$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se una matrice reale 2×2 ha determinante e traccia entrambi nulli allora è necessariamente la matrice nulla.
   B) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non strettamente superiore a n e lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^{n+1}$ sono fra loro isomorfi.
   C) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A^2$ è una trasformazione lineare.
   D) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.

7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y = 2$ e $x + y = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, 4)$ e la retta di equazione $x - 2y = -4$ è 1.
   B) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(4, 1)$, $(6, -3)$ è $(5, -1)$.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 4xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(2, 0, 0)$, $(0, -2, -4)$, $(2, 0, -2)$ è 3.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) A e B hanno lo stesso determinante.
   B) T e T^2 ammettono gli stessi autovalori.
   C) T è suriettivo se e solo se il nucleo di T contiene soltanto il vettore nullo.
   D) se T è un automorfismo allora le matrici A e B sono invertibili.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   B) se $m = n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non può essere vuoto.
   C) il rango di C è sempre non inferiore al rango di A.
   D) se $m < n$ il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.

2) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se T è diagonalizzabile allora anche T^{100} è diagonalizzabile.
   B) T può ammettere più di n autovalori distinti.
   C) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è strettamente inferiore a n allora T non è diagonalizzabile.
   D) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è esattamente uguale ad n.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v, w \in V$ allora $\langle u + v + w, u + v + w \rangle = \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle$.
   B) il complemento ortogonale di ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione $n/2$.
   C) se $u, v \in V$ e $\lambda \in I\!R$ allora $\|u + \lambda v\| \leq \|u\| + |\lambda| \|v\|$.
   D) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle < 0$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) ogni spazio vettoriale $(I\!K, V, +, \cdot)$ è un anello rispetto alle operazioni $+, \cdot$.
   B) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.
   C) esistono gruppi che hanno lo stesso numero di elementi ma non sono fra loro isomorfi.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ invertibili è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y = 2$ e $x + y = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, 4)$ e la retta di equazione $x - 2y = -4$ è 1.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 4xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(2, 0, 0)$, $(0, -2, -4)$, $(2, 0, -2)$ è 3.
   D) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(4, 1)$, $(6, -3)$ è $(5, -1)$.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se A ha due colonne uguali allora A^2 non è regolare.
   B) se A è invertibile e $B = A^{-1}$ allora A e B hanno lo stesso determinante.
   C) se $A + B + C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   D) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme di tutte le matrici 3×3 a coefficienti interi è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si possono scrivere come $k \cdot \sin x$ (con k numero reale qualunque) è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) se un insieme di 49 matrici reali 7×7 è un sistema di generatori per $M_7(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $M_7(\mathbb{R})$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) l'immagine della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua trasposta ha dimensione 4.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y) = 2x - 3y + 1$ è una trasformazione lineare.
   C) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ non è invertibile allora $\rho(A) \neq \rho({}^tA)$.
   D) se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili con $A^2 = B^2$ e $A^3 = B^3$ allora $A = B$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante nullo. Allora
   A) può accadere che la matrice $A + B + C$ sia regolare.
   B) ${}^t(A \cdot (A - B))$ non è una matrice regolare.
   C) $A \cdot B \cdot C$ è la matrice nulla.
   D) A, B e C hanno traccia nulla.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi relativi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme delle matrici reali 50×100 è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme dei numeri reali strettamente maggiori di 1 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non strettamente superiore a n e lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^{n+1}$ sono fra loro isomorfi.
   B) se una matrice reale 2×2 ha determinante e traccia entrambi nulli allora è necessariamente la matrice nulla.
   C) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.
   D) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A^2$ è una trasformazione lineare.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 9×9 con la prima riga nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   B) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(1, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1, 1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme delle successioni reali, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = -2t, y = t - 3, z = t$ e $x + y + z = 5$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u - v, v \rangle \leq \langle u, v \rangle$.
   B) se $v_1, \ldots, v_n$ sono vettori di V di norma 1 allora $\{v_1, \ldots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   C) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = 0$ se e solo se u è il vettore nullo.
   D) per ogni $u, v, w \in V$ si ha che se $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle$ allora $v = w$.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) T e T^2 ammettono gli stessi autovalori.
   B) A e B hanno lo stesso determinante.
   C) se T è un automorfismo allora le matrici A e B sono invertibili.
   D) T è suriettivo se e solo se il nucleo di T contiene soltanto il vettore nullo.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 2, 3)$ rispetto al punto $(2, 3, 1)$ è il punto $(3, 5, 4)$.
   B) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 - 4x = 0$ è una parabola.
   C) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge u$ è il vettore nullo.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(0, 1, 1)$,$(1, 0, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(0, 0, 0)$ è $1/3$.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   B) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 7.
   C) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m > n$.
   D) se tutte le colonne di C sono uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ non può essere vuoto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v_1, \dots, v_n$ sono vettori di V di norma 1 allora $\{v_1, \dots, v_n\}$ è una base ortonormale di V.
   B) per ogni $u \in V$ risulta $\langle u, u \rangle = 0$ se e solo se u è il vettore nullo.
   C) per ogni $u, v, w \in V$ si ha che se $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle$ allora $v = w$.
   D) per ogni $u, v \in V$ risulta $\langle u - v, v \rangle \leq \langle u, v \rangle$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $A \in M_n(\mathbb{R})$ non è invertibile allora $\rho(A) \neq \rho({}^tA)$.
   B) l'immagine della trasformazione lineare da $M_2(\mathbb{R})$ ad $M_2(\mathbb{R})$ che manda ogni matrice reale 2×2 nella sua trasposta ha dimensione 4.
   C) la funzione $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita come $F(x, y) = 2x - 3y + 1$ è una trasformazione lineare.
   D) se A e B sono due matrici reali $n \times n$ invertibili con $A^2 = B^2$ e $A^3 = B^3$ allora $A = B$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) il rango di C è sempre non inferiore al rango di A.
   B) $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se $\rho(A) = \rho(C)$.
   C) se $m = n$ l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ non può essere vuoto.
   D) se $m < n$ il sistema $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 + 2xy + y^2 - 4x = 0$ è una parabola.
   B) se u è un vettore dello spazio vettoriale euclideo standard di dimensione 3, orientato in modo naturale, si ha che $u \wedge u$ è il vettore nullo.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il volume del 3-simplesso di vertici $(0, 1, 1)$,$(1, 0, 1)$,$(1, 1, 0)$,$(0, 0, 0)$ è 1/3.
   D) nel piano euclideo standard il punto simmetrico del punto $(1, 2, 3)$ rispetto al punto $(2, 3, 1)$ è il punto $(3, 5, 4)$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi che hanno lo stesso numero di elementi ma non sono fra loro isomorfi.
   B) ogni spazio vettoriale $(\mathbb{K}, V, +, \cdot)$ è un anello rispetto alle operazioni $+, \cdot$.
   C) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ invertibili è un gruppo rispetto alla usuale operazione di prodotto righe per colonne.
   D) l'insieme $\mathbf{C}$ dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e di prodotto.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. È vero che
   A) se $A + B + C$ è una matrice regolare allora anche A, B e C sono matrici regolari.
   B) se A ha due colonne uguali allora A^2 non è regolare.
   C) se $A \cdot B = B \cdot A$ allora $(A + B)^2 = A^2 + 2A \cdot B + B^2$.
   D) se A è invertibile e $B = A^{-1}$ allora A e B hanno lo stesso determinante.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che si possono scrivere come $k \cdot \sin x$ (con k numero reale qualunque) è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) se un insieme di 49 matrici reali 7×7 è un sistema di generatori per $M_7(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni che lo rendono uno spazio vettoriale reale) allora è necessariamente una base di $M_7(\mathbb{R})$.
   D) l'insieme di tutte le matrici 3×3 a coefficienti interi è un sistema di generatori per lo spazio vettoriale reale $M_3(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametrica e cartesiana $x = -2t, y = t - 3, z = t$ e $x + y + z = 5$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono una retta ed un piano fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

9) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una data base $\mathcal{B}$ di V. Allora
   A) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è strettamente inferiore a n allora T non è diagonalizzabile.
   B) se T è diagonalizzabile allora anche T^{100} è diagonalizzabile.
   C) T può ammettere più di n autovalori distinti.
   D) se A è una matrice reale simmetrica allora la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori reali è esattamente uguale ad n.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è (se ve ne sono) -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, v \rangle < 0$.
   B) se $u, v \in V$ e $\lambda \in I\!R$ allora $\|u + \lambda v\| \leq \|u\| + |\lambda| \|v\|$.
   C) il complemento ortogonale di ogni sottospazio vettoriale di V ha dimensione $n/2$.
   D) se $u, v, w \in V$ allora $\langle u + v + w, u + v + w \rangle = \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle + \langle w, w \rangle$.

2) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ con determinante nullo. Allora
   A) $A \cdot B \cdot C$ è la matrice nulla.
   B) può accadere che la matrice $A + B + C$ sia regolare.
   C) ${}^t(A \cdot (A - B))$ non è una matrice regolare.
   D) A, B e C hanno traccia nulla.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(1,0,0,0,0), (1,1,0,0,0), (1,1,1,0,0), (1,1,1,1,0), (1,1,1,1,1)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 5-dimensionale sul campo $I\!R$.
   B) l'insieme delle matrici reali 9×9 con la prima riga nulla è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $M_9(I\!R)$ (dotato delle usuali operazioni), rispetto alle operazioni indotte.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle successioni reali, dotato delle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare, è uno spazio vettoriale reale di dimensione finita.

4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni cartesiane $x - y = 2$ e $x + y = 0$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente.
   A) se $\mathbf{S}$ è un sistema lineare omogeneo ammette sempre almeno una soluzione.
   B) se tutte le colonne di C sono uguali fra loro allora $Sol(\mathbf{S})$ non può essere vuoto.
   C) se l'insieme $Sol(\mathbf{S})$ è vuoto allora $m > n$.
   D) può accadere che A abbia rango 5 e C abbia rango 7.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali di grado non strettamente superiore a n e lo spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^{n+1}$ sono fra loro isomorfi.
   B) la funzione $F : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definita da $F(A) = A^2$ è una trasformazione lineare.
   C) se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$.
   D) se una matrice reale 2×2 ha determinante e traccia entrambi nulli allora è necessariamente la matrice nulla.

7) Sia T un endomorfismo su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate di V. Allora
   A) T e T^2 ammettono gli stessi autovalori.
   B) T è suriettivo se e solo se il nucleo di T contiene soltanto il vettore nullo.
   C) se T è un automorfismo allora le matrici A e B sono invertibili.
   D) A e B hanno lo stesso determinante.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard il punto medio del segmento di estremi $(4, 1)$, $(6, -3)$ è $(5, -1)$.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale l'area del triangolo di vertici $(2, 0, 0)$, $(0, -2, -4)$, $(2, 0, -2)$ è 3.
   C) nel piano euclideo standard la conica di equazione $x^2 - 4xy + y^2 - 1 = 0$ è una iperbole.
   D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, 4)$ e la retta di equazione $x - 2y = -4$ è 1.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme $\mathbf{Z}$ dei numeri interi relativi è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme delle matrici reali 50×100 è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme dei numeri reali strettamente maggiori di 1 è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.