Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
   A) insieme delle matrici reali 3×3 a determinante nullo, con l'usuale prodotto di matrici.
   B) Insieme di tutte le funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ che si possono scrivere come $a \sin x + b \cos x$ (a, b numeri reali qualunque), con l'usuale somma di funzioni.
   C) $(\mathbf{R}^5, -)$ ($\mathbf{R}^5$ = insieme delle 5-uple ordinate di numeri reali, $-$ = usuale differenza di 5-uple).
   D) $(\mathbf{N}, +)$ ($\mathbf{N}$ = insieme dei numeri naturali, $+$ = usuale somma di numeri naturali).

2) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $\det(A \cdot {}^tB) = \det A \cdot \det B$.
   B) se $\det B \neq 0$ allora $\det(A \cdot B^{-1}) = \det A - \det B$.
   C) $(A \cdot B)^4 = A^4 \cdot B^4$.
   D) $Tr(A \cdot B \cdot C) = Tr(A)Tr(B)Tr(C)$.

3) Indichiamo con $\mathbf{R}^n$ lo spazio vettoriale standard n-dimensionale sul campo $\mathbf{R}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(1,1,1,1,1),(2,2,2,2,2),(3,3,3,3,3),(4,4,4,4,4),(5,5,5,5,5)\}$ è una base per $\mathbf{R}^5$.
   B) l'insieme $\{(1,1,0,3),(1,2,-1,-2),(3,1,3,-1),(4,3,1,0),(5,-2,-2,8)\}$ è linearmente dipendente in $\mathbf{R}^4$.
   C) se ciascuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^9$ allora anche $A \cup B$ lo è.
   D) se ciascuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^9$ allora anche $A \cap B$ lo è.

4) Siano S e T due isomorfismi da uno spazio vettoriale W ad uno spazio vettoriale U, entrambi di dimensione $n > 0$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $\dim(\ker\ T) = \dim(\ker\ T^{-1})$.
   B) $S + T$ è iniettiva.
   C) $\dim\big(\ker\ (S^{-1} \circ T \circ S^{-1} \circ T)\big) = n$.
   D) la funzione $9T$ è anch'essa un isomorfismo.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite e sia x una sua soluzione. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $y + x$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.
   B) se $m < n$ allora $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   C) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti e si ha $m = n$ allora $\mathbf{S}$ deve avere altre soluzioni oltre ad x.
   D) $\rho(A) = \rho(C)$.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $v_1, \dots, v_k$ sono autovettori di T allora l'insieme $\{v_1, \dots, v_k\}$ è linearmente indipendente.
   B) T ammette esattamente n autovalori distinti.
   C) se la matrice B è simile ad A allora esiste una base di V tale che B è la matrice di T rispetto a quella base.
   D) il polinomio caratteristico di T ammette sempre almeno una radice reale.

7) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Allora
   A) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, 2v\rangle \geq 0$.
   B) per $u, v \in V$ si ha $\langle u, v\rangle \geq 0$.
   C) la relazione di ortogonalità fra i vettori di V è transitiva.
   D) se U è un sottospazio di V e $\dim U = n$ allora anche $\dim^{\perp} U = n$.

8) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 1$ e $-10x + 5y = 3$ sono fra loro parallele.
   B) la distanza fra il punto di coordinate $(1, 1)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 0$ è $\sqrt{3/2}$.
   C) la curva di equazione $y = 3x^4$ è una parabola.
   D) il risultato del prodotto vettoriale $(1, 0, 1) \wedge (0, 1, 0)$ è il vettore $(-1, 0, 1)$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia T un endomorfismo diagonalizzabile di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate e distinte di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se v è un autovettore di T e T è invertibile allora v è anche un autovettore di T^{-1}.
   B) gli autovalori non nulli di T^2 sono tutti positivi.
   C) A è necessariamente diversa da B.
   D) $Tr(A) = Tr(B)$.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) il risultato del prodotto vettoriale $(0,0,1) \wedge (1,1,0)$ è il vettore $(-1,1,0)$.
   B) le rette di equazioni $3x - y = 0$ e $x + 3y = 0$ formano un angolo di $\pi/3$ radianti.
   C) la curva di equazione $x^4 - 3y^4 = 1$ è un'iperbole.
   D) se il punto P ha coordinate $(10, -10)$ e il punto Q ha coordinate $(-10, 10)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(0, 0)$.

3) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -2 \\ y = s \\ z = 3t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale al piano di equazione $z = 4$.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo al piano di equazione $y = 2$.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale al piano di equazione $z = 3$.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta parallela al piano di equazione $x = 1$.

4) Siano S e T due automorfismi di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $S + T$ è ancora un automorfismo di V.
   B) $\dim(Im\ T^{100}) = n$.
   C) $S \circ T$ è ancora un automorfismo di V.
   D) $\det(A^{100}) = 1$.

5) Siano A, B e C tre matrici reali ortogonali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $\det(A \cdot B \cdot C) \neq 0$.
   B) la matrice $A \cdot B \cdot C$ è ortogonale.
   C) $\det(A^2) = 1$.
   D) la matrice $A + B + C$ è ortogonale.

6) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
   A) $(\mathbf{C}, +)$($\mathbf{C}$ = insieme dei numeri complessi, $+$ = usuale somma di numeri complessi).
   B) l'insieme dei polinomi in una variabile t a coefficienti interi, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme $\mathbf{Z}_4$ delle classi di resto modulo 4, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$($\mathbf{Q}$ = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri razionali).

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se le righe di A sono linearmente indipendenti ed $m = n$ allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   B) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ è uno spazio vettoriale.
   C) $\rho(C) = \rho(A)$.
   D) il sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se ne ammette anche $\mathbf{S}$.

8) Indichiamo con $\mathbf{R}^n$ lo spazio vettoriale standard n-dimensionale sul campo $\mathbf{R}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(0,0,0),(1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)\}$ è una base per $\mathbf{R}^3$.
   B) se nessuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^7$ allora nemmeno $A \cup B$ lo è.
   C) l'insieme di tutte le quintuple ordinate di numeri positivi è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^5$.
   D) se nessuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^7$ allora nemmeno $A \cap B$ lo è.

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) V ammette infinite basi ortogonali distinte.
   B) se $u, v \in V$ allora $\|u\|\|v\| = \|u + v\|^2$.
   C) se $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di V allora i vettori $v_1, \cdots, v_n$ sono a due a due ortogonali.
   D) se $v, w \in V$ e $v \neq w$ allora $\langle v - w, w - v \rangle < 0$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $Tr(A \cdot B \cdot C) = Tr(A)Tr(B)Tr(C)$.
   B) $\det(A \cdot {}^tB) = \det A \cdot \det B$.
   C) se $\det B \neq 0$ allora $\det(A \cdot B^{-1}) = \det A - \det B$.
   D) $(A \cdot B)^4 = A^4 \cdot B^4$.

2) Sia **S** un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite e sia x una sua soluzione. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\rho(A) = \rho(C)$.
   B) se le equazioni di **S** sono linearmente dipendenti e si ha $m = n$ allora **S** deve avere altre soluzioni oltre ad x.
   C) se $m < n$ allora **S** ammette infinite soluzioni.
   D) se y è soluzione di **S** allora $y + x$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad **S**.

3) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) il polinomio caratteristico di T ammette sempre almeno una radice reale.
   B) se la matrice B è simile ad A allora esiste una base di V tale che B è la matrice di T rispetto a quella base.
   C) T ammette esattamente n autovalori distinti.
   D) se $v_1, \ldots, v_k$ sono autovettori di T allora l'insieme $\{v_1, \ldots, v_k\}$ è linearmente indipendente.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v, w \in V$ e $v \neq w$ allora $\langle v - w, w - v \rangle < 0$.
   B) se $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di V allora i vettori $v_1, \cdots, v_n$ sono a due a due ortogonali.
   C) V ammette infinite basi ortogonali distinte.
   D) se $u, v \in V$ allora $\|u\|\|v\| = \|u + v\|^2$.

5) Indichiamo con $\mathbf{R}^n$ lo spazio vettoriale standard n-dimensionale sul campo $\mathbf{R}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se ciascuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^9$ allora anche $A \cap B$ lo è.
   B) l'insieme $\{(1,1,1,1,1), (2,2,2,2,2), (3,3,3,3,3), (4,4,4,4,4), (5,5,5,5,5)\}$ è una base per $\mathbf{R}^5$.
   C) l'insieme $\{(1,1,0,3), (1,2,-1,-2), (3,1,3,-1), (4,3,1,0), (5,-2,-2,8)\}$ è linearmente dipendente in $\mathbf{R}^4$.
   D) se ciascuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^9$ allora anche $A \cup B$ lo è.

6) Siano S e T due isomorfismi da uno spazio vettoriale W ad uno spazio vettoriale U, entrambi di dimensione $n > 0$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) la funzione $9T$ è anch'essa un isomorfismo.
   B) $\dim\big(\ker\,(S^{-1} \circ T \circ S^{-1} \circ T)\big) = n$.
   C) $S + T$ è iniettiva.
   D) $\dim(\ker\ T) = \dim(\ker\ T^{-1})$.

7) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -2 \\ y = s \\ z = 3t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela al piano di equazione $x = 1$.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale al piano di equazione $z = 3$.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale al piano di equazione $z = 4$.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo al piano di equazione $y = 2$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) se il punto P ha coordinate $(10, -10)$ e il punto Q ha coordinate $(-10, 10)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(0, 0)$.
   B) la curva di equazione $x^4 - 3y^4 = 1$ è un'iperbole.
   C) il risultato del prodotto vettoriale $(0, 0, 1) \wedge (1, 1, 0)$ è il vettore $(-1, 1, 0)$.
   D) le rette di equazioni $3x - y = 0$ e $x + 3y = 0$ formano un angolo di $\pi/3$ radianti.

9) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
   A) $(\mathbf{N}, +)$ ($\mathbf{N}$ = insieme dei numeri naturali, $+$ = usuale somma di numeri naturali).
   B) insieme delle matrici reali 3×3 a determinante nullo, con l'usuale prodotto di matrici.
   C) Insieme di tutte le funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ che si possono scrivere come $a \sin x + b \cos x$ (a, b numeri reali qualunque), con l'usuale somma di funzioni.
   D) $(\mathbf{R}^5, -)$ ($\mathbf{R}^5$ = insieme delle 5-uple ordinate di numeri reali, $-$ = usuale differenza di 5-uple).

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   - A) la distanza fra il punto di coordinate $(1, 1)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 0$ è $\sqrt{3/2}$.
   - B) la curva di equazione $y = 3x^4$ è una parabola.
   - C) il risultato del prodotto vettoriale $(1, 0, 1) \wedge (0, 1, 0)$ è il vettore $(-1, 0, 1)$.
   - D) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 1$ e $-10x + 5y = 3$ sono fra loro parallele.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   - A) il sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se ne ammette anche $\mathbf{S}$.
   - B) $\rho(C) = \rho(A)$.
   - C) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ è uno spazio vettoriale.
   - D) se le righe di A sono linearmente indipendenti ed $m = n$ allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.

3) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
   - A) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$($\mathbf{Q}$ = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri razionali).
   - B) l'insieme dei polinomi in una variabile t a coefficienti interi, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
   - C) $(\mathbf{C}, +)$($\mathbf{C}$ = insieme dei numeri complessi, $+$ = usuale somma di numeri complessi).
   - D) l'insieme $\mathbf{Z}_4$ delle classi di resto modulo 4, con le usuali operazioni di somma e prodotto.

4) Sia T un endomorfismo diagonalizzabile di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate e distinte di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   - A) $Tr(A) = Tr(B)$.
   - B) A è necessariamente diversa da B.
   - C) gli autovalori non nulli di T^2 sono tutti positivi.
   - D) se v è un autovettore di T e T è invertibile allora v è anche un autovettore di T^{-1}.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.
C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
D) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Allora

A) per $u, v \in V$ si ha $\langle u, v \rangle \geq 0$.
B) la relazione di ortogonalità fra i vettori di V è transitiva.
C) se U è un sottospazio di V e $\dim U = n$ allora anche $\dim^{\perp} U = n$.
D) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, 2v \rangle \geq 0$.

7) Indichiamo con $\mathbf{R}^n$ lo spazio vettoriale standard n-dimensionale sul campo $\mathbf{R}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) se nessuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^7$ allora nemmeno $A \cap B$ lo è.
B) se nessuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^7$ allora nemmeno $A \cup B$ lo è.
C) l'insieme $\{(0,0,0), (1,0,0), (0,2,0), (0,0,3)\}$ è una base per $\mathbf{R}^3$.
D) l'insieme di tutte le quintuple ordinate di numeri positivi è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^5$.

8) Siano A, B e C tre matrici reali ortogonali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) la matrice $A + B + C$ è ortogonale.
B) la matrice $A \cdot B \cdot C$ è ortogonale.
C) $\det(A \cdot B \cdot C) \neq 0$.
D) $\det(A^2) = 1$.

9) Siano S e T due automorfismi di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) $\det(A^{100}) = 1$.
B) $S \circ T$ è ancora un automorfismo di V.
C) $\dim(Im\ T^{100}) = n$.
D) $S + T$ è ancora un automorfismo di V.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali ortogonali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) la matrice $A + B + C$ è ortogonale.
   B) $\det(A \cdot B \cdot C) \neq 0$.
   C) la matrice $A \cdot B \cdot C$ è ortogonale.
   D) $\det(A^2) = 1$.

2) Indichiamo con $\mathbf{R}^n$ lo spazio vettoriale standard n-dimensionale sul campo $\mathbf{R}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se nessuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^7$ allora nemmeno $A \cap B$ lo è.
   B) l'insieme $\{(0,0,0), (1,0,0), (0,2,0), (0,0,3)\}$ è una base per $\mathbf{R}^3$.
   C) se nessuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^7$ allora nemmeno $A \cup B$ lo è.
   D) l'insieme di tutte le quintuple ordinate di numeri positivi è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^5$.

3) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.

4) Siano S e T due isomorfismi da uno spazio vettoriale W ad uno spazio vettoriale U, entrambi di dimensione $n > 0$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $S + T$ è iniettiva.
   B) $\dim(\ker\ T) = \dim(\ker\ T^{-1})$.
   C) la funzione $9T$ è anch'essa un isomorfismo.
   D) $\dim\big(\ker\ (S^{-1} \circ T \circ S^{-1} \circ T)\big) = n$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite e sia x una sua soluzione. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $m < n$ allora $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   B) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $y + x$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.
   C) $\rho(A) = \rho(C)$.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti e si ha $m = n$ allora $\mathbf{S}$ deve avere altre soluzioni oltre ad x.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) T ammette esattamente n autovalori distinti.
   B) se $v_1, \ldots, v_k$ sono autovettori di T allora l'insieme $\{v_1, \ldots, v_k\}$ è linearmente indipendente.
   C) il polinomio caratteristico di T ammette sempre almeno una radice reale.
   D) se la matrice B è simile ad A allora esiste una base di V tale che B è la matrice di T rispetto a quella base.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Allora
   A) per $u, v \in V$ si ha $\langle u, v \rangle \geq 0$.
   B) se U è un sottospazio di V e $\dim U = n$ allora anche $\dim^{\perp} U = n$.
   C) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, 2v \rangle \geq 0$.
   D) la relazione di ortogonalità fra i vettori di V è transitiva.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(1, 1)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 0$ è $\sqrt{3/2}$.
   B) il risultato del prodotto vettoriale $(1, 0, 1) \wedge (0, 1, 0)$ è il vettore $(-1, 0, 1)$.
   C) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 1$ e $-10x + 5y = 3$ sono fra loro parallele.
   D) la curva di equazione $y = 3x^4$ è una parabola.

9) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
   A) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$($\mathbf{Q}$ = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri razionali).
   B) $(\mathbf{C}, +)$($\mathbf{C}$ = insieme dei numeri complessi, $+$ = usuale somma di numeri complessi).
   C) l'insieme dei polinomi in una variabile t a coefficienti interi, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme $\mathbf{Z}_4$ delle classi di resto modulo 4, con le usuali operazioni di somma e prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di V allora i vettori $v_1, \cdots, v_n$ sono a due a due ortogonali.
   B) se $v, w \in V$ e $v \neq w$ allora $\langle v - w, w - v \rangle < 0$.
   C) se $u, v \in V$ allora $\|u\| \|v\| = \|u + v\|^2$.
   D) V ammette infinite basi ortogonali distinte.

2) Sia T un endomorfismo diagonalizzabile di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate e distinte di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) gli autovalori non nulli di T^2 sono tutti positivi.
   B) se v è un autovettore di T e T è invertibile allora v è anche un autovettore di T^{-1}.
   C) A è necessariamente diversa da B.
   D) $Tr(A) = Tr(B)$.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $\det B \neq 0$ allora $\det(A \cdot B^{-1}) = \det A - \det B$.
   B) $(A \cdot B)^4 = A^4 \cdot B^4$.
   C) $\det(A \cdot {}^tB) = \det A \cdot \det B$.
   D) $Tr(A \cdot B \cdot C) = Tr(A)Tr(B)Tr(C)$.

4) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
   A) Insieme di tutte le funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ che si possono scrivere come $a \sin x + b \cos x$ (a, b numeri reali qualunque), con l'usuale somma di funzioni.
   B) $(\mathbf{R}^5, -)$ ($\mathbf{R}^5$ = insieme delle 5-uple ordinate di numeri reali, $-$ = usuale differenza di 5-uple).
   C) insieme delle matrici reali 3×3 a determinante nullo, con l'usuale prodotto di matrici.
   D) $(\mathbf{N}, +)$ ($\mathbf{N}$ = insieme dei numeri naturali, $+$ = usuale somma di numeri naturali).

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -2 \\ y = s \\ z = 3t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale al piano di equazione $z = 3$.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela al piano di equazione $x = 1$.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo al piano di equazione $y = 2$.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale al piano di equazione $z = 4$.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) la curva di equazione $x^4 - 3y^4 = 1$ è un'iperbole.
   B) se il punto P ha coordinate $(10, -10)$ e il punto Q ha coordinate $(-10, 10)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(0, 0)$.
   C) le rette di equazioni $3x - y = 0$ e $x + 3y = 0$ formano un angolo di $\pi/3$ radianti.
   D) il risultato del prodotto vettoriale $(0, 0, 1) \wedge (1, 1, 0)$ è il vettore $(-1, 1, 0)$.

7) Siano S e T due automorfismi di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $\dim(Im\ T^{100}) = n$.
   B) $S + T$ è ancora un automorfismo di V.
   C) $S \circ T$ è ancora un automorfismo di V.
   D) $\det(A^{100}) = 1$.

8) Indichiamo con $\mathbf{R}^n$ lo spazio vettoriale standard n-dimensionale sul campo $\mathbf{R}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(1, 1, 0, 3), (1, 2, -1, -2), (3, 1, 3, -1), (4, 3, 1, 0), (5, -2, -2, 8)\}$ è linearmente dipendente in $\mathbf{R}^4$.
   B) se ciascuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^9$ allora anche $A \cup B$ lo è.
   C) l'insieme $\{(1, 1, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 2, 2), (3, 3, 3, 3, 3), (4, 4, 4, 4, 4), (5, 5, 5, 5, 5)\}$ è una base per $\mathbf{R}^5$.
   D) se ciascuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^9$ allora anche $A \cap B$ lo è.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ è uno spazio vettoriale.
   B) se le righe di A sono linearmente indipendenti ed $m = n$ allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   C) $\rho(C) = \rho(A)$.
   D) il sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se ne ammette anche $\mathbf{S}$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali ortogonali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) la matrice $A \cdot B \cdot C$ è ortogonale.
   B) $\det(A^2) = 1$.
   C) la matrice $A + B + C$ è ortogonale.
   D) $\det(A \cdot B \cdot C) \neq 0$.

2) Indichiamo con $\mathbf{R}^n$ lo spazio vettoriale standard n-dimensionale sul campo $\mathbf{R}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se nessuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^7$ allora nemmeno $A \cup B$ lo è.
   B) l'insieme di tutte le quintuple ordinate di numeri positivi è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^5$.
   C) se nessuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^7$ allora nemmeno $A \cap B$ lo è.
   D) l'insieme $\{(0,0,0),(1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)\}$ è una base per $\mathbf{R}^3$.

3) Siano S e T due isomorfismi da uno spazio vettoriale W ad uno spazio vettoriale U, entrambi di dimensione $n > 0$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $S + T$ è iniettiva.
   B) $\dim\big(\ker\,(S^{-1} \circ T \circ S^{-1} \circ T)\big) = n$.
   C) $\dim(\ker\ T) = \dim(\ker\ T^{-1})$.
   D) la funzione $9T$ è anch'essa un isomorfismo.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite e sia x una sua soluzione. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $m < n$ allora $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   B) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti e si ha $m = n$ allora $\mathbf{S}$ deve avere altre soluzioni oltre ad x.
   C) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $y + x$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.
   D) $\rho(A) = \rho(C)$.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) se il punto P ha coordinate $(10, -10)$ e il punto Q ha coordinate $(-10, 10)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(0,0)$.
   B) il risultato del prodotto vettoriale $(0,0,1) \wedge (1,1,0)$ è il vettore $(-1,1,0)$.
   C) le rette di equazioni $3x - y = 0$ e $x + 3y = 0$ formano un angolo di $\pi/3$ radianti.
   D) la curva di equazione $x^4 - 3y^4 = 1$ è un'iperbole.

6) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?

A) l'insieme dei polinomi in una variabile t a coefficienti interi, con le usuali operazioni di somma e prodotto.

B) l'insieme $\mathbf{Z}_4$ delle classi di resto modulo 4, con le usuali operazioni di somma e prodotto.

C) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$($\mathbf{Q}$ = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri razionali).

D) $(\mathbf{C}, +)$($\mathbf{C}$ = insieme dei numeri complessi, $+$ = usuale somma di numeri complessi).

7) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) T ammette esattamente n autovalori distinti.

B) se la matrice B è simile ad A allora esiste una base di V tale che B è la matrice di T rispetto a quella base.

C) se $v_1, \dots, v_k$ sono autovettori di T allora l'insieme $\{v_1, \dots, v_k\}$ è linearmente indipendente.

D) il polinomio caratteristico di T ammette sempre almeno una radice reale.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora

A) se $v, w \in V$ e $v \neq w$ allora $\langle v - w, w - v \rangle < 0$.

B) V ammette infinite basi ortogonali distinte.

C) se $u, v \in V$ allora $\|u\|\|v\| = \|u + v\|^2$.

D) se $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di V allora i vettori $v_1, \cdots, v_n$ sono a due a due ortogonali.

9) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -2 \\ y = s \\ z = 3t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela al piano di equazione $x = 1$.

B) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale al piano di equazione $z = 4$.

C) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo al piano di equazione $y = 2$.

D) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale al piano di equazione $z = 3$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se le righe di A sono linearmente indipendenti ed $m = n$ allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   B) $\rho(C) = \rho(A)$.
   C) il sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se ne ammette anche $\mathbf{S}$.
   D) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ è uno spazio vettoriale.

2) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

3) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
   A) insieme delle matrici reali 3×3 a determinante nullo, con l'usuale prodotto di matrici.
   B) Insieme di tutte le funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ che si possono scrivere come $a \sin x + b \cos x$ (a, b numeri reali qualunque), con l'usuale somma di funzioni.
   C) $(\mathbf{N}, +)$ ($\mathbf{N}$ = insieme dei numeri naturali, $+$ = usuale somma di numeri naturali).
   D) $(\mathbf{R}^5, -)$ ($\mathbf{R}^5$ = insieme delle 5-uple ordinate di numeri reali, $-$ = usuale differenza di 5-uple).

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la curva di equazione $y = 3x^4$ è una parabola.
   B) la distanza fra il punto di coordinate $(1, 1)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 0$ è $\sqrt{3/2}$.
   C) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 1$ e $-10x + 5y = 3$ sono fra loro parallele.
   D) il risultato del prodotto vettoriale $(1, 0, 1) \wedge (0, 1, 0)$ è il vettore $(-1, 0, 1)$.

5) Indichiamo con $\mathbf{R}^n$ lo spazio vettoriale standard n-dimensionale sul campo $\mathbf{R}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(1,1,1,1,1),(2,2,2,2,2),(3,3,3,3,3),(4,4,4,4,4),(5,5,5,5,5)\}$ è una base per $\mathbf{R}^5$.
   B) l'insieme $\{(1,1,0,3),(1,2,-1,-2),(3,1,3,-1),(4,3,1,0),(5,-2,-2,8)\}$ è linearmente dipendente in $\mathbf{R}^4$.
   C) se ciascuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^9$ allora anche $A \cap B$ lo è.
   D) se ciascuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^9$ allora anche $A \cup B$ lo è.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $\det(A \cdot {}^tB) = \det A \cdot \det B$.
   B) se $\det B \neq 0$ allora $\det(A \cdot B^{-1}) = \det A - \det B$.
   C) $Tr(A \cdot B \cdot C) = Tr(A)Tr(B)Tr(C)$.
   D) $(A \cdot B)^4 = A^4 \cdot B^4$.

7) Sia T un endomorfismo diagonalizzabile di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate e distinte di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se v è un autovettore di T e T è invertibile allora v è anche un autovettore di T^{-1}.
   B) A è necessariamente diversa da B.
   C) $Tr(A) = Tr(B)$.
   D) gli autovalori non nulli di T^2 sono tutti positivi.

8) Siano S e T due automorfismi di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $S + T$ è ancora un automorfismo di V.
   B) $S \circ T$ è ancora un automorfismo di V.
   C) $\det(A^{100}) = 1$.
   D) $\dim(Im\ T^{100}) = n$.

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Allora
   A) la relazione di ortogonalità fra i vettori di V è transitiva.
   B) per $u, v \in V$ si ha $\langle u, v \rangle \geq 0$.
   C) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, 2v \rangle \geq 0$.
   D) se U è un sottospazio di V e $\dim U = n$ allora anche $\dim {}^{\perp}U = n$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Indichiamo con $\mathbf{R}^n$ lo spazio vettoriale standard n-dimensionale sul campo $\mathbf{R}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(1,1,0,3),(1,2,-1,-2),(3,1,3,-1),(4,3,1,0),(5,-2,-2,8)\}$ è linearmente dipendente in $\mathbf{R}^4$.
   B) se ciascuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^9$ allora anche $A \cap B$ lo è.
   C) se ciascuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^9$ allora anche $A \cup B$ lo è.
   D) l'insieme $\{(1,1,1,1,1),(2,2,2,2,2),(3,3,3,3,3),(4,4,4,4,4),(5,5,5,5,5)\}$ è una base per $\mathbf{R}^5$.

2) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ y=1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(1,1)$ e la retta di equazione $2x-3y=0$ è $\sqrt{3/2}$.
   B) le rette di equazioni cartesiane $4x-2y=1$ e $-10x+5y=3$ sono fra loro parallele.
   C) la curva di equazione $y=3x^4$ è una parabola.
   D) il risultato del prodotto vettoriale $(1,0,1)\wedge(0,1,0)$ è il vettore $(-1,0,1)$.

4) Siano S e T due isomorfismi da uno spazio vettoriale W ad uno spazio vettoriale U, entrambi di dimensione $n>0$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) la funzione $9T$ è anch'essa un isomorfismo.
   B) $\dim\big(\ker\,(S^{-1}\circ T\circ S^{-1}\circ T)\big)=n$.
   C) $\dim(\ker\ T)=\dim(\ker\ T^{-1})$.
   D) $S+T$ è iniettiva.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite e sia x una sua soluzione. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\rho(A) = \rho(C)$.
   B) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti e si ha $m = n$ allora $\mathbf{S}$ deve avere altre soluzioni oltre ad x.
   C) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $y + x$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.
   D) se $m < n$ allora $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) il polinomio caratteristico di T ammette sempre almeno una radice reale.
   B) se la matrice B è simile ad A allora esiste una base di V tale che B è la matrice di T rispetto a quella base.
   C) se $v_1, \dots, v_k$ sono autovettori di T allora l'insieme $\{v_1, \dots, v_k\}$ è linearmente indipendente.
   D) T ammette esattamente n autovalori distinti.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Allora
   A) per $u, v \in V$ si ha $\langle u, v \rangle \geq 0$.
   B) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, 2v \rangle \geq 0$.
   C) la relazione di ortogonalità fra i vettori di V è transitiva.
   D) se U è un sottospazio di V e $\dim U = n$ allora anche $\dim^{\perp} U = n$.

8) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
   A) Insieme di tutte le funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ che si possono scrivere come $a \sin x + b \cos x$ (a, b numeri reali qualunque), con l'usuale somma di funzioni.
   B) $(\mathbf{N}, +)$ ($\mathbf{N}$ = insieme dei numeri naturali, $+$ = usuale somma di numeri naturali).
   C) $(\mathbf{R}^5, -)$ ($\mathbf{R}^5$ = insieme delle 5-uple ordinate di numeri reali, $-$ = usuale differenza di 5-uple).
   D) insieme delle matrici reali 3×3 a determinante nullo, con l'usuale prodotto di matrici.

9) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $\det B \neq 0$ allora $\det(A \cdot B^{-1}) = \det A - \det B$.
   B) $Tr(A \cdot B \cdot C) = Tr(A)Tr(B)Tr(C)$.
   C) $(A \cdot B)^4 = A^4 \cdot B^4$.
   D) $\det(A \cdot {}^tB) = \det A \cdot \det B$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -2 \\ y = s \\ z = 3t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale al piano di equazione $z = 3$.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo al piano di equazione $y = 2$.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale al piano di equazione $z = 4$.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta parallela al piano di equazione $x = 1$.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di V allora i vettori $v_1, \cdots, v_n$ sono a due a due ortogonali.
   B) se $u, v \in V$ allora $\|u\|\|v\| = \|u + v\|^2$.
   C) V ammette infinite basi ortogonali distinte.
   D) se $v, w \in V$ e $v \neq w$ allora $\langle v - w, w - v \rangle < 0$.

3) Siano A, B e C tre matrici reali ortogonali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $\det(A^2) = 1$.
   B) $\det(A \cdot B \cdot C) \neq 0$.
   C) la matrice $A \cdot B \cdot C$ è ortogonale.
   D) la matrice $A + B + C$ è ortogonale.

4) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
   A) l'insieme $\mathbf{Z}_4$ delle classi di resto modulo 4, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) $(\mathbf{C}, +)$($\mathbf{C}$ = insieme dei numeri complessi, $+$ = usuale somma di numeri complessi).
   C) l'insieme dei polinomi in una variabile t a coefficienti interi, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$($\mathbf{Q}$ = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri razionali).

5) Indichiamo con $\mathbf{R}^n$ lo spazio vettoriale standard n-dimensionale sul campo $\mathbf{R}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme di tutte le quintuple ordinate di numeri positivi è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^5$.
   B) l'insieme $\{(0,0,0),(1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)\}$ è una base per $\mathbf{R}^3$.
   C) se nessuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^7$ allora nemmeno $A \cup B$ lo è.
   D) se nessuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^7$ allora nemmeno $A \cap B$ lo è.

6) Sia T un endomorfismo diagonalizzabile di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate e distinte di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) gli autovalori non nulli di T^2 sono tutti positivi.
   B) se v è un autovettore di T e T è invertibile allora v è anche un autovettore di T^{-1}.
   C) A è necessariamente diversa da B.
   D) $Tr(A) = Tr(B)$.

7) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ è uno spazio vettoriale.
   B) se le righe di A sono linearmente indipendenti ed $m = n$ allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   C) $\rho(C) = \rho(A)$.
   D) il sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se ne ammette anche $\mathbf{S}$.

8) Siano S e T due automorfismi di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $\dim(Im\ T^{100}) = n$.
   B) $S + T$ è ancora un automorfismo di V.
   C) $S \circ T$ è ancora un automorfismo di V.
   D) $\det(A^{100}) = 1$.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) la curva di equazione $x^4 - 3y^4 = 1$ è un'iperbole.
   B) le rette di equazioni $3x - y = 0$ e $x + 3y = 0$ formano un angolo di $\pi/3$ radianti.
   C) il risultato del prodotto vettoriale $(0,0,1) \wedge (1,1,0)$ è il vettore $(-1,1,0)$.
   D) se il punto P ha coordinate $(10,-10)$ e il punto Q ha coordinate $(-10,10)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(0,0)$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano S e T due isomorfismi da uno spazio vettoriale W ad uno spazio vettoriale U, entrambi di dimensione $n > 0$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) la funzione $9T$ è anch'essa un isomorfismo.
   B) $\dim(\ker\ T) = \dim(\ker\ T^{-1})$.
   C) $S + T$ è iniettiva.
   D) $\dim\big(\ker\ (S^{-1} \circ T \circ S^{-1} \circ T)\big) = n$.

2) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) il polinomio caratteristico di T ammette sempre almeno una radice reale.
   B) se $v_1, \dots, v_k$ sono autovettori di T allora l'insieme $\{v_1, \dots, v_k\}$ è linearmente indipendente.
   C) T ammette esattamente n autovalori distinti.
   D) se la matrice B è simile ad A allora esiste una base di V tale che B è la matrice di T rispetto a quella base.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v, w \in V$ e $v \neq w$ allora $\langle v - w, w - v \rangle < 0$.
   B) se $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di V allora i vettori $v_1, \cdots, v_n$ sono a due a due ortogonali.
   C) se $u, v \in V$ allora $\|u\|\|v\| = \|u + v\|^2$.
   D) V ammette infinite basi ortogonali distinte.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite e sia x una sua soluzione. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\rho(A) = \rho(C)$.
   B) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $y + x$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.
   C) se $m < n$ allora $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   D) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti e si ha $m = n$ allora $\mathbf{S}$ deve avere altre soluzioni oltre ad x.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -2 \\ y = s \\ z = 3t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela al piano di equazione $x = 1$.
B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale al piano di equazione $z = 3$.
C) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo al piano di equazione $y = 2$.
D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale al piano di equazione $z = 4$.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?

A) se il punto P ha coordinate $(10, -10)$ e il punto Q ha coordinate $(-10, 10)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(0, 0)$.
B) la curva di equazione $x^4 - 3y^4 = 1$ è un'iperbole.
C) le rette di equazioni $3x - y = 0$ e $x + 3y = 0$ formano un angolo di $\pi/3$ radianti.
D) il risultato del prodotto vettoriale $(0, 0, 1) \wedge (1, 1, 0)$ è il vettore $(-1, 1, 0)$.

7) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?

A) $(\mathbf{N}, +)$ ($\mathbf{N}$ = insieme dei numeri naturali, $+$ = usuale somma di numeri naturali).
B) $(\mathbf{R}^5, -)$ ($\mathbf{R}^5$ = insieme delle 5-uple ordinate di numeri reali, $-$ = usuale differenza di 5-uple).
C) Insieme di tutte le funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ che si possono scrivere come $a \sin x + b \cos x$ (a, b numeri reali qualunque), con l'usuale somma di funzioni.
D) insieme delle matrici reali 3×3 a determinante nullo, con l'usuale prodotto di matrici.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) $Tr(A \cdot B \cdot C) = Tr(A)Tr(B)Tr(C)$.
B) $(A \cdot B)^4 = A^4 \cdot B^4$.
C) se $\det B \neq 0$ allora $\det(A \cdot B^{-1}) = \det A - \det B$.
D) $\det(A \cdot {}^tB) = \det A \cdot \det B$.

9) Indichiamo con $\mathbf{R}^n$ lo spazio vettoriale standard n-dimensionale sul campo $\mathbf{R}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) se ciascuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^9$ allora anche $A \cap B$ lo è.
B) se ciascuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^9$ allora anche $A \cup B$ lo è.
C) l'insieme $\{(1, 1, 0, 3), (1, 2, -1, -2), (3, 1, 3, -1), (4, 3, 1, 0), (5, -2, -2, 8)\}$ è linearmente dipendente in $\mathbf{R}^4$.
D) l'insieme $\{(1, 1, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 2, 2), (3, 3, 3, 3, 3), (4, 4, 4, 4, 4), (5, 5, 5, 5, 5)\}$ è una base per $\mathbf{R}^5$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali ortogonali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) la matrice $A \cdot B \cdot C$ è ortogonale.
   B) $\det(A^2) = 1$.
   C) $\det(A \cdot B \cdot C) \neq 0$.
   D) la matrice $A + B + C$ è ortogonale.

2) Sia T un endomorfismo diagonalizzabile di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate e distinte di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) gli autovalori non nulli di T^2 sono tutti positivi.
   B) se v è un autovettore di T e T è invertibile allora v è anche un autovettore di T^{-1}.
   C) $Tr(A) = Tr(B)$.
   D) A è necessariamente diversa da B.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Allora
   A) per $u, v \in V$ si ha $\langle u, v \rangle \geq 0$.
   B) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, 2v \rangle \geq 0$.
   C) se U è un sottospazio di V e $\dim U = n$ allora anche $\dim^{\perp} U = n$.
   D) la relazione di ortogonalità fra i vettori di V è transitiva.

4) Indichiamo con $\mathbf{R}^n$ lo spazio vettoriale standard n-dimensionale sul campo $\mathbf{R}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se nessuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^7$ allora nemmeno $A \cup B$ lo è.
   B) l'insieme di tutte le quintuple ordinate di numeri positivi è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^5$.
   C) l'insieme $\{(0,0,0), (1,0,0), (0,2,0), (0,0,3)\}$ è una base per $\mathbf{R}^3$.
   D) se nessuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^7$ allora nemmeno $A \cap B$ lo è.

5) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
   A) l'insieme dei polinomi in una variabile t a coefficienti interi, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme $\mathbf{Z}_4$ delle classi di resto modulo 4, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) $(\mathbf{C}, +)$($\mathbf{C}$ = insieme dei numeri complessi, $+$ = usuale somma di numeri complessi).
   D) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$($\mathbf{Q}$ = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri razionali).

6) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
D) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.

7) Sia **S** un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad **S** è uno spazio vettoriale.
B) se le righe di A sono linearmente indipendenti ed $m = n$ allora **S** ammette una ed una sola soluzione.
C) il sistema lineare omogeneo associato ad **S** ammette soluzioni se e solo se ne ammette anche **S**.
D) $\rho(C) = \rho(A)$.

8) Siano S e T due automorfismi di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) $\dim(Im\ T^{100}) = n$.
B) $S + T$ è ancora un automorfismo di V.
C) $\det(A^{100}) = 1$.
D) $S \circ T$ è ancora un automorfismo di V.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?

A) la distanza fra il punto di coordinate $(1, 1)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 0$ è $\sqrt{3/2}$.
B) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 1$ e $-10x + 5y = 3$ sono fra loro parallele.
C) il risultato del prodotto vettoriale $(1, 0, 1) \wedge (0, 1, 0)$ è il vettore $(-1, 0, 1)$.
D) la curva di equazione $y = 3x^4$ è una parabola.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Indichiamo con $\mathbf{R}^n$ lo spazio vettoriale standard n-dimensionale sul campo $\mathbf{R}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(0,0,0),(1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)\}$ è una base per $\mathbf{R}^3$.
   B) se nessuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^7$ allora nemmeno $A \cap B$ lo è.
   C) se nessuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^7$ allora nemmeno $A \cup B$ lo è.
   D) l'insieme di tutte le quintuple ordinate di numeri positivi è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^5$.

2) Siano S e T due isomorfismi da uno spazio vettoriale W ad uno spazio vettoriale U, entrambi di dimensione $n > 0$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $\dim\big(\ker\,(S^{-1} \circ T \circ S^{-1} \circ T)\big) = n$.
   B) la funzione $9T$ è anch'essa un isomorfismo.
   C) $S + T$ è iniettiva.
   D) $\dim(\ker\ T) = \dim(\ker\ T^{-1})$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite e sia x una sua soluzione. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti e si ha $m = n$ allora $\mathbf{S}$ deve avere altre soluzioni oltre ad x.
   B) $\rho(A) = \rho(C)$.
   C) se $m < n$ allora $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   D) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $y + x$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.

4) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se la matrice B è simile ad A allora esiste una base di V tale che B è la matrice di T rispetto a quella base.
   B) il polinomio caratteristico di T ammette sempre almeno una radice reale.
   C) T ammette esattamente n autovalori distinti.
   D) se $v_1, \dots, v_k$ sono autovettori di T allora l'insieme $\{v_1, \dots, v_k\}$ è linearmente indipendente.

5) Siano A, B e C tre matrici reali ortogonali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $\det(A \cdot B \cdot C) \neq 0$.
   B) la matrice $A + B + C$ è ortogonale.
   C) la matrice $A \cdot B \cdot C$ è ortogonale.
   D) $\det(A^2) = 1$.

6) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.

B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.

C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.

D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?

A) la curva di equazione $y = 3x^4$ è una parabola.

B) la distanza fra il punto di coordinate $(1, 1)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 0$ è $\sqrt{3/2}$.

C) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 1$ e $-10x + 5y = 3$ sono fra loro parallele.

D) il risultato del prodotto vettoriale $(1, 0, 1) \wedge (0, 1, 0)$ è il vettore $(-1, 0, 1)$.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Allora

A) la relazione di ortogonalità fra i vettori di V è transitiva.

B) per $u, v \in V$ si ha $\langle u, v \rangle \geq 0$.

C) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, 2v \rangle \geq 0$.

D) se U è un sottospazio di V e $\dim U = n$ allora anche $\dim^{\perp} U = n$.

9) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?

A) $(\mathbf{C}, +)$($\mathbf{C}$ = insieme dei numeri complessi, $+$ = usuale somma di numeri complessi).

B) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$($\mathbf{Q}$ = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri razionali).

C) l'insieme dei polinomi in una variabile t a coefficienti interi, con le usuali operazioni di somma e prodotto.

D) l'insieme $\mathbf{Z}_4$ delle classi di resto modulo 4, con le usuali operazioni di somma e prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -2 \\ y = s \\ z = 3t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela al piano di equazione $x = 1$.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo al piano di equazione $y = 2$.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale al piano di equazione $z = 4$.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale al piano di equazione $z = 3$.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v, w \in V$ e $v \neq w$ allora $\langle v - w, w - v \rangle < 0$.
   B) se $u, v \in V$ allora $\|u\|\|v\| = \|u + v\|^2$.
   C) V ammette infinite basi ortogonali distinte.
   D) se $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di V allora i vettori $v_1, \cdots, v_n$ sono a due a due ortogonali.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $(A \cdot B)^4 = A^4 \cdot B^4$.
   B) $Tr(A \cdot B \cdot C) = Tr(A)Tr(B)Tr(C)$.
   C) se $\det B \neq 0$ allora $\det(A \cdot B^{-1}) = \det A - \det B$.
   D) $\det(A \cdot {}^tB) = \det A \cdot \det B$.

4) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
   A) $(\mathbf{R}^5, -)$ ($\mathbf{R}^5$ = insieme delle 5-uple ordinate di numeri reali, $-$ = usuale differenza di 5-uple).
   B) $(\mathbf{N}, +)$ ($\mathbf{N}$ = insieme dei numeri naturali, $+$ = usuale somma di numeri naturali).
   C) Insieme di tutte le funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ che si possono scrivere come $a \sin x + b \cos x$ (a, b numeri reali qualunque), con l'usuale somma di funzioni.
   D) insieme delle matrici reali 3×3 a determinante nullo, con l'usuale prodotto di matrici.

5) Siano S e T due automorfismi di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $\det(A^{100}) = 1$.
   B) $S \circ T$ è ancora un automorfismo di V.
   C) $\dim(Im\ T^{100}) = n$.
   D) $S + T$ è ancora un automorfismo di V.

6) Indichiamo con $\mathbf{R}^n$ lo spazio vettoriale standard n-dimensionale sul campo $\mathbf{R}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se ciascuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^9$ allora anche $A \cup B$ lo è.
   B) se ciascuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^9$ allora anche $A \cap B$ lo è.
   C) l'insieme $\{(1,1,0,3),(1,2,-1,-2),(3,1,3,-1),(4,3,1,0),(5,-2,-2,8)\}$ è linearmente dipendente in $\mathbf{R}^4$.
   D) l'insieme $\{(1,1,1,1,1),(2,2,2,2,2),(3,3,3,3,3),(4,4,4,4,4),(5,5,5,5,5)\}$ è una base per $\mathbf{R}^5$.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) se il punto P ha coordinate $(10,-10)$ e il punto Q ha coordinate $(-10,10)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(0,0)$.
   B) le rette di equazioni $3x-y=0$ e $x+3y=0$ formano un angolo di $\pi/3$ radianti.
   C) il risultato del prodotto vettoriale $(0,0,1) \wedge (1,1,0)$ è il vettore $(-1,1,0)$.
   D) la curva di equazione $x^4-3y^4=1$ è un'iperbole.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) il sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se ne ammette anche $\mathbf{S}$.
   B) $\rho(C)=\rho(A)$.
   C) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ è uno spazio vettoriale.
   D) se le righe di A sono linearmente indipendenti ed $m=n$ allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.

9) Sia T un endomorfismo diagonalizzabile di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n>0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate e distinte di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $Tr(A)=Tr(B)$.
   B) A è necessariamente diversa da B.
   C) gli autovalori non nulli di T^2 sono tutti positivi.
   D) se v è un autovettore di T e T è invertibile allora v è anche un autovettore di T^{-1}.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano S e T due isomorfismi da uno spazio vettoriale W ad uno spazio vettoriale U, entrambi di dimensione $n > 0$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $S + T$ è iniettiva.
   B) $\dim\big(\ker\,(S^{-1} \circ T \circ S^{-1} \circ T)\big) = n$.
   C) la funzione $9T$ è anch'essa un isomorfismo.
   D) $\dim(\ker\ T) = \dim(\ker\ T^{-1})$.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di V allora i vettori $v_1, \cdots, v_n$ sono a due a due ortogonali.
   B) se $v, w \in V$ e $v \neq w$ allora $\langle v - w, w - v \rangle < 0$.
   C) V ammette infinite basi ortogonali distinte.
   D) se $u, v \in V$ allora $\|u\|\|v\| = \|u + v\|^2$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite e sia x una sua soluzione. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $m < n$ allora $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   B) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti e si ha $m = n$ allora $\mathbf{S}$ deve avere altre soluzioni oltre ad x.
   C) $\rho(A) = \rho(C)$.
   D) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $y + x$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.

4) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -2 \\ y = s \\ z = 3t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale al piano di equazione $z = 3$.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela al piano di equazione $x = 1$.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale al piano di equazione $z = 4$.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo al piano di equazione $y = 2$.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) la curva di equazione $x^4 - 3y^4 = 1$ è un'iperbole.
   B) se il punto P ha coordinate $(10, -10)$ e il punto Q ha coordinate $(-10, 10)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(0, 0)$.
   C) il risultato del prodotto vettoriale $(0, 0, 1) \wedge (1, 1, 0)$ è il vettore $(-1, 1, 0)$.
   D) le rette di equazioni $3x - y = 0$ e $x + 3y = 0$ formano un angolo di $\pi/3$ radianti.

6) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) T ammette esattamente n autovalori distinti.
   B) se la matrice B è simile ad A allora esiste una base di V tale che B è la matrice di T rispetto a quella base.
   C) il polinomio caratteristico di T ammette sempre almeno una radice reale.
   D) se $v_1, \dots, v_k$ sono autovettori di T allora l'insieme $\{v_1, \dots, v_k\}$ è linearmente indipendente.

7) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
   A) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$($\mathbf{Q}$ = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri razionali).
   B) $(\mathbf{C}, +)$($\mathbf{C}$ = insieme dei numeri complessi, $+$ = usuale somma di numeri complessi).
   C) l'insieme $\mathbf{Z}_4$ delle classi di resto modulo 4, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme dei polinomi in una variabile t a coefficienti interi, con le usuali operazioni di somma e prodotto.

8) Siano A, B e C tre matrici reali ortogonali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) la matrice $A + B + C$ è ortogonale.
   B) $\det(A \cdot B \cdot C) \neq 0$.
   C) $\det(A^2) = 1$.
   D) la matrice $A \cdot B \cdot C$ è ortogonale.

9) Indichiamo con $\mathbf{R}^n$ lo spazio vettoriale standard n-dimensionale sul campo $\mathbf{R}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se nessuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^7$ allora nemmeno $A \cap B$ lo è.
   B) l'insieme $\{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)\}$ è una base per $\mathbf{R}^3$.
   C) l'insieme di tutte le quintuple ordinate di numeri positivi è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^5$.
   D) se nessuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^7$ allora nemmeno $A \cup B$ lo è.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
   A) $(\mathbf{N}, +)$ ($\mathbf{N}$ = insieme dei numeri naturali, $+$ = usuale somma di numeri naturali).
   B) Insieme di tutte le funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ che si possono scrivere come $a \sin x + b \cos x$ (a, b numeri reali qualunque), con l'usuale somma di funzioni.
   C) insieme delle matrici reali 3×3 a determinante nullo, con l'usuale prodotto di matrici.
   D) $(\mathbf{R}^5, -)$ ($\mathbf{R}^5$ = insieme delle 5-uple ordinate di numeri reali, $-$ = usuale differenza di 5-uple).

2) Sia T un endomorfismo diagonalizzabile di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate e distinte di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $Tr(A) = Tr(B)$.
   B) gli autovalori non nulli di T^2 sono tutti positivi.
   C) A è necessariamente diversa da B.
   D) se v è un autovettore di T e T è invertibile allora v è anche un autovettore di T^{-1}.

3) Indichiamo con $\mathbf{R}^n$ lo spazio vettoriale standard n-dimensionale sul campo $\mathbf{R}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se ciascuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^9$ allora anche $A \cap B$ lo è.
   B) l'insieme $\{(1,1,0,3), (1,2,-1,-2), (3,1,3,-1), (4,3,1,0), (5,-2,-2,8)\}$ è linearmente dipendente in $\mathbf{R}^4$.
   C) l'insieme $\{(1,1,1,1,1), (2,2,2,2,2), (3,3,3,3,3), (4,4,4,4,4), (5,5,5,5,5)\}$ è una base per $\mathbf{R}^5$.
   D) se ciascuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^9$ allora anche $A \cup B$ lo è.

4) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $Tr(A \cdot B \cdot C) = Tr(A)Tr(B)Tr(C)$.
   B) se $\det B \neq 0$ allora $\det(A \cdot B^{-1}) = \det A - \det B$.
   C) $\det(A \cdot {}^tB) = \det A \cdot \det B$.
   D) $(A \cdot B)^4 = A^4 \cdot B^4$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) il sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se ne ammette anche $\mathbf{S}$.
   B) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ è uno spazio vettoriale.
   C) $\rho(C) = \rho(A)$.
   D) se le righe di A sono linearmente indipendenti ed $m = n$ allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.

6) Siano S e T due automorfismi di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:

A) $\det(A^{100}) = 1$.
B) $\dim(Im\ T^{100}) = n$.
C) $S \circ T$ è ancora un automorfismo di V.
D) $S + T$ è ancora un automorfismo di V.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Allora

A) se U è un sottospazio di V e $\dim U = n$ allora anche $\dim^{\perp} U = n$.
B) la relazione di ortogonalità fra i vettori di V è transitiva.
C) per $u, v \in V$ si ha $\langle u, v \rangle \geq 0$.
D) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, 2v \rangle \geq 0$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?

A) il risultato del prodotto vettoriale $(1, 0, 1) \wedge (0, 1, 0)$ è il vettore $(-1, 0, 1)$.
B) la curva di equazione $y = 3x^4$ è una parabola.
C) la distanza fra il punto di coordinate $(1, 1)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 0$ è $\sqrt{3/2}$.
D) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 1$ e $-10x + 5y = 3$ sono fra loro parallele.

9) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.
C) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
D) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(1, 1)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 0$ è $\sqrt{3/2}$.
   B) la curva di equazione $y = 3x^4$ è una parabola.
   C) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 1$ e $-10x + 5y = 3$ sono fra loro parallele.
   D) il risultato del prodotto vettoriale $(1, 0, 1) \wedge (0, 1, 0)$ è il vettore $(-1, 0, 1)$.

3) Indichiamo con $\mathbf{R}^n$ lo spazio vettoriale standard n-dimensionale sul campo $\mathbf{R}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(1, 1, 0, 3), (1, 2, -1, -2), (3, 1, 3, -1), (4, 3, 1, 0), (5, -2, -2, 8)\}$ è linearmente dipendente in $\mathbf{R}^4$.
   B) se ciascuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^9$ allora anche $A \cap B$ lo è.
   C) se ciascuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^9$ allora anche $A \cup B$ lo è.
   D) l'insieme $\{(1, 1, 1, 1, 1), (2, 2, 2, 2, 2), (3, 3, 3, 3, 3), (4, 4, 4, 4, 4), (5, 5, 5, 5, 5)\}$ è una base per $\mathbf{R}^5$.

4) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $v_1, \dots, v_k$ sono autovettori di T allora l'insieme $\{v_1, \dots, v_k\}$ è linearmente indipendente.
   B) se la matrice B è simile ad A allora esiste una base di V tale che B è la matrice di T rispetto a quella base.
   C) T ammette esattamente n autovalori distinti.
   D) il polinomio caratteristico di T ammette sempre almeno una radice reale.

5) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Allora
   A) per $u, v \in V$ si ha $\langle u, v \rangle \geq 0$.
   B) la relazione di ortogonalità fra i vettori di V è transitiva.
   C) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, 2v \rangle \geq 0$.
   D) se U è un sottospazio di V e $\dim U = n$ allora anche $\dim {}^{\perp}U = n$.

6) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
   A) Insieme di tutte le funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ che si possono scrivere come $a \sin x + b \cos x$ (a, b numeri reali qualunque), con l'usuale somma di funzioni.
   B) $(\mathbf{N}, +)$ ($\mathbf{N}$ = insieme dei numeri naturali, $+$ = usuale somma di numeri naturali).
   C) $(\mathbf{R}^5, -)$ ($\mathbf{R}^5$ = insieme delle 5-uple ordinate di numeri reali, $-$ = usuale differenza di 5-uple).
   D) insieme delle matrici reali 3×3 a determinante nullo, con l'usuale prodotto di matrici.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $\det B \neq 0$ allora $\det(A \cdot B^{-1}) = \det A - \det B$.
   B) $Tr(A \cdot B \cdot C) = Tr(A)Tr(B)Tr(C)$.
   C) $(A \cdot B)^4 = A^4 \cdot B^4$.
   D) $\det(A \cdot {}^tB) = \det A \cdot \det B$.

8) Siano S e T due isomorfismi da uno spazio vettoriale W ad uno spazio vettoriale U, entrambi di dimensione $n > 0$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $\dim(\ker\ T) = \dim(\ker\ T^{-1})$.
   B) $\dim\big(\ker\ (S^{-1} \circ T \circ S^{-1} \circ T)\big) = n$.
   C) $S + T$ è iniettiva.
   D) la funzione $9T$ è anch'essa un isomorfismo.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite e sia x una sua soluzione. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $y + x$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.
   B) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti e si ha $m = n$ allora $\mathbf{S}$ deve avere altre soluzioni oltre ad x.
   C) se $m < n$ allora $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   D) $\rho(A) = \rho(C)$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano S e T due automorfismi di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $S \circ T$ è ancora un automorfismo di V.
   B) $S + T$ è ancora un automorfismo di V.
   C) $\det(A^{100}) = 1$.
   D) $\dim(Im\ T^{100}) = n$.

2) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
   A) $(\mathbf{C}, +)$($\mathbf{C}$ = insieme dei numeri complessi, $+$ = usuale somma di numeri complessi).
   B) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$($\mathbf{Q}$ = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri razionali).
   C) l'insieme $\mathbf{Z}_4$ delle classi di resto modulo 4, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme dei polinomi in una variabile t a coefficienti interi, con le usuali operazioni di somma e prodotto.

3) Sia T un endomorfismo diagonalizzabile di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate e distinte di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) A è necessariamente diversa da B.
   B) se v è un autovettore di T e T è invertibile allora v è anche un autovettore di T^{-1}.
   C) $Tr(A) = Tr(B)$.
   D) gli autovalori non nulli di T^2 sono tutti positivi.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) le rette di equazioni $3x - y = 0$ e $x + 3y = 0$ formano un angolo di $\pi/3$ radianti.
   B) se il punto P ha coordinate $(10, -10)$ e il punto Q ha coordinate $(-10, 10)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(0, 0)$.
   C) la curva di equazione $x^4 - 3y^4 = 1$ è un'iperbole.
   D) il risultato del prodotto vettoriale $(0, 0, 1) \wedge (1, 1, 0)$ è il vettore $(-1, 1, 0)$.

5) Indichiamo con $\mathbf{R}^n$ lo spazio vettoriale standard n-dimensionale sul campo $\mathbf{R}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
A) l'insieme $\{(0,0,0),(1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)\}$ è una base per $\mathbf{R}^3$.
B) se nessuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^7$ allora nemmeno $A \cap B$ lo è.
C) l'insieme di tutte le quintuple ordinate di numeri positivi è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^5$.
D) se nessuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^7$ allora nemmeno $A \cup B$ lo è.

6) Siano A, B e C tre matrici reali ortogonali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
A) $\det(A \cdot B \cdot C) \neq 0$.
B) la matrice $A + B + C$ è ortogonale.
C) $\det(A^2) = 1$.
D) la matrice $A \cdot B \cdot C$ è ortogonale.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
A) se $u, v \in V$ allora $\|u\|\|v\| = \|u + v\|^2$.
B) se $v, w \in V$ e $v \neq w$ allora $\langle v - w, w - v \rangle < 0$.
C) se $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di V allora i vettori $v_1, \cdots, v_n$ sono a due a due ortogonali.
D) V ammette infinite basi ortogonali distinte.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) $\rho(C) = \rho(A)$.
B) se le righe di A sono linearmente indipendenti ed $m = n$ allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
C) il sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se ne ammette anche $\mathbf{S}$.
D) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ è uno spazio vettoriale.

9) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -2 \\ y = s \\ z = 3t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo al piano di equazione $y = 2$.
B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela al piano di equazione $x = 1$.
C) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale al piano di equazione $z = 3$.
D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale al piano di equazione $z = 4$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano S e T due isomorfismi da uno spazio vettoriale W ad uno spazio vettoriale U, entrambi di dimensione $n > 0$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $S + T$ è iniettiva.
   B) $\dim(\ker\ T) = \dim(\ker\ T^{-1})$.
   C) $\dim\big(\ker\ (S^{-1} \circ T \circ S^{-1} \circ T)\big) = n$.
   D) la funzione $9T$ è anch'essa un isomorfismo.

2) Sia **S** un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite e sia x una sua soluzione. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $m < n$ allora **S** ammette infinite soluzioni.
   B) se y è soluzione di **S** allora $y + x$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad **S**.
   C) se le equazioni di **S** sono linearmente dipendenti e si ha $m = n$ allora **S** deve avere altre soluzioni oltre ad x.
   D) $\rho(A) = \rho(C)$.

3) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -2 \\ y = s \\ z = 3t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela al piano di equazione $x = 1$.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale al piano di equazione $z = 3$.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale al piano di equazione $z = 4$.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo al piano di equazione $y = 2$.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) se il punto P ha coordinate $(10, -10)$ e il punto Q ha coordinate $(-10, 10)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(0, 0)$.
   B) la curva di equazione $x^4 - 3y^4 = 1$ è un'iperbole.
   C) il risultato del prodotto vettoriale $(0, 0, 1) \wedge (1, 1, 0)$ è il vettore $(-1, 1, 0)$.
   D) le rette di equazioni $3x - y = 0$ e $x + 3y = 0$ formano un angolo di $\pi/3$ radianti.

5) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) T ammette esattamente n autovalori distinti.
   B) se $v_1, \dots, v_k$ sono autovettori di T allora l'insieme $\{v_1, \dots, v_k\}$ è linearmente indipendente.
   C) se la matrice B è simile ad A allora esiste una base di V tale che B è la matrice di T rispetto a quella base.
   D) il polinomio caratteristico di T ammette sempre almeno una radice reale.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $v, w \in V$ e $v \neq w$ allora $\langle v - w, w - v \rangle < 0$.
   B) se $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di V allora i vettori $v_1, \cdots, v_n$ sono a due a due ortogonali.
   C) V ammette infinite basi ortogonali distinte.
   D) se $u, v \in V$ allora $\|u\|\|v\| = \|u + v\|^2$.

7) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
   A) $(\mathbf{N}, +)$ ($\mathbf{N}$ = insieme dei numeri naturali, $+$ = usuale somma di numeri naturali).
   B) $(\mathbf{R}^5, -)$ ($\mathbf{R}^5$ = insieme delle 5-uple ordinate di numeri reali, $-$ = usuale differenza di 5-uple).
   C) insieme delle matrici reali 3×3 a determinante nullo, con l'usuale prodotto di matrici.
   D) Insieme di tutte le funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ che si possono scrivere come $a \sin x + b \cos x$ (a, b numeri reali qualunque), con l'usuale somma di funzioni.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $Tr(A \cdot B \cdot C) = Tr(A)Tr(B)Tr(C)$.
   B) $(A \cdot B)^4 = A^4 \cdot B^4$.
   C) $\det(A \cdot {}^t B) = \det A \cdot \det B$.
   D) se $\det B \neq 0$ allora $\det(A \cdot B^{-1}) = \det A - \det B$.

9) Indichiamo con $\mathbf{R}^n$ lo spazio vettoriale standard n-dimensionale sul campo $\mathbf{R}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se ciascuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^9$ allora anche $A \cap B$ lo è.
   B) se ciascuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^9$ allora anche $A \cup B$ lo è.
   C) l'insieme $\{(1,1,1,1,1), (2,2,2,2,2), (3,3,3,3,3), (4,4,4,4,4), (5,5,5,5,5)\}$ è una base per $\mathbf{R}^5$.
   D) l'insieme $\{(1,1,0,3), (1,2,-1,-2), (3,1,3,-1), (4,3,1,0), (5,-2,-2,8)\}$ è linearmente dipendente in $\mathbf{R}^4$.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali ortogonali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $\det(A^2) = 1$.
   B) la matrice $A + B + C$ è ortogonale.
   C) la matrice $A \cdot B \cdot C$ è ortogonale.
   D) $\det(A \cdot B \cdot C) \neq 0$.

2) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
   A) l'insieme $\mathbf{Z}_4$ delle classi di resto modulo 4, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)(\mathbf{Q}$ = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri razionali).
   C) l'insieme dei polinomi in una variabile t a coefficienti interi, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) $(\mathbf{C}, +)(\mathbf{C}$ = insieme dei numeri complessi, $+$ = usuale somma di numeri complessi).

3) Indichiamo con $\mathbf{R}^n$ lo spazio vettoriale standard n-dimensionale sul campo $\mathbf{R}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme di tutte le quintuple ordinate di numeri positivi è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^5$.
   B) se nessuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^7$ allora nemmeno $A \cap B$ lo è.
   C) se nessuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^7$ allora nemmeno $A \cup B$ lo è.
   D) l'insieme $\{(0,0,0), (1,0,0), (0,2,0), (0,0,3)\}$ è una base per $\mathbf{R}^3$.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Allora
   A) per $u, v \in V$ si ha $\langle u, v \rangle \geq 0$.
   B) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, 2v \rangle \geq 0$.
   C) la relazione di ortogonalità fra i vettori di V è transitiva.
   D) se U è un sottospazio di V e $\dim U = n$ allora anche $\dim^{\perp} U = n$.

5) Sia **S** un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad **S**, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) il sistema lineare omogeneo associato ad **S** ammette soluzioni se e solo se ne ammette anche **S**.
   B) $\rho(C) = \rho(A)$.
   C) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad **S** è uno spazio vettoriale.
   D) se le righe di A sono linearmente indipendenti ed $m = n$ allora **S** ammette una ed una sola soluzione.

6) Siano S e T due automorfismi di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $\det(A^{100}) = 1$.
   B) $S \circ T$ è ancora un automorfismo di V.
   C) $\dim(Im\ T^{100}) = n$.
   D) $S + T$ è ancora un automorfismo di V.

7) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(1, 1)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 0$ è $\sqrt{3/2}$.
   B) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 1$ e $-10x + 5y = 3$ sono fra loro parallele.
   C) la curva di equazione $y = 3x^4$ è una parabola.
   D) il risultato del prodotto vettoriale $(1, 0, 1) \wedge (0, 1, 0)$ è il vettore $(-1, 0, 1)$.

9) Sia T un endomorfismo diagonalizzabile di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate e distinte di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $Tr(A) = Tr(B)$.
   B) A è necessariamente diversa da B.
   C) gli autovalori non nulli di T^2 sono tutti positivi.
   D) se v è un autovettore di T e T è invertibile allora v è anche un autovettore di T^{-1}.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite e sia x una sua soluzione. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   - A) se $m < n$ allora $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   - B) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $y + x$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.
   - C) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti e si ha $m = n$ allora $\mathbf{S}$ deve avere altre soluzioni oltre ad x.
   - D) $\rho(A) = \rho(C)$.

2) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   - A) T ammette esattamente n autovalori distinti.
   - B) se $v_1, \dots, v_k$ sono autovettori di T allora l'insieme $\{v_1, \dots, v_k\}$ è linearmente indipendente.
   - C) se la matrice B è simile ad A allora esiste una base di V tale che B è la matrice di T rispetto a quella base.
   - D) il polinomio caratteristico di T ammette sempre almeno una radice reale.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Allora
   - A) per $u, v \in V$ si ha $\langle u, v \rangle \geq 0$.
   - B) la relazione di ortogonalità fra i vettori di V è transitiva.
   - C) se U è un sottospazio di V e $\dim U = n$ allora anche $\dim {}^{\perp}U = n$.
   - D) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, 2v \rangle \geq 0$.

4) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
   - A) l'insieme dei polinomi in una variabile t a coefficienti interi, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
   - B) l'insieme $\mathbf{Z}_4$ delle classi di resto modulo 4, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
   - C) $(\mathbf{C}, +)$($\mathbf{C}$ = insieme dei numeri complessi, $+$ = usuale somma di numeri complessi).
   - D) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$($\mathbf{Q}$ = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri razionali).

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) la distanza fra il punto di coordinate $(1, 1)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 0$ è $\sqrt{3/2}$.
   B) la curva di equazione $y = 3x^4$ è una parabola.
   C) il risultato del prodotto vettoriale $(1, 0, 1) \wedge (0, 1, 0)$ è il vettore $(-1, 0, 1)$.
   D) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 1$ e $-10x + 5y = 3$ sono fra loro parallele.

7) Siano A, B e C tre matrici reali ortogonali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) la matrice $A \cdot B \cdot C$ è ortogonale.
   B) $\det(A^2) = 1$.
   C) $\det(A \cdot B \cdot C) \neq 0$.
   D) la matrice $A + B + C$ è ortogonale.

8) Indichiamo con $\mathbf{R}^n$ lo spazio vettoriale standard n-dimensionale sul campo $\mathbf{R}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se nessuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^7$ allora nemmeno $A \cup B$ lo è.
   B) l'insieme di tutte le quintuple ordinate di numeri positivi è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^5$.
   C) l'insieme $\{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3)\}$ è una base per $\mathbf{R}^3$.
   D) se nessuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^7$ allora nemmeno $A \cap B$ lo è.

9) Siano S e T due isomorfismi da uno spazio vettoriale W ad uno spazio vettoriale U, entrambi di dimensione $n > 0$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $S + T$ è iniettiva.
   B) $\dim(\ker\ T) = \dim(\ker\ T^{-1})$.
   C) $\dim\big(\ker\ (S^{-1} \circ T \circ S^{-1} \circ T)\big) = n$.
   D) la funzione $9T$ è anch'essa un isomorfismo.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se $\det B \neq 0$ allora $\det(A \cdot B^{-1}) = \det A - \det B$.
   B) $\det(A \cdot {}^tB) = \det A \cdot \det B$.
   C) $(A \cdot B)^4 = A^4 \cdot B^4$.
   D) $Tr(A \cdot B \cdot C) = Tr(A)Tr(B)Tr(C)$.

2) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
   A) Insieme di tutte le funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ che si possono scrivere come $a \sin x + b \cos x$ (a, b numeri reali qualunque), con l'usuale somma di funzioni.
   B) insieme delle matrici reali 3×3 a determinante nullo, con l'usuale prodotto di matrici.
   C) $(\mathbf{R}^5, -)$ ($\mathbf{R}^5$ = insieme delle 5-uple ordinate di numeri reali, $-$ = usuale differenza di 5-uple).
   D) $(\mathbf{N}, +)$ ($\mathbf{N}$ = insieme dei numeri naturali, $+$ = usuale somma di numeri naturali).

3) Siano S e T due automorfismi di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $S \circ T$ è ancora un automorfismo di V.
   B) $\det(A^{100}) = 1$.
   C) $S + T$ è ancora un automorfismo di V.
   D) $\dim(Im\ T^{100}) = n$.

4) Indichiamo con $\mathbf{R}^n$ lo spazio vettoriale standard n-dimensionale sul campo $\mathbf{R}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(1,1,0,3),(1,2,-1,-2),(3,1,3,-1),(4,3,1,0),(5,-2,-2,8)\}$ è linearmente dipendente in $\mathbf{R}^4$.
   B) l'insieme $\{(1,1,1,1,1),(2,2,2,2,2),(3,3,3,3,3),(4,4,4,4,4),(5,5,5,5,5)\}$ è una base per $\mathbf{R}^5$.
   C) se ciascuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^9$ allora anche $A \cup B$ lo è.
   D) se ciascuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^9$ allora anche $A \cap B$ lo è.

5) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -2 \\ y = s \\ z = 3t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale al piano di equazione $z = 3$.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo al piano di equazione $y = 2$.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta parallela al piano di equazione $x = 1$.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale al piano di equazione $z = 4$.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di V allora i vettori $v_1, \cdots, v_n$ sono a due a due ortogonali.
   B) se $u, v \in V$ allora $\|u\| \|v\| = \|u + v\|^2$.
   C) se $v, w \in V$ e $v \neq w$ allora $\langle v - w, w - v \rangle < 0$.
   D) V ammette infinite basi ortogonali distinte.

7) Sia T un endomorfismo diagonalizzabile di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate e distinte di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) A è necessariamente diversa da B.
   B) $Tr(A) = Tr(B)$.
   C) se v è un autovettore di T e T è invertibile allora v è anche un autovettore di T^{-1}.
   D) gli autovalori non nulli di T^2 sono tutti positivi.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) la curva di equazione $x^4 - 3y^4 = 1$ è un'iperbole.
   B) le rette di equazioni $3x - y = 0$ e $x + 3y = 0$ formano un angolo di $\pi/3$ radianti.
   C) se il punto P ha coordinate $(10, -10)$ e il punto Q ha coordinate $(-10, 10)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(0, 0)$.
   D) il risultato del prodotto vettoriale $(0, 0, 1) \wedge (1, 1, 0)$ è il vettore $(-1, 1, 0)$.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\rho(C) = \rho(A)$.
   B) il sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se ne ammette anche $\mathbf{S}$.
   C) se le righe di A sono linearmente indipendenti ed $m = n$ allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   D) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ è uno spazio vettoriale.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $u, v \in V$ allora $\|u\|\|v\| = \|u + v\|^2$.
   B) se $v, w \in V$ e $v \neq w$ allora $\langle v - w, w - v \rangle < 0$.
   C) V ammette infinite basi ortogonali distinte.
   D) se $\{v_1, \cdots, v_n\}$ è una base di V allora i vettori $v_1, \cdots, v_n$ sono a due a due ortogonali.

2) Siano S e T due isomorfismi da uno spazio vettoriale W ad uno spazio vettoriale U, entrambi di dimensione $n > 0$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $\dim\big(\ker\ (S^{-1} \circ T \circ S^{-1} \circ T)\big) = n$.
   B) $S + T$ è iniettiva.
   C) $\dim(\ker\ T) = \dim(\ker\ T^{-1})$.
   D) la funzione $9T$ è anch'essa un isomorfismo.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite e sia x una sua soluzione. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente dipendenti e si ha $m = n$ allora $\mathbf{S}$ deve avere altre soluzioni oltre ad x.
   B) se $m < n$ allora $\mathbf{S}$ ammette infinite soluzioni.
   C) se y è soluzione di $\mathbf{S}$ allora $y + x$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$.
   D) $\rho(A) = \rho(C)$.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un riferimento cartesiano fissato?
   A) le rette di equazioni $3x - y = 0$ e $x + 3y = 0$ formano un angolo di $\pi/3$ radianti.
   B) se il punto P ha coordinate $(10, -10)$ e il punto Q ha coordinate $(-10, 10)$, il punto medio del segmento di estremi P e Q ha coordinate $(0, 0)$.
   C) il risultato del prodotto vettoriale $(0, 0, 1) \wedge (1, 1, 0)$ è il vettore $(-1, 1, 0)$.
   D) la curva di equazione $x^4 - 3y^4 = 1$ è un'iperbole.

5) Quali delle seguenti strutture algebriche sono campi?
   A) $(\mathbf{C}, +)$($\mathbf{C}$ = insieme dei numeri complessi, $+$ = usuale somma di numeri complessi).
   B) l'insieme dei polinomi in una variabile t a coefficienti interi, con le usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$($\mathbf{Q}$ = insieme dei numeri razionali, $+$ = usuale somma di numeri razionali, $\cdot$ = usuale prodotto di numeri razionali).
   D) l'insieme $\mathbf{Z}_4$ delle classi di resto modulo 4, con le usuali operazioni di somma e prodotto.

6) Siano A, B e C tre matrici reali ortogonali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $\det(A \cdot B \cdot C) \neq 0$.
   B) la matrice $A \cdot B \cdot C$ è ortogonale.
   C) la matrice $A + B + C$ è ortogonale.
   D) $\det(A^2) = 1$.

7) Indichiamo con $\mathbf{R}^n$ lo spazio vettoriale standard n-dimensionale sul campo $\mathbf{R}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(0,0,0), (1,0,0), (0,2,0), (0,0,3)\}$ è una base per $\mathbf{R}^3$.
   B) se nessuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^7$ allora nemmeno $A \cup B$ lo è.
   C) se nessuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^7$ allora nemmeno $A \cap B$ lo è.
   D) l'insieme di tutte le quintuple ordinate di numeri positivi è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^5$.

8) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione parametrica $\begin{cases} x = -2 \\ y = s \\ z = 3t \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo al piano di equazione $y = 2$.
   B) $\mathcal{A}$ è una retta parallela al piano di equazione $x = 1$.
   C) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale al piano di equazione $z = 4$.
   D) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale al piano di equazione $z = 3$.

9) Sia T un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice di T rispetto ad una base fissata di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se la matrice B è simile ad A allora esiste una base di V tale che B è la matrice di T rispetto a quella base.
   B) T ammette esattamente n autovalori distinti.
   C) se $v_1, \ldots, v_k$ sono autovettori di T allora l'insieme $\{v_1, \ldots, v_k\}$ è linearmente indipendente.
   D) il polinomio caratteristico di T ammette sempre almeno una radice reale.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette e consegnare la scheda al termine della prima ora. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 0 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo il simbolo n denota sempre un numero naturale non nullo.*

1) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$. Allora
   A) per ogni $v \in V$ risulta $\langle v, 2v\rangle \geq 0$.
   B) se U è un sottospazio di V e $\dim U = n$ allora anche $\dim^{\perp} U = n$.
   C) la relazione di ortogonalità fra i vettori di V è transitiva.
   D) per $u, v \in V$ si ha $\langle u, v\rangle \geq 0$.

2) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $(A \cdot B)^4 = A^4 \cdot B^4$.
   B) se $\det B \neq 0$ allora $\det(A \cdot B^{-1}) = \det A - \det B$.
   C) $\det(A \cdot {}^tB) = \det A \cdot \det B$.
   D) $Tr(A \cdot B \cdot C) = Tr(A)Tr(B)Tr(C)$.

3) Indichiamo con $\mathbf{R}^n$ lo spazio vettoriale standard n-dimensionale sul campo $\mathbf{R}$. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) se ciascuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^9$ allora anche $A \cup B$ lo è.
   B) l'insieme $\{(1,1,0,3), (1,2,-1,-2), (3,1,3,-1), (4,3,1,0), (5,-2,-2,8)\}$ è linearmente dipendente in $\mathbf{R}^4$.
   C) l'insieme $\{(1,1,1,1,1), (2,2,2,2,2), (3,3,3,3,3), (4,4,4,4,4), (5,5,5,5,5)\}$ è una base per $\mathbf{R}^5$.
   D) se ciascuno dei due insiemi A e B è un sistema di generatori per $\mathbf{R}^9$ allora anche $A \cap B$ lo è.

4) Si consideri il sottospazio $\mathcal{A}$ dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di equazione cartesiana $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\mathcal{A}$ è una retta parallela all'asse delle x.
   B) $\mathcal{A}$ è un piano ortogonale all'asse delle z.
   C) $\mathcal{A}$ è una retta ortogonale all'asse delle y.
   D) $\mathcal{A}$ è un piano parallelo all'asse delle y.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare reale di m equazioni in n incognite. Indichiamo con A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) $\rho(C) = \rho(A)$.
   B) l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ è uno spazio vettoriale.
   C) se le righe di A sono linearmente indipendenti ed $m = n$ allora $\mathbf{S}$ ammette una ed una sola soluzione.
   D) il sistema lineare omogeneo associato ad $\mathbf{S}$ ammette soluzioni se e solo se ne ammette anche $\mathbf{S}$.

6) Siano S e T due automorfismi di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata di V. Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) $S \circ T$ è ancora un automorfismo di V.
   B) $\dim(Im\ T^{100}) = n$.
   C) $S + T$ è ancora un automorfismo di V.
   D) $\det(A^{100}) = 1$.

7) Sia T un endomorfismo diagonalizzabile di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A, B due matrici di T rispetto a due basi fissate e distinte di V. Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) A è necessariamente diversa da B.
   B) gli autovalori non nulli di T^2 sono tutti positivi.
   C) se v è un autovettore di T e T è invertibile allora v è anche un autovettore di T^{-1}.
   D) $Tr(A) = Tr(B)$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere per un piano euclideo, rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano fissato?
   A) le rette di equazioni cartesiane $4x - 2y = 1$ e $-10x + 5y = 3$ sono fra loro parallele.
   B) il risultato del prodotto vettoriale $(1, 0, 1) \wedge (0, 1, 0)$ è il vettore $(-1, 0, 1)$.
   C) la curva di equazione $y = 3x^4$ è una parabola.
   D) la distanza fra il punto di coordinate $(1, 1)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 0$ è $\sqrt{3/2}$.

9) Quali delle seguenti strutture algebriche sono gruppi?
   A) $(\mathbf{R}^5, -)$ ($\mathbf{R}^5$ = insieme delle 5-uple ordinate di numeri reali, $-$ = usuale differenza di 5-uple).
   B) Insieme di tutte le funzioni da $\mathbf{R}$ in $\mathbf{R}$ che si possono scrivere come $a \sin x + b \cos x$ (a, b numeri reali qualunque), con l'usuale somma di funzioni.
   C) insieme delle matrici reali 3×3 a determinante nullo, con l'usuale prodotto di matrici.
   D) $(\mathbf{N}, +)$ ($\mathbf{N}$ = insieme dei numeri naturali, $+$ = usuale somma di numeri naturali).