31 marzo 2008 NOME: MATRICOLA: 00101

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ ($n \geq 2$) è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) nell'insieme dei numeri razionali l'usuale operazione di prodotto è associativa.
   D) l'insieme dei numeri naturali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

2) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $({}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = {}^t(A \cdot B \cdot C)$.
   B) $A \cdot B \cdot C$ è invertibile.
   C) se $A \cdot C = I$ allora $A \cdot B \cdot C = B$.
   D) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(0,0,0,0),(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme delle matrici reali 5×5 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y, z) = (x - z, y)$ è una trasformazione lineare.
   B) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m, n > 0)$ è una trasformazione lineare allora l'immagine di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.
   C) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore nel vettore nullo è un endomorfismo.
   D) se T è un automorfismo sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ allora la matrice associata a T rispetto alla base canonica è invertibile.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il rango di C è strettamente maggiore del rango di A.
   B) se $\rho(A) < m$ e $\rho(C) < n$ allora $\mathbf{S}$ non può ammettere soluzioni.
   C) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $M_3(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $M_3(\mathbb{R})$, da un (opportuno) sistema lineare parametrico di 9 equazioni in 5 parametri.
   D) se $\mathbf{S}$ ammette soluzione allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti.

6) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) A è anche la matrice associata a S rispetto a $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$.
   B) se A è simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   C) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.
   D) se $T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1, T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2 \dots, T(\mathbf{u}_n) = \mathbf{u}_n$ allora $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $n = 3$ e $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ortogonale di V allora il sottospazio generato dai vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ è il complemento ortogonale di quello generato dal vettore $\mathbf{v}_3$.
   B) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $-T$.
   C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.
   D) $((-2, 0), (0, -2))$ e $((-3, 0), (-1, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.

8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $z = 0$ e $x + y = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è un vettore ortogonale sia a $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$.
   B) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $2x + y - 3z = 1$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{14}}$.
   C) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0, -1)$, $(1, 2)$, $(3, 0)$, $(4, 3)$ è uguale a 8.
   D) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto $(x, -y, -z)$ è una isometria.

31 marzo 2008 NOME: MATRICOLA: 00110

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è non superiore a n.
   B) se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno gli stessi autovalori.
   C) se A e B sono simili allora S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   D) se $A^2 = B^2$ allora $S \circ S = T \circ T$.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(7, 8, 9)$ sono allineati.
   B) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(0, 0, 0)$, $(3, 0, 3)$, $(3, 3, 0)$, $(0, 3, 3)$ è 9.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 2, y = -t, z = t$ e $x = 1 + t, y = -t, z = 2$ è $\frac{1}{2}$.
   D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, -3)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 1$ è uguale a $\frac{10}{3}$.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = 3, y = s, z = -t$ e $x = 1, y = s - 3, z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) l'identità da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ è una trasformazione lineare.
   B) la funzione $F : \mathcal{M}_5(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ che porta ogni matrice A nella coppia $F(A) = (Tr(A), \det A)$ è una trasformazione lineare.
   C) la somma di due trasformazioni lineari da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$ è una trasformazione lineare.
   D) tutte le trasformazioni lineari iniettive $T : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$ sono anche suriettive.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$, $\mathbf{0}$ la matrice nulla e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) se $\det(A \cdot B) = 1$ allora $\det(B \cdot A) = 1$.
   B) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.
   C) se B è l'inversa di C allora B^{100} è l'inversa di C^{100}.
   D) $\det(-A) = \det A$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi non commutativi dotati di un numero finito di elementi.
   B) l'insieme dei numeri interi è un gruppo rispetto all'operazione di somma.
   C) l'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme delle traslazioni del piano (inclusa la traslazione nulla) è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.

7) Sia **S** un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \dots, x_n$. Allora
   A) l'insieme delle soluzioni di **S** è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) le equazioni di **S** sono linearmente indipendenti se e solo se **S** ammette soltanto la soluzione nulla.
   C) Se **S** ammette solo la soluzione nulla allora la matrice incompleta associata ad **S** è quadrata e regolare.
   D) può accadere che **S** ammetta infinite soluzioni.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che hanno integrale uguale a 1 sull'intervallo $[0, 1]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
   C) l'insieme delle matrici reali 4×4 che hanno esattamente un termine uguale a 1 e tutti gli altri uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ tali che $a^4_5 = a^5_4$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) detta $(x_1, \dots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V ortonormale, si ha che $x_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle$ per ogni indice i.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha che $\langle \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \alpha \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \beta \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.
   D) V ammette una ed una sola base ortogonale.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
   B) $({}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = {}^t(A \cdot B \cdot C)$.
   C) $A \cdot B \cdot C$ è invertibile.
   D) se $A \cdot C = I$ allora $A \cdot B \cdot C = B$.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) se $\mathbf{S}$ ammette soluzione allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti.
   B) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $M_3(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $M_3(\mathbb{R})$, da un (opportuno) sistema lineare parametrico di 9 equazioni in 5 parametri.
   C) se $\rho(A) < m$ e $\rho(C) < n$ allora $\mathbf{S}$ non può ammettere soluzioni.
   D) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il rango di C è strettamente maggiore del rango di A.

3) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) se $T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1, T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2 \ldots, T(\mathbf{u}_n) = \mathbf{u}_n$ allora $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T.
   B) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.
   C) se A è simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   D) A è anche la matrice associata a S rispetto a $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) V ammette una ed una sola base ortogonale.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha che $\langle \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \alpha \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \beta \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.
   C) detta $(x_1, \ldots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V ortonormale, si ha che $x_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle$ per ogni indice i.
   D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 5×5 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme $\{(0,0,0,0),(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se T è un automorfismo sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ allora la matrice associata a T rispetto alla base canonica è invertibile.
   B) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore nel vettore nullo è un endomorfismo.
   C) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m, n > 0)$ è una trasformazione lineare allora l'immagine di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x,y,z) = (x - z, y)$ è una trasformazione lineare.

7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = 3, y = s, z = -t$ e $x = 1, y = s - 3, z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2,-3)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 1$ è uguale a $\frac{10}{3}$.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 2, y = -t, z = t$ e $x = 1 + t, y = -t, z = 2$ è $\frac{1}{2}$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1,2,3)$, $(4,5,6)$, $(7,8,9)$ sono allineati.
   D) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(0,0,0)$, $(3,0,3)$, $(3,3,0)$, $(0,3,3)$ è 9.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri naturali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ $(n \geq 2)$ è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) nell'insieme dei numeri razionali l'usuale operazione di prodotto è associativa.

31 marzo 2008 NOME: MATRICOLA: 01000

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0,0,0)$ e il piano di equazione cartesiana $2x+y-3z=1$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{14}}$.
   B) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0,-1)$, $(1,2)$, $(3,0)$, $(4,3)$ è uguale a 8.
   C) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x,y,z) nel punto $(x,-y,-z)$ è una isometria.
   D) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è un vettore ortogonale sia a $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \dots, x_n$. Allora
   A) può accadere che $\mathbf{S}$ ammetta infinite soluzioni.
   B) Se $\mathbf{S}$ ammette solo la soluzione nulla allora la matrice incompleta associata ad $\mathbf{S}$ è quadrata e regolare.
   C) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\mathbf{S}$ ammette soltanto la soluzione nulla.
   D) l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle traslazioni del piano (inclusa la traslazione nulla) è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.
   B) l'insieme dei numeri interi è un gruppo rispetto all'operazione di somma.
   C) esistono gruppi non commutativi dotati di un numero finito di elementi.
   D) l'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

4) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se $A^2 = B^2$ allora $S \circ S = T \circ T$.
   B) se A e B sono simili allora S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   C) se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno gli stessi autovalori.
   D) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è non superiore a n.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $z = 0$ e $x + y = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

6) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $-T$.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle$.
   C) $((-2, 0), (0, -2))$ e $((-3, 0), (-1, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.
   D) se $n = 3$ e $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ortogonale di V allora il sottospazio generato dai vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ è il complemento ortogonale di quello generato dal vettore $\mathbf{v}_3$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ tali che $a^4_5 = a^5_4$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
   C) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che hanno integrale uguale a 1 sull'intervallo $[0, 1]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle matrici reali 4×4 che hanno esattamente un termine uguale a 1 e tutti gli altri uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$, $\mathbf{0}$ la matrice nulla e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $\det(-A) = \det A$.
   B) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.
   C) se $\det(A \cdot B) = 1$ allora $\det(B \cdot A) = 1$.
   D) se B è l'inversa di C allora B^{100} è l'inversa di C^{100}.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) tutte le trasformazioni lineari iniettive $T : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$ sono anche suriettive.
   B) la somma di due trasformazioni lineari da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$ è una trasformazione lineare.
   C) la funzione $F : \mathcal{M}_5(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ che porta ogni matrice A nella coppia $F(A) = (Tr(A), \det A)$ è una trasformazione lineare.
   D) l'identità da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ è una trasformazione lineare.

31 marzo 2008 NOME: MATRICOLA: 01001

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$, $\mathbf{0}$ la matrice nulla e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $\det(-A) = \det A$.
   B) se $\det(A \cdot B) = 1$ allora $\det(B \cdot A) = 1$.
   C) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.
   D) se B è l'inversa di C allora B^{100} è l'inversa di C^{100}.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ tali che $a^4_5 = a^5_4$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
   B) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che hanno integrale uguale a 1 sull'intervallo $[0, 1]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
   D) l'insieme delle matrici reali 4×4 che hanno esattamente un termine uguale a 1 e tutti gli altri uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $z = 0$ e $x + y = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m, n > 0)$ è una trasformazione lineare allora l'immagine di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y, z) = (x - z, y)$ è una trasformazione lineare.
   C) se T è un automorfismo sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ allora la matrice associata a T rispetto alla base canonica è invertibile.
   D) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore nel vettore nullo è un endomorfismo.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
 A) se $\rho(A) < m$ e $\rho(C) < n$ allora $\mathbf{S}$ non può ammettere soluzioni.
 B) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il rango di C è strettamente maggiore del rango di A.
 C) se $\mathbf{S}$ ammette soluzione allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti.
 D) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $M_3(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $M_3(\mathbb{R})$, da un (opportuno) sistema lineare parametrico di 9 equazioni in 5 parametri.

6) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
 A) se A è simmetrica allora T è diagonalizzabile.
 B) A è anche la matrice associata a S rispetto a $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$.
 C) se $T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1, T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2 \dots, T(\mathbf{u}_n) = \mathbf{u}_n$ allora $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T.
 D) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.

7) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
 A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $-T$.
 B) $((-2,0),(0,-2))$ e $((-3,0),(-1,1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.
 C) se $n = 3$ e $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ortogonale di V allora il sottospazio generato dai vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ è il complemento ortogonale di quello generato dal vettore $\mathbf{v}_3$.
 D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{v},\mathbf{u}\rangle$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
 A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0,0,0)$ e il piano di equazione cartesiana $2x + y - 3z = 1$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{14}}$.
 B) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x,y,z) nel punto $(x,-y,-z)$ è una isometria.
 C) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è un vettore ortogonale sia a $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$.
 D) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0,-1)$, $(1,2)$, $(3,0)$, $(4,3)$ è uguale a 8.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
 A) l'insieme delle traslazioni del piano (inclusa la traslazione nulla) è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.
 B) esistono gruppi non commutativi dotati di un numero finito di elementi.
 C) l'insieme dei numeri interi è un gruppo rispetto all'operazione di somma.
 D) l'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha che $\langle \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \alpha \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle + \beta \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$.
   B) V ammette una ed una sola base ortogonale.
   C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   D) detta $(x_1, \ldots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V ortonormale, si ha che $x_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i\rangle$ per ogni indice i.

2) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno gli stessi autovalori.
   B) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è non superiore a n.
   C) se A e B sono simili allora S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   D) se $A^2 = B^2$ allora $S \circ S = T \circ T$.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $A \cdot B \cdot C$ è invertibile.
   B) se $A \cdot C = I$ allora $A \cdot B \cdot C = B$.
   C) $({}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = {}^t(A \cdot B \cdot C)$.
   D) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) nell'insieme dei numeri razionali l'usuale operazione di prodotto è associativa.
   C) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ $(n \geq 2)$ è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme dei numeri naturali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = 3, y = s, z = -t$ e $x = 1, y = s - 3, z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 2, y = -t, z = t$ e $x = 1 + t, y = -t, z = 2$ è $\frac{1}{2}$.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, -3)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 1$ è uguale a $\frac{10}{3}$.
   C) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(0, 0, 0)$, $(3, 0, 3)$, $(3, 3, 0)$, $(0, 3, 3)$ è 9.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(7, 8, 9)$ sono allineati.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathcal{M}_5(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ che porta ogni matrice A nella coppia $F(A) = (Tr(A), \det A)$ è una trasformazione lineare.
   B) l'identità da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ è una trasformazione lineare.
   C) la somma di due trasformazioni lineari da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$ è una trasformazione lineare.
   D) tutte le trasformazioni lineari iniettive $T : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$ sono anche suriettive.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle matrici reali 5×5 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

9) Sia **S** un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \ldots, x_n$. Allora
   A) le equazioni di **S** sono linearmente indipendenti se e solo se **S** ammette soltanto la soluzione nulla.
   B) l'insieme delle soluzioni di **S** è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) Se **S** ammette solo la soluzione nulla allora la matrice incompleta associata ad **S** è quadrata e regolare.
   D) può accadere che **S** ammetta infinite soluzioni.

31 marzo 2008 NOME: MATRICOLA: 01011

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$, $\mathbf{0}$ la matrice nulla e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.
   B) se B è l'inversa di C allora B^{100} è l'inversa di C^{100}.
   C) $\det(-A) = \det A$.
   D) se $\det(A \cdot B) = 1$ allora $\det(B \cdot A) = 1$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
   B) l'insieme delle matrici reali 4×4 che hanno esattamente un termine uguale a 1 e tutti gli altri uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ tali che $a^4_5 = a^5_4$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
   D) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che hanno integrale uguale a 1 sull'intervallo $[0, 1]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m, n > 0)$ è una trasformazione lineare allora l'immagine di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.
   B) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore nel vettore nullo è un endomorfismo.
   C) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y, z) = (x - z, y)$ è una trasformazione lineare.
   D) se T è un automorfismo sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ allora la matrice associata a T rispetto alla base canonica è invertibile.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) se $\rho(A) < m$ e $\rho(C) < n$ allora $\mathbf{S}$ non può ammettere soluzioni.
   B) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $M_3(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $M_3(\mathbb{R})$, da un (opportuno) sistema lineare parametrico di 9 equazioni in 5 parametri.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il rango di C è strettamente maggiore del rango di A.
   D) se $\mathbf{S}$ ammette soluzione allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, -3)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 1$ è uguale a $\frac{10}{3}$.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(7, 8, 9)$ sono allineati.
   C) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(0, 0, 0)$, $(3, 0, 3)$, $(3, 3, 0)$, $(0, 3, 3)$ è 9.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 2, y = -t, z = t$ e $x = 1 + t, y = -t, z = 2$ è $\frac{1}{2}$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri interi è un gruppo rispetto all'operazione di somma.
   B) l'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme delle traslazioni del piano (inclusa la traslazione nulla) è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.
   D) esistono gruppi non commutativi dotati di un numero finito di elementi.

7) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) se A è simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   B) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.
   C) A è anche la matrice associata a S rispetto a $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$.
   D) se $T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1, T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2 \ldots, T(\mathbf{u}_n) = \mathbf{u}_n$ allora $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) V ammette una ed una sola base ortogonale.
   B) detta $(x_1, \ldots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V ortonormale, si ha che $x_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle$ per ogni indice i.
   C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha che $\langle \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \alpha \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \beta \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = 3, y = s, z = -t$ e $x = 1, y = s - 3, z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \dots, x_n$. Allora
   A) l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) Se $\mathbf{S}$ ammette solo la soluzione nulla allora la matrice incompleta associata ad $\mathbf{S}$ è quadrata e regolare.
   C) può accadere che $\mathbf{S}$ ammetta infinite soluzioni.
   D) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\mathbf{S}$ ammette soltanto la soluzione nulla.

2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $z = 0$ e $x + y = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ ($n \geq 2$) è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   B) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme dei numeri naturali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) nell'insieme dei numeri razionali l'usuale operazione di prodotto è associativa.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0, -1)$, $(1, 2)$, $(3, 0)$, $(4, 3)$ è uguale a 8.
   B) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $2x + y - 3z = 1$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{14}}$.
   C) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è un vettore ortogonale sia a $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$.
   D) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto $(x, -y, -z)$ è una isometria.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle matrici reali 5×5 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme $\{(0,0,0,0),(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $({}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = {}^t(A \cdot B \cdot C)$.
   B) $A \cdot B \cdot C$ è invertibile.
   C) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
   D) se $A \cdot C = I$ allora $A \cdot B \cdot C = B$.

7) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è non superiore a n.
   B) se A e B sono simili allora S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   C) se $A^2 = B^2$ allora $S \circ S = T \circ T$.
   D) se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno gli stessi autovalori.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) l'identità da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ è una trasformazione lineare.
   B) la somma di due trasformazioni lineari da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$ è una trasformazione lineare.
   C) tutte le trasformazioni lineari iniettive $T : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$ sono anche suriettive.
   D) la funzione $F : \mathcal{M}_5(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ che porta ogni matrice A nella coppia $F(A) = (Tr(A), \det A)$ è una trasformazione lineare.

9) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.
   B) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $-T$.
   C) se $n = 3$ e $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ortogonale di V allora il sottospazio generato dai vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ è il complemento ortogonale di quello generato dal vettore $\mathbf{v}_3$.
   D) $((-2,0),(0,-2))$ e $((-3,0),(-1,1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.

31 marzo 2008 NOME: MATRICOLA: 01101

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali 5×5 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(0,0,0,0),(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $z = 0$ e $x + y = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

3) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0,0,0)$ e il piano di equazione cartesiana $2x + y - 3z = 1$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{14}}$.
   B) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è un vettore ortogonale sia a $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$.
   C) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0,-1)$, $(1,2)$, $(3,0)$, $(4,3)$ è uguale a 8.
   D) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x,y,z) nel punto $(x,-y,-z)$ è una isometria.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se T è un automorfismo sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ allora la matrice associata a T rispetto alla base canonica è invertibile.
   B) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore nel vettore nullo è un endomorfismo.
   C) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x,y,z) = (x - z, y)$ è una trasformazione lineare.
   D) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m,n > 0)$ è una trasformazione lineare allora l'immagine di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.

5) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) se $\mathbf{S}$ ammette soluzione allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti.
   B) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $M_3(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $M_3(\mathbb{R})$, da un (opportuno) sistema lineare parametrico di 9 equazioni in 5 parametri.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il rango di C è strettamente maggiore del rango di A.
   D) se $\rho(A) < m$ e $\rho(C) < n$ allora $\mathbf{S}$ non può ammettere soluzioni.

6) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) se $T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1, T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2 \dots, T(\mathbf{u}_n) = \mathbf{u}_n$ allora $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T.
   B) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.
   C) A è anche la matrice associata a S rispetto a $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$.
   D) se A è simmetrica allora T è diagonalizzabile.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $-T$.
   B) se $n = 3$ e $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ortogonale di V allora il sottospazio generato dai vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ è il complemento ortogonale di quello generato dal vettore $\mathbf{v}_3$.
   C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.
   D) $((-2, 0), (0, -2))$ e $((-3, 0), (-1, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme dei numeri naturali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) nell'insieme dei numeri razionali l'usuale operazione di prodotto è associativa.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ ($n \geq 2$) è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

9) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $A \cdot B \cdot C$ è invertibile.
   B) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
   C) se $A \cdot C = I$ allora $A \cdot B \cdot C = B$.
   D) $({}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = {}^t(A \cdot B \cdot C)$.

31 marzo 2008 NOME: MATRICOLA: 01110

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = 3, y = s, z = -t$ e $x = 1, y = s - 3, z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha che $\langle \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \alpha \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \beta \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   C) detta $(x_1, \dots , x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $(\mathbf{u}_1, \dots , \mathbf{u}_n)$ di V ortonormale, si ha che $x_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle$ per ogni indice i.
   D) V ammette una ed una sola base ortogonale.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$, $\mathbf{0}$ la matrice nulla e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) se B è l'inversa di C allora B^{100} è l'inversa di C^{100}.
   B) se $\det(A \cdot B) = 1$ allora $\det(B \cdot A) = 1$.
   C) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.
   D) $\det(-A) = \det A$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) esistono gruppi non commutativi dotati di un numero finito di elementi.
   C) l'insieme dei numeri interi è un gruppo rispetto all'operazione di somma.
   D) l'insieme delle traslazioni del piano (inclusa la traslazione nulla) è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 4×4 che hanno esattamente un termine uguale a 1 e tutti gli altri uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   B) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che hanno integrale uguale a 1 sull'intervallo $[0,1]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
   D) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ tali che $a^4_5 = a^5_4$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).

6) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno gli stessi autovalori.
   B) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è non superiore a n.
   C) se A e B sono simili allora S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   D) se $A^2 = B^2$ allora $S \circ S = T \circ T$.

7) Sia **S** un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \dots, x_n$. Allora
   A) le equazioni di **S** sono linearmente indipendenti se e solo se **S** ammette soltanto la soluzione nulla.
   B) l'insieme delle soluzioni di **S** è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) Se **S** ammette solo la soluzione nulla allora la matrice incompleta associata ad **S** è quadrata e regolare.
   D) può accadere che **S** ammetta infinite soluzioni.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathcal{M}_5(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ che porta ogni matrice A nella coppia $F(A) = (Tr(A), \det A)$ è una trasformazione lineare.
   B) l'identità da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ è una trasformazione lineare.
   C) la somma di due trasformazioni lineari da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$ è una trasformazione lineare.
   D) tutte le trasformazioni lineari iniettive $T : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$ sono anche suriettive.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 2, y = -t, z = t$ e $x = 1 + t, y = -t, z = 2$ è $\frac{1}{2}$.
   B) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(0,0,0)$, $(3,0,3)$, $(3,3,0)$, $(0,3,3)$ è 9.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1,2,3)$, $(4,5,6)$, $(7,8,9)$ sono allineati.
   D) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2,-3)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 1$ è uguale a $\frac{10}{3}$.

31 marzo 2008 NOME: MATRICOLA: 01111

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se T è un automorfismo sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ allora la matrice associata a T rispetto alla base canonica è invertibile.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y, z) = (x - z, y)$ è una trasformazione lineare.
   C) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m, n > 0)$ è una trasformazione lineare allora l'immagine di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.
   D) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore nel vettore nullo è un endomorfismo.

2) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) se $T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1, T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2 \dots, T(\mathbf{u}_n) = \mathbf{u}_n$ allora $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T.
   B) A è anche la matrice associata a S rispetto a $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$.
   C) se A è simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   D) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) V ammette una ed una sola base ortogonale.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha che $\langle \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \alpha \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \beta \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.
   C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   D) detta $(x_1, \dots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V ortonormale, si ha che $x_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle$ per ogni indice i.

4) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) se $\mathbf{S}$ ammette soluzione allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti.
   B) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il rango di C è strettamente maggiore del rango di A.
   C) se $\rho(A) < m$ e $\rho(C) < n$ allora $\mathbf{S}$ non può ammettere soluzioni.
   D) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $M_3(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $M_3(\mathbb{R})$, da un (opportuno) sistema lineare parametrico di 9 equazioni in 5 parametri.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = 3, y = s, z = -t$ e $x = 1, y = s - 3, z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, -3)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 1$ è uguale a $\frac{10}{3}$.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 2, y = -t, z = t$ e $x = 1 + t, y = -t, z = 2$ è $\frac{1}{2}$.
   C) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(0, 0, 0)$, $(3, 0, 3)$, $(3, 3, 0)$, $(0, 3, 3)$ è 9.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(7, 8, 9)$ sono allineati.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri naturali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) nell'insieme dei numeri razionali l'usuale operazione di prodotto è associativa.
   C) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ $(n \geq 2)$ è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
   B) se $A \cdot C = I$ allora $A \cdot B \cdot C = B$.
   C) $A \cdot B \cdot C$ è invertibile.
   D) $({}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = {}^t(A \cdot B \cdot C)$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 5×5 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   C) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$, $\mathbf{0}$ la matrice nulla e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.
   B) se B è l'inversa di C allora B^{100} è l'inversa di C^{100}.
   C) se $\det(A \cdot B) = 1$ allora $\det(B \cdot A) = 1$.
   D) $\det(-A) = \det A$.

2) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno gli stessi autovalori.
   B) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è non superiore a n.
   C) se $A^2 = B^2$ allora $S \circ S = T \circ T$.
   D) se A e B sono simili allora S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico.

3) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $-T$.
   B) se $n = 3$ e $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ortogonale di V allora il sottospazio generato dai vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ è il complemento ortogonale di quello generato dal vettore $\mathbf{v}_3$.
   C) $((-2, 0), (0, -2))$ e $((-3, 0), (-1, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.
   D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
   B) l'insieme delle matrici reali 4×4 che hanno esattamente un termine uguale a 1 e tutti gli altri uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che hanno integrale uguale a 1 sull'intervallo $[0, 1]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ tali che $a^4_5 = a^5_4$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri interi è un gruppo rispetto all'operazione di somma.
   B) l'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) esistono gruppi non commutativi dotati di un numero finito di elementi.
   D) l'insieme delle traslazioni del piano (inclusa la traslazione nulla) è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.

6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $z = 0$ e $x + y = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.

7) Sia **S** un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \ldots, x_n$. Allora
   A) le equazioni di **S** sono linearmente indipendenti se e solo se **S** ammette soltanto la soluzione nulla.
   B) l'insieme delle soluzioni di **S** è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) può accadere che **S** ammetta infinite soluzioni.
   D) Se **S** ammette solo la soluzione nulla allora la matrice incompleta associata ad **S** è quadrata e regolare.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathcal{M}_5(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ che porta ogni matrice A nella coppia $F(A) = (Tr(A), \det A)$ è una trasformazione lineare.
   B) l'identità da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ è una trasformazione lineare.
   C) tutte le trasformazioni lineari iniettive $T : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$ sono anche suriettive.
   D) la somma di due trasformazioni lineari da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$ è una trasformazione lineare.

9) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $2x + y - 3z = 1$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{14}}$.
   B) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è un vettore ortogonale sia a $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$.
   C) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto $(x, -y, -z)$ è una isometria.
   D) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0, -1)$, $(1, 2)$, $(3, 0)$, $(4, 3)$ è uguale a 8.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che hanno integrale uguale a 1 sull'intervallo $[0,1]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ tali che $a^4_5 = a^5_4$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
   C) l'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
   D) l'insieme delle matrici reali 4×4 che hanno esattamente un termine uguale a 1 e tutti gli altri uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore nel vettore nullo è un endomorfismo.
   B) se T è un automorfismo sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ allora la matrice associata a T rispetto alla base canonica è invertibile.
   C) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m,n > 0)$ è una trasformazione lineare allora l'immagine di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x,y,z) = (x-z, y)$ è una trasformazione lineare.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m,n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $M_3(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $M_3(\mathbb{R})$, da un (opportuno) sistema lineare parametrico di 9 equazioni in 5 parametri.
   B) se $\mathbf{S}$ ammette soluzione allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti.
   C) se $\rho(A) < m$ e $\rho(C) < n$ allora $\mathbf{S}$ non può ammettere soluzioni.
   D) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il rango di C è strettamente maggiore del rango di A.

4) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.
   B) se $T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1, T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2 \ldots, T(\mathbf{u}_n) = \mathbf{u}_n$ allora $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T.
   C) se A è simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   D) A è anche la matrice associata a S rispetto a $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$.

5) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$, $\mathbf{0}$ la matrice nulla e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) se $\det(A \cdot B) = 1$ allora $\det(B \cdot A) = 1$.
   B) $\det(-A) = \det A$.
   C) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.
   D) se B è l'inversa di C allora B^{100} è l'inversa di C^{100}.

6) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $z = 0$ e $x + y = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0, -1)$, $(1, 2)$, $(3, 0)$, $(4, 3)$ è uguale a 8.
   B) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $2x + y - 3z = 1$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{14}}$.
   C) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è un vettore ortogonale sia a $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$.
   D) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto $(x, -y, -z)$ è una isometria.

8) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.
   B) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $-T$.
   C) se $n = 3$ e $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ortogonale di V allora il sottospazio generato dai vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ è il complemento ortogonale di quello generato dal vettore $\mathbf{v}_3$.
   D) $((-2, 0), (0, -2))$ e $((-3, 0), (-1, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi non commutativi dotati di un numero finito di elementi.
   B) l'insieme delle traslazioni del piano (inclusa la traslazione nulla) è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.
   C) l'insieme dei numeri interi è un gruppo rispetto all'operazione di somma.
   D) l'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = 3, y = s, z = -t$ e $x = 1, y = s - 3, z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.

2) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) V ammette una ed una sola base ortogonale.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   C) detta $(x_1, \dots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V ortonormale, si ha che $x_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle$ per ogni indice i.
   D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha che $\langle \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \alpha \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \beta \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

3) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) se $A \cdot C = I$ allora $A \cdot B \cdot C = B$.
   B) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
   C) $A \cdot B \cdot C$ è invertibile.
   D) $({}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = {}^t(A \cdot B \cdot C)$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) nell'insieme dei numeri razionali l'usuale operazione di prodotto è associativa.
   B) l'insieme dei numeri naturali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ ($n \geq 2$) è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) tutte le trasformazioni lineari iniettive $T : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$ sono anche suriettive.
   B) la somma di due trasformazioni lineari da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$ è una trasformazione lineare.
   C) la funzione $F : \mathcal{M}_5(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ che porta ogni matrice A nella coppia $F(A) = (Tr(A), \det A)$ è una trasformazione lineare.
   D) l'identità da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ è una trasformazione lineare.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(0,0,0,0),(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   B) l'insieme delle matrici reali 5×5 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

7) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2,-3)$ e la retta di equazione $2x-3y=1$ è uguale a $\frac{10}{3}$.
   B) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(0,0,0)$, $(3,0,3)$, $(3,3,0)$, $(0,3,3)$ è 9.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1,2,3)$, $(4,5,6)$, $(7,8,9)$ sono allineati.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x=2, y=-t, z=t$ e $x=1+t, y=-t, z=2$ è $\frac{1}{2}$.

8) Sia **S** un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1,\dots,x_n$. Allora
   A) può accadere che **S** ammetta infinite soluzioni.
   B) Se **S** ammette solo la soluzione nulla allora la matrice incompleta associata ad **S** è quadrata e regolare.
   C) le equazioni di **S** sono linearmente indipendenti se e solo se **S** ammette soltanto la soluzione nulla.
   D) l'insieme delle soluzioni di **S** è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

9) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n>0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se $A^2 = B^2$ allora $S \circ S = T \circ T$.
   B) se A e B sono simili allora S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   C) se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno gli stessi autovalori.
   D) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è non superiore a n.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m, n > 0)$ è una trasformazione lineare allora l'immagine di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.
   B) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore nel vettore nullo è un endomorfismo.
   C) se T è un automorfismo sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ allora la matrice associata a T rispetto alla base canonica è invertibile.
   D) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y, z) = (x - z, y)$ è una trasformazione lineare.

2) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha che $\langle\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \alpha \cdot \langle\mathbf{u}, \mathbf{w}\rangle + \beta \cdot \langle\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$.
   B) V ammette una ed una sola base ortogonale.
   C) detta $(x_1, \ldots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V ortonormale, si ha che $x_i = \langle\mathbf{v}, \mathbf{u}_i\rangle$ per ogni indice i.
   D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) se $\rho(A) < m$ e $\rho(C) < n$ allora $\mathbf{S}$ non può ammettere soluzioni.
   B) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $M_3(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $M_3(\mathbb{R})$, da un (opportuno) sistema lineare parametrico di 9 equazioni in 5 parametri.
   C) se $\mathbf{S}$ ammette soluzione allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti.
   D) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il rango di C è strettamente maggiore del rango di A.

4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = 3, y = s, z = -t$ e $x = 1, y = s - 3, z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

5) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 2, y = -t, z = t$ e $x = 1 + t, y = -t, z = 2$ è $\frac{1}{2}$.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, -3)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 1$ è uguale a $\frac{10}{3}$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(7, 8, 9)$ sono allineati.
   D) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(0, 0, 0)$, $(3, 0, 3)$, $(3, 3, 0)$, $(0, 3, 3)$ è 9.

6) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) se A è simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   B) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.
   C) se $T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1, T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2 \ldots, T(\mathbf{u}_n) = \mathbf{u}_n$ allora $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T.
   D) A è anche la matrice associata a S rispetto a $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle traslazioni del piano (inclusa la traslazione nulla) è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.
   B) esistono gruppi non commutativi dotati di un numero finito di elementi.
   C) l'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme dei numeri interi è un gruppo rispetto all'operazione di somma.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$, $\mathbf{0}$ la matrice nulla e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $\det(-A) = \det A$.
   B) se $\det(A \cdot B) = 1$ allora $\det(B \cdot A) = 1$.
   C) se B è l'inversa di C allora B^{100} è l'inversa di C^{100}.
   D) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ tali che $a^4_5 = a^5_4$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
   B) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che hanno integrale uguale a 1 sull'intervallo $[0, 1]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme delle matrici reali 4×4 che hanno esattamente un termine uguale a 1 e tutti gli altri uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri naturali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ ($n \geq 2$) è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) nell'insieme dei numeri razionali l'usuale operazione di prodotto è associativa.

2) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se $A^2 = B^2$ allora $S \circ S = T \circ T$.
   B) se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno gli stessi autovalori.
   C) se A e B sono simili allora S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   D) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è non superiore a n.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 5×5 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme $\{(0,0,0,0),(1,0,0,0),(1,1,0,0),(1,1,1,0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.

4) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
   B) $A \cdot B \cdot C$ è invertibile.
   C) $({}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = {}^t(A \cdot B \cdot C)$.
   D) se $A \cdot C = I$ allora $A \cdot B \cdot C = B$.

5) Sia **S** un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \dots, x_n$. Allora
   A) può accadere che **S** ammetta infinite soluzioni.
   B) le equazioni di **S** sono linearmente indipendenti se e solo se **S** ammette soltanto la soluzione nulla.
   C) Se **S** ammette solo la soluzione nulla allora la matrice incompleta associata ad **S** è quadrata e regolare.
   D) l'insieme delle soluzioni di **S** è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
 A) tutte le trasformazioni lineari iniettive $T : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$ sono anche suriettive.
 B) la funzione $F : \mathcal{M}_5(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ che porta ogni matrice A nella coppia $F(A) = (Tr(A), \det A)$ è una trasformazione lineare.
 C) la somma di due trasformazioni lineari da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$ è una trasformazione lineare.
 D) l'identità da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ è una trasformazione lineare.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
 A) $((-2,0),(0,-2))$ e $((-3,0),(-1,1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.
 B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.
 C) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $-T$.
 D) se $n = 3$ e $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ortogonale di V allora il sottospazio generato dai vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ è il complemento ortogonale di quello generato dal vettore $\mathbf{v}_3$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
 A) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto $(x, -y, -z)$ è una isometria.
 B) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0, -1)$, $(1, 2)$, $(3, 0)$, $(4, 3)$ è uguale a 8.
 C) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $2x + y - 3z = 1$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{14}}$.
 D) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è un vettore ortogonale sia a $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $z = 0$ e $x + y = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
 A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
 B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
 C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
 D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $z = 0$ e $x + y = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

2) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $2x + y - 3z = 1$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{14}}$.
   B) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0, -1)$, $(1, 2)$, $(3, 0)$, $(4, 3)$ è uguale a 8.
   C) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è un vettore ortogonale sia a $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$.
   D) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto $(x, -y, -z)$ è una isometria.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali 5×5 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) A è anche la matrice associata a S rispetto a $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$.
   B) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.
   C) se A è simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   D) se $T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1, T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2 \dots, T(\mathbf{u}_n) = \mathbf{u}_n$ allora $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T.

5) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $-T$.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.
   C) se $n = 3$ e $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ortogonale di V allora il sottospazio generato dai vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ è il complemento ortogonale di quello generato dal vettore $\mathbf{v}_3$.
   D) $((-2, 0), (0, -2))$ e $((-3, 0), (-1, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme dei numeri naturali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) nell'insieme dei numeri razionali l'usuale operazione di prodotto è associativa.
   D) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ $(n \geq 2)$ è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $A \cdot B \cdot C$ è invertibile.
   B) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
   C) se $A \cdot C = I$ allora $A \cdot B \cdot C = B$.
   D) $({}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = {}^t(A \cdot B \cdot C)$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y, z) = (x - z, y)$ è una trasformazione lineare.
   B) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore nel vettore nullo è un endomorfismo.
   C) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m, n > 0)$ è una trasformazione lineare allora l'immagine di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.
   D) se T è un automorfismo sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ allora la matrice associata a T rispetto alla base canonica è invertibile.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il rango di C è strettamente maggiore del rango di A.
   B) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $M_3(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $M_3(\mathbb{R})$, da un (opportuno) sistema lineare parametrico di 9 equazioni in 5 parametri.
   C) se $\rho(A) < m$ e $\rho(C) < n$ allora $\mathbf{S}$ non può ammettere soluzioni.
   D) se $\mathbf{S}$ ammette soluzione allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la somma di due trasformazioni lineari da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$ è una trasformazione lineare.
   B) l'identità da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ è una trasformazione lineare.
   C) tutte le trasformazioni lineari iniettive $T : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$ sono anche suriettive.
   D) la funzione $F : \mathcal{M}_5(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ che porta ogni matrice A nella coppia $F(A) = (Tr(A), \det A)$ è una trasformazione lineare.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi non commutativi dotati di un numero finito di elementi.
   B) l'insieme delle traslazioni del piano (inclusa la traslazione nulla) è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.
   C) l'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   D) l'insieme dei numeri interi è un gruppo rispetto all'operazione di somma.

3) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se A e B sono simili allora S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   B) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è non superiore a n.
   C) se $A^2 = B^2$ allora $S \circ S = T \circ T$.
   D) se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno gli stessi autovalori.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(0,0,0)$, $(3,0,3)$, $(3,3,0)$, $(0,3,3)$ è 9.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2,-3)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 1$ è uguale a $\frac{10}{3}$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 2, y = -t, z = t$ e $x = 1 + t, y = -t, z = 2$ è $\frac{1}{2}$.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1,2,3)$, $(4,5,6)$, $(7,8,9)$ sono allineati.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che hanno integrale uguale a 1 sull'intervallo $[0,1]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme delle matrici reali $A = (a_j^i) \in \mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ tali che $a_5^4 = a_4^5$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
   C) l'insieme delle matrici reali 4×4 che hanno esattamente un termine uguale a 1 e tutti gli altri uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   D) l'insieme $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$, $\mathbf{0}$ la matrice nulla e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) se $\det(A \cdot B) = 1$ allora $\det(B \cdot A) = 1$.
   B) $\det(-A) = \det A$.
   C) se B è l'inversa di C allora B^{100} è l'inversa di C^{100}.
   D) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.

7) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   B) V ammette una ed una sola base ortogonale.
   C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha che $\langle \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \alpha \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \beta \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.
   D) detta $(x_1, \dots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V ortonormale, si ha che $x_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle$ per ogni indice i.

8) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \dots, x_n$. Allora
   A) Se $\mathbf{S}$ ammette solo la soluzione nulla allora la matrice incompleta associata ad $\mathbf{S}$ è quadrata e regolare.
   B) l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) può accadere che $\mathbf{S}$ ammetta infinite soluzioni.
   D) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\mathbf{S}$ ammette soltanto la soluzione nulla.

9) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = 3, y = s, z = -t$ e $x = 1, y = s - 3, z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m, n > 0)$ è una trasformazione lineare allora l'immagine di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y, z) = (x - z, y)$ è una trasformazione lineare.
   C) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore nel vettore nullo è un endomorfismo.
   D) se T è un automorfismo sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ allora la matrice associata a T rispetto alla base canonica è invertibile.

2) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) se $\rho(A) < m$ e $\rho(C) < n$ allora $\mathbf{S}$ non può ammettere soluzioni.
   B) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il rango di C è strettamente maggiore del rango di A.
   C) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $M_3(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $M_3(\mathbb{R})$, da un (opportuno) sistema lineare parametrico di 9 equazioni in 5 parametri.
   D) se $\mathbf{S}$ ammette soluzione allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti.

3) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = 3, y = s, z = -t$ e $x = 1, y = s - 3, z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, -3)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 1$ è uguale a $\frac{10}{3}$.
   B) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 2, y = -t, z = t$ e $x = 1 + t, y = -t, z = 2$ è $\frac{1}{2}$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(7, 8, 9)$ sono allineati.
   D) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(0, 0, 0)$, $(3, 0, 3)$, $(3, 3, 0)$, $(0, 3, 3)$ è 9.

5) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) se A è simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   B) A è anche la matrice associata a S rispetto a $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$.
   C) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.
   D) se $T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1, T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2 \ldots, T(\mathbf{u}_n) = \mathbf{u}_n$ allora $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) V ammette una ed una sola base ortogonale.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha che $\langle \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \alpha \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \beta \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.
   C) detta $(x_1, \ldots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V ortonormale, si ha che $x_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle$ per ogni indice i.
   D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri naturali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) nell'insieme dei numeri razionali l'usuale operazione di prodotto è associativa.
   C) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ $(n \geq 2)$ è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

8) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.
   B) se $A \cdot C = I$ allora $A \cdot B \cdot C = B$.
   C) $({}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = {}^t(A \cdot B \cdot C)$.
   D) $A \cdot B \cdot C$ è invertibile.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 5×5 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(0,0,0,0), (1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

31 marzo 2008 NOME: MATRICOLA: 11000

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$, $\mathbf{0}$ la matrice nulla e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) se B è l'inversa di C allora B^{100} è l'inversa di C^{100}.
   B) $\det(-A) = \det A$.
   C) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.
   D) se $\det(A \cdot B) = 1$ allora $\det(B \cdot A) = 1$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme delle traslazioni del piano (inclusa la traslazione nulla) è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.
   C) l'insieme dei numeri interi è un gruppo rispetto all'operazione di somma.
   D) esistono gruppi non commutativi dotati di un numero finito di elementi.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle matrici reali 4×4 che hanno esattamente un termine uguale a 1 e tutti gli altri uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   B) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ tali che $a^4_5 = a^5_4$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
   C) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
   D) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che hanno integrale uguale a 1 sull'intervallo $[0, 1]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $-T$.
   B) se $n = 3$ e $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ortogonale di V allora il sottospazio generato dai vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ è il complemento ortogonale di quello generato dal vettore $\mathbf{v}_3$.
   C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.
   D) $((-2, 0), (0, -2))$ e $((-3, 0), (-1, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.

5) Sia **S** un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \ldots, x_n$. Allora
  A) può accadere che **S** ammetta infinite soluzioni.
  B) Se **S** ammette solo la soluzione nulla allora la matrice incompleta associata ad **S** è quadrata e regolare.
  C) le equazioni di **S** sono linearmente indipendenti se e solo se **S** ammette soltanto la soluzione nulla.
  D) l'insieme delle soluzioni di **S** è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
  A) tutte le trasformazioni lineari iniettive $T : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$ sono anche suriettive.
  B) la somma di due trasformazioni lineari da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$ è una trasformazione lineare.
  C) la funzione $F : \mathcal{M}_5(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ che porta ogni matrice A nella coppia $F(A) = (Tr(A), \det A)$ è una trasformazione lineare.
  D) l'identità da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ è una trasformazione lineare.

7) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $z = 0$ e $x + y = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
  A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
  B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
  C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
  D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
  A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $2x + y - 3z = 1$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{14}}$.
  B) se **u** e **v** sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è un vettore ortogonale sia a **u** che a **v**.
  C) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0, -1)$, $(1, 2)$, $(3, 0)$, $(4, 3)$ è uguale a 8.
  D) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto $(x, -y, -z)$ è una isometria.

9) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
  A) se $A^2 = B^2$ allora $S \circ S = T \circ T$.
  B) se A e B sono simili allora S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico.
  C) se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno gli stessi autovalori.
  D) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è non superiore a n.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) se $\rho(A) < m$ e $\rho(C) < n$ allora $\mathbf{S}$ non può ammettere soluzioni.
   B) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il rango di C è strettamente maggiore del rango di A.
   C) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $M_3(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $M_3(\mathbb{R})$, da un (opportuno) sistema lineare parametrico di 9 equazioni in 5 parametri.
   D) se $\mathbf{S}$ ammette soluzione allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti.

2) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) se A è simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   B) A è anche la matrice associata a S rispetto a $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$.
   C) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.
   D) se $T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1, T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2 \dots, T(\mathbf{u}_n) = \mathbf{u}_n$ allora $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T.

3) Sia $\langle\cdot,\cdot\rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Allora
   A) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $-T$.
   B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle\mathbf{v}, \mathbf{u}\rangle$.
   C) $((-2, 0), (0, -2))$ e $((-3, 0), (-1, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.
   D) se $n = 3$ e $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ortogonale di V allora il sottospazio generato dai vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ è il complemento ortogonale di quello generato dal vettore $\mathbf{v}_3$.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri interi è un gruppo rispetto all'operazione di somma.
   B) l'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) esistono gruppi non commutativi dotati di un numero finito di elementi.
   D) l'insieme delle traslazioni del piano (inclusa la traslazione nulla) è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $z = 0$ e $x + y = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.

6) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $2x + y - 3z = 1$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{14}}$.
   B) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0, -1)$, $(1, 2)$, $(3, 0)$, $(4, 3)$ è uguale a 8.
   C) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto $(x, -y, -z)$ è una isometria.
   D) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è un vettore ortogonale sia a $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$.

7) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$, $\mathbf{0}$ la matrice nulla e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.
   B) se B è l'inversa di C allora B^{100} è l'inversa di C^{100}.
   C) se $\det(A \cdot B) = 1$ allora $\det(B \cdot A) = 1$.
   D) $\det(-A) = \det A$.

8) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
   B) l'insieme delle matrici reali 4×4 che hanno esattamente un termine uguale a 1 e tutti gli altri uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.
   C) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che hanno integrale uguale a 1 sull'intervallo $[0, 1]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ tali che $a^4_5 = a^5_4$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m, n > 0)$ è una trasformazione lineare allora l'immagine di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.
   B) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y, z) = (x - z, y)$ è una trasformazione lineare.
   C) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore nel vettore nullo è un endomorfismo.
   D) se T è un automorfismo sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ allora la matrice associata a T rispetto alla base canonica è invertibile.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) $A \cdot B \cdot C$ è invertibile.
   B) $({}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = {}^t(A \cdot B \cdot C)$.
   C) se $A \cdot C = I$ allora $A \cdot B \cdot C = B$.
   D) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   B) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ $(n \geq 2)$ è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   C) nell'insieme dei numeri razionali l'usuale operazione di prodotto è associativa.
   D) l'insieme dei numeri naturali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la somma di due trasformazioni lineari da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$ è una trasformazione lineare.
   B) tutte le trasformazioni lineari iniettive $T : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$ sono anche suriettive.
   C) l'identità da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ è una trasformazione lineare.
   D) la funzione $F : \mathcal{M}_5(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ che porta ogni matrice A nella coppia $F(A) = (Tr(A), \det A)$ è una trasformazione lineare.

4) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme $\{(0,0,0,0), (1,0,0,0), (1,1,0,0), (1,1,1,0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   D) l'insieme delle matrici reali 5×5 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

5) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = 3, y = s, z = -t$ e $x = 1, y = s - 3, z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.

6) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora

A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha che $\langle \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \alpha \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \beta \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

B) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

C) V ammette una ed una sola base ortogonale.

D) detta $(x_1, \ldots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V ortonormale, si ha che $x_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle$ per ogni indice i.

7) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora

A) se A e B sono simili allora S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico.

B) se $A^2 = B^2$ allora $S \circ S = T \circ T$.

C) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è non superiore a n.

D) se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno gli stessi autovalori.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?

A) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 2, y = -t, z = t$ e $x = 1 + t, y = -t, z = 2$ è $\frac{1}{2}$.

B) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(0, 0, 0)$, $(3, 0, 3)$, $(3, 3, 0)$, $(0, 3, 3)$ è 9.

C) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, -3)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 1$ è uguale a $\frac{10}{3}$.

D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(7, 8, 9)$ sono allineati.

9) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \ldots, x_n$. Allora

A) Se $\mathbf{S}$ ammette solo la soluzione nulla allora la matrice incompleta associata ad $\mathbf{S}$ è quadrata e regolare.

B) può accadere che $\mathbf{S}$ ammetta infinite soluzioni.

C) l'insieme delle soluzioni di $\mathbf{S}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

D) le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti se e solo se $\mathbf{S}$ ammette soltanto la soluzione nulla.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.
   B) V ammette una ed una sola base ortogonale.
   C) detta $(x_1, \ldots, x_n)$ l'n-upla delle coordinate del generico vettore $\mathbf{v} \in V$ rispetto ad una base $(\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n)$ di V ortonormale, si ha che $x_i = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle$ per ogni indice i.
   D) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ ed ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ si ha che $\langle \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \alpha \cdot \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \beta \cdot \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.

2) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) l'applicazione da $\mathbb{R}^3$ in $\mathbb{R}^3$ che manda ogni vettore nel vettore nullo è un endomorfismo.
   B) se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m, n > 0)$ è una trasformazione lineare allora l'immagine di T è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^m$.
   C) la funzione $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definita da $F(x, y, z) = (x - z, y)$ è una trasformazione lineare.
   D) se T è un automorfismo sullo spazio vettoriale reale standard $\mathbb{R}^n$ allora la matrice associata a T rispetto alla base canonica è invertibile.

3) Sia $\mathbf{S}$ un sistema lineare a coefficienti reali di m equazioni in n incognite (m, n interi positivi). Siano A e C la matrice incompleta e completa associate ad $\mathbf{S}$, rispettivamente. Allora
   A) ogni sottospazio vettoriale 5-dimensionale di $M_3(\mathbb{R})$ può essere rappresentato, relativamente alla base canonica di $M_3(\mathbb{R})$, da un (opportuno) sistema lineare parametrico di 9 equazioni in 5 parametri.
   B) se $\rho(A) < m$ e $\rho(C) < n$ allora $\mathbf{S}$ non può ammettere soluzioni.
   C) $\mathbf{S}$ ammette soluzione se e solo se il rango di C è strettamente maggiore del rango di A.
   D) se $\mathbf{S}$ ammette soluzione allora le equazioni di $\mathbf{S}$ sono linearmente indipendenti.

4) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) nello spazio euclideo standard il volume del tetraedro di vertici $(0, 0, 0)$, $(3, 0, 3)$, $(3, 3, 0)$, $(0, 3, 3)$ è 9.
   B) nel piano euclideo standard la distanza fra il punto di coordinate $(2, -3)$ e la retta di equazione $2x - 3y = 1$ è uguale a $\frac{10}{3}$.
   C) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale i tre punti $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$, $(7, 8, 9)$ sono allineati.
   D) nello spazio euclideo standard 3-dimensionale il coseno dell'angolo fra le rette di equazioni parametriche $x = 2, y = -t, z = t$ e $x = 1 + t, y = -t, z = 2$ è $\frac{1}{2}$.

5) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) esistono gruppi non commutativi dotati di un numero finito di elementi.
   B) l'insieme dei numeri interi è un gruppo rispetto all'operazione di somma.
   C) l'insieme delle traslazioni del piano (inclusa la traslazione nulla) è un gruppo rispetto alla usuale operazione di composizione.
   D) l'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

6) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$, $\mathbf{0}$ la matrice nulla e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) se $\det(A \cdot B) = 1$ allora $\det(B \cdot A) = 1$.
   B) $A \cdot B \cdot C = C \cdot B \cdot A$.
   C) $\det(-A) = \det A$.
   D) se B è l'inversa di C allora B^{100} è l'inversa di C^{100}.

7) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ che hanno integrale uguale a 1 sull'intervallo $[0, 1]$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   B) l'insieme $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathbb{R}^3$ (dotato delle usuali operazioni).
   C) l'insieme delle matrici reali $A = (a^i_j) \in \mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ tali che $a^4_5 = a^5_4$ è un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_9(\mathbb{R})$ (dotato delle usuali operazioni).
   D) l'insieme delle matrici reali 4×4 che hanno esattamente un termine uguale a 1 e tutti gli altri uguali a 0 è una base per lo spazio vettoriale reale $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, dotato delle usuali operazioni.

8) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni parametriche $x = 3, y = s, z = -t$ e $x = 1, y = s - 3, z = 2$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro ortogonali.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono un piano ed una retta fra loro paralleli.

9) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia A la matrice associata a T rispetto ad una base fissata $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ di V. Allora
   A) se la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori reali di T è uguale a n allora T è diagonalizzabile.
   B) se A è simmetrica allora T è diagonalizzabile.
   C) A è anche la matrice associata a S rispetto a $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$.
   D) se $T(\mathbf{u}_1) = \mathbf{u}_1, T(\mathbf{u}_2) = \mathbf{u}_2 \dots, T(\mathbf{u}_n) = \mathbf{u}_n$ allora $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n)$ è una base spettrale per T.

Marcare con una crocetta le risposte ritenute corrette. Per annullare una risposta già marcata, cerchiarla. Per ogni domanda vi possono essere da 1 a 4 risposte esatte. **Per ogni domanda, la somma dei punti per le risposte errate (se ve ne sono) è -2**, *per le risposte esatte è +2. In questo testo i simboli m ed n denotano sempre numeri naturali non nulli.*

1) Sia $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un prodotto scalare su di uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Allora
   A) se $n = 3$ e $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ è una base ortogonale di V allora il sottospazio generato dai vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ è il complemento ortogonale di quello generato dal vettore $\mathbf{v}_3$.
   B) $((-2, 0), (0, -2))$ e $((-3, 0), (-1, 1))$ sono basi concordi dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^2$.
   C) per ogni $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ si ha che $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.
   D) se $T : V \to V$ è una trasformazione ortogonale allora lo è anche $-T$.

2) Siano A, B e C tre matrici reali $n \times n$ invertibili e I la matrice identica $n \times n$. Allora
   A) se $A \cdot C = I$ allora $A \cdot B \cdot C = B$.
   B) $A \cdot B \cdot C$ è invertibile.
   C) $({}^tA \cdot {}^tB \cdot {}^tC) = {}^t(A \cdot B \cdot C)$.
   D) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

3) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) l'insieme $\{(0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0)\}$ è una base per lo spazio vettoriale standard 4-dimensionale sul campo $\mathbb{R}$.
   B) l'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   C) l'insieme dei polinomi a coefficienti reali nella indeterminata x è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) l'insieme delle matrici reali 5×5 è uno spazio vettoriale sul campo dei reali rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Siano $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ i sottospazi dello spazio euclideo standard 3-dimensionale di rispettive equazioni $z = 0$ e $x + y = 1$ rispetto al riferimento cartesiano naturale. Allora
   A) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro paralleli.
   B) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro ortogonali.
   C) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono rette fra loro parallele.
   D) $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono piani fra loro ortogonali.

5) Sia **S** un sistema lineare omogeneo a coefficienti reali nelle incognite reali $x_1, \dots, x_n$. Allora
   A) Se **S** ammette solo la soluzione nulla allora la matrice incompleta associata ad **S** è quadrata e regolare.
   B) le equazioni di **S** sono linearmente indipendenti se e solo se **S** ammette soltanto la soluzione nulla.
   C) l'insieme delle soluzioni di **S** è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.
   D) può accadere che **S** ammetta infinite soluzioni.

6) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere (gli spazi vettoriali reali citati devono essere considerati rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare):
   A) la somma di due trasformazioni lineari da $\mathbb{R}^5$ a $\mathbb{R}^5$ è una trasformazione lineare.
   B) la funzione $F : \mathcal{M}_5(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ che porta ogni matrice A nella coppia $F(A) = (Tr(A), \det A)$ è una trasformazione lineare.
   C) l'identità da $\mathbb{R}^4$ a $\mathbb{R}^4$ è una trasformazione lineare.
   D) tutte le trasformazioni lineari iniettive $T : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^8$ sono anche suriettive.

7) Siano S e T due endomorfismi su uno spazio vettoriale reale V di dimensione finita $n > 0$ e siano A e B le matrici associate ad S e a T rispetto ad una base fissata di V. Allora
   A) se A e B sono simili allora S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico.
   B) se S e T hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno gli stessi autovalori.
   C) la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di T è non superiore a n.
   D) se $A^2 = B^2$ allora $S \circ S = T \circ T$.

8) Quali delle seguenti affermazioni sono vere?
   A) se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono due vettori dello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$, orientato in modo naturale, si ha che $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ è un vettore ortogonale sia a $\mathbf{u}$ che a $\mathbf{v}$.
   B) la trasformazione dello spazio euclideo standard in sé che porta il generico punto (x, y, z) nel punto $(x, -y, -z)$ è una isometria.
   C) nel piano euclideo standard l'area del parallelogramma di vertici $(0, -1)$, $(1, 2)$, $(3, 0)$, $(4, 3)$ è uguale a 8.
   D) nello spazio euclideo standard la distanza fra il punto $(0, 0, 0)$ e il piano di equazione cartesiana $2x + y - 3z = 1$ è uguale a $\frac{1}{\sqrt{14}}$.

9) Si dica quali delle seguenti affermazioni sono vere:
   A) nell'insieme dei numeri razionali l'usuale operazione di prodotto è associativa.
   B) l'insieme dei numeri reali è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.
   C) l'insieme delle matrici reali $n \times n$ $(n \geq 2)$ è un gruppo commutativo rispetto alla usuale operazione di somma.
   D) l'insieme dei numeri naturali è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.