7 Gennaio 2019 N. di Matricola: 00101

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi non ha sottogruppi.

V F b) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

V F c) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{N}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

V F d) $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ è un campo.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La relazione di isomorfismo fra i sottogruppi di un gruppo finito G fissato è una relazione di equivalenza.

V F b) Per ogni sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^n$ ogni sistema di generatori di U ha cardinalità superiore o uguale a quella di ogni sottoinsieme linearmente indipendente di U.

V F c) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

V F b) Il prodotto di due matrici reali $n \times n$ simmetriche A, B tali che $AB = BA$ è sempre una matrice simmetrica.

V F c) Tutte le matrici triangolari reali $n \times n$ a traccia nulla sono non invertibili.

V F d) Se due matrici reali hanno la stessa trasposta, allora coincidono.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Non esistono sistemi lineari di 5 equazioni in 8 incognite privi di soluzioni.

V F b) Una matrice quadrata reale A ha sempre lo stesso rango di $A +{}^tA$.

V F c) Il prodotto di due matrici reali 5×5 di rango 4 non può avere rango 5.

V F d) Un sistema lineare omogeneo che abbia una matrice A con m righe e n colonne come matrice incompleta ammette sempre uno spazio di soluzioni di dimensione $n - r(A)$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Non esistono trasformazioni lineari suriettive $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^7$ il cui nucleo abbia dimensione 3.

V F b) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x + y + 1, y + z + 1, x + z + 1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F d) Gli endomorfismi di uno spazio vettoriale finitamente generato sono iniettivi se e solo se sono suriettivi.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+2} \cdot a_{i1} \cdot \det M_{i2}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F b) Se da una matrice quadrata reale A di ordine dispari $n \geq 3$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = \det B$.

V F c) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 2 gli elementi della diagonale principale si ottiene una matrice il cui determinante è il doppio del determinante di A.

V F d) La combinazione lineare di due matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è sempre una matrice a determinante nullo.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche lo stesso determinante.

V F c) Se una matrice reale $n \times n$ ha n autovalori reali distinti allora è diagonalizzabile per similitudine.

V F d) Se una matrice reale $n \times n$ ha 0 come autovalore reale di molteplicità geometrica n allora è la matrice nulla.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definito ponendo $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_n, x_1, \ldots, x_{n-1})$ per ogni $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

V F c) L'ortogonale $W^\perp$ del sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ ha come base $B = \{(0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$.

V F d) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$.

V F b) La retta di equazione parametrica $x = t, y = 0, z = 1$ ammette $(1, 0, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F d) Per ogni punto passa una e una sola retta perpendicolare a un piano dato.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari i cui termini siano tutti negativi ha sempre determinante negativo.

V **F** b) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j} \cdot a_{nj} \cdot \det M_{nj}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V **F** c) Per ogni numero reale x esiste almeno una matrice ortogonale 10×10 il cui determinante è uguale a x.

V **F** d) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) Esistono piani per i quali l'equazione cartesiana coincide con quella parametrica.

V **F** b) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 0, y = 1$ e $x = 1, z = 1$ sono fra loro sghembe.

V **F** c) Il piano di equazione cartesiana $x = 4$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 2, x = 0$ sono fra loro paralleli.

V **F** d) $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) $\mathbb{R}^8$ ammette un numero infinito di prodotti scalari fra loro distinti.

V **F** b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V **F** c) Ogni prodotto scalare su $\mathbb{R}^9$ ammette un vettore non nullo ortogonale a se stesso.

V **F** d) L'inversa di una isometria di uno spazio vettoriale euclideo V è sempre una isometria di V.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'unica matrice reale 10×10 di rango 0 è la matrice nulla 10×10.

V **F** b) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzioni se e solo se $A = C$.

V **F** c) Se in una matrice reale A esistono k colonne linearmente indipendenti, allora esistono in A anche k righe linearmente indipendenti.

V **F** d) Esiste un'unica matrice reale 7×5 che sia allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base finita.

V F c) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) L'unione di due basi di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base di $\mathbb{R}^n$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il gruppo delle rotazioni del piano reale di $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ radianti, dotato dell'usuale operazione di composizione, è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_4, +)$.

V F b) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

V F c) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Tutti i campi sono anche anelli.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e B è una base per V, allora $f(B)$ è una base per W.

V F b) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale 3×3 nella sua trasposta è una trasformazione lineare.

V F c) L'immagine di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x + 2y, y + 2z, z + 2x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è commutativo.

V F b) La matrice reale 10×10 $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i + j$ ha determinante nullo.

V F c) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1, allora tutte le sue potenze hanno determinante uguale a 1.

V F d) L'insieme delle matrici reali 10×10 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a n.

V F b) Il polinomio $5\lambda^2 - \lambda + 1$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice.

V F c) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità algebrica.

V F d) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso rango.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) La relazione di isomorfismo fra i sottogruppi di un gruppo finito G fissato è una relazione di equivalenza.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^n$ ogni sistema di generatori di U ha cardinalità superiore o uguale a quella di ogni sottoinsieme linearmente indipendente di U.

V F d) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Gli endomorfismi di uno spazio vettoriale finitamente generato sono iniettivi se e solo se sono suriettivi.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x + y + 1, y + z + 1, x + z + 1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V F d) Non esistono trasformazioni lineari suriettive $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^7$ il cui nucleo abbia dimensione 3.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La combinazione lineare di due matrici reali $n\times n$ a determinante nullo è sempre una matrice a determinante nullo.

V F b) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 2 gli elementi della diagonale principale si ottiene una matrice il cui determinante è il doppio del determinante di A.

V F c) Se da una matrice quadrata reale A di ordine dispari $n \geq 3$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = \det B$.

V F d) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+2} \cdot a_{i1} \cdot \det M_{i2}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso rango.

V F b) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità algebrica.

V F c) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a n.

V F d) Il polinomio $5\lambda^2 - \lambda + 1$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici reali hanno la stessa trasposta, allora coincidono.

V F b) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

V F c) Il prodotto di due matrici reali $n \times n$ simmetriche A, B tali che $AB = BA$ è sempre una matrice simmetrica.

V F d) Tutte le matrici triangolari reali $n \times n$ a traccia nulla sono non invertibili.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un sistema lineare omogeneo che abbia una matrice A con m righe e n colonne come matrice incompleta ammette sempre uno spazio di soluzioni di dimensione $n - r(A)$.

V F b) Il prodotto di due matrici reali 5×5 di rango 4 non può avere rango 5.

V F c) Una matrice quadrata reale A ha sempre lo stesso rango di $A +{}^tA$.

V F d) Non esistono sistemi lineari di 5 equazioni in 8 incognite privi di soluzioni.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'inversa di una isometria di uno spazio vettoriale euclideo V è sempre una isometria di V.

V F b) Ogni prodotto scalare su $\mathbb{R}^9$ ammette un vettore non nullo ortogonale a se stesso.

V F c) $\mathbb{R}^8$ ammette un numero infinito di prodotti scalari fra loro distinti.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$.

V F b) Il piano di equazione cartesiana $x = 4$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 2, x = 0$ sono fra loro paralleli.

V F c) Esistono piani per i quali l'equazione cartesiana coincide con quella parametrica.

V F d) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 0, y = 1$ e $x = 1, z = 1$ sono fra loro sghembe.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ è un campo.

V F b) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi non ha sottogruppi.

V F c) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

V F d) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{N}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = 0, z = 1$ ammette $(1, 0, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) Per ogni punto passa una e una sola retta perpendicolare a un piano dato.

V F d) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x + 2y, y + 2z, z + 2x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F b) L'immagine di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V F c) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale 3×3 nella sua trasposta è una trasformazione lineare.

V F d) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e B è una base per V, allora $f(B)$ è una base per W.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti i campi sono anche anelli.

V F b) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

V F c) Il gruppo delle rotazioni del piano reale di $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ radianti, dotato dell'usuale operazione di composizione, è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_4, +)$.

V F d) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

V F b) Per ogni numero reale x esiste almeno una matrice ortogonale 10×10 il cui determinante è uguale a x.

V F c) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \cdot a_{nj} \cdot \det M_{nj}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F d) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari i cui termini siano tutti negativi ha sempre determinante negativo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2$.

V F b) L'ortogonale $W^\perp$ del sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ ha come base $B = \{(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$.

V F c) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

V F d) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definito ponendo $f(x_1,\dots,x_n) = (x_n, x_1, \dots, x_{n-1})$ per ogni $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche lo stesso determinante.

V F b) Se una matrice reale $n \times n$ ha n autovalori reali distinti allora è diagonalizzabile per similitudine.

V F c) Se una matrice reale $n \times n$ ha 0 come autovalore reale di molteplicità geometrica n allora è la matrice nulla.

V F d) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle matrici reali 10×10 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.

V F b) La matrice reale 10×10 $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i + j$ ha determinante nullo.

V F c) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è commutativo.

V F d) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1, allora tutte le sue potenze hanno determinante uguale a 1.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'unione di due basi di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base finita.

V F c) L'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F d) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esiste un'unica matrice reale 7×5 che sia allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

V F b) Se in una matrice reale A esistono k colonne linearmente indipendenti, allora esistono in A anche k righe linearmente indipendenti.

V F c) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzioni se e solo se $A = C$.

V F d) L'unica matrice reale 10×10 di rango 0 è la matrice nulla 10×10.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'unione di due basi di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base di $\mathbb{R}^n$.

V F b) L'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base finita.

V F d) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle matrici reali 10×10 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.

V F b) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è commutativo.

V F c) La matrice reale 10×10 $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i + j$ ha determinante nullo.

V F d) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1, allora tutte le sue potenze hanno determinante uguale a 1.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

V F b) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

V F c) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definito ponendo $f(x_1, \dots, x_n) = (x_n, x_1, \dots, x_{n-1})$ per ogni $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F d) L'ortogonale $W^\perp$ del sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ ha come base $B = \{(0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Una matrice quadrata reale A ha sempre lo stesso rango di $A + {}^tA$.

V F b) Non esistono sistemi lineari di 5 equazioni in 8 incognite privi di soluzioni.

V F c) Un sistema lineare omogeneo che abbia una matrice A con m righe e n colonne come matrice incompleta ammette sempre uno spazio di soluzioni di dimensione $n - r(A)$.

V F d) Il prodotto di due matrici reali 5×5 di rango 4 non può avere rango 5.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V F b) Non esistono trasformazioni lineari suriettive $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^7$ il cui nucleo abbia dimensione 3.

V F c) Gli endomorfismi di uno spazio vettoriale finitamente generato sono iniettivi se e solo se sono suriettivi.

V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x + y + 1, y + z + 1, x + z + 1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se da una matrice quadrata reale A di ordine dispari $n \geq 3$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = \det B$.

V F b) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+2} \cdot a_{i1} \cdot \det M_{i2}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F c) La combinazione lineare di due matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è sempre una matrice a determinante nullo.

V F d) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 2 gli elementi della diagonale principale si ottiene una matrice il cui determinante è il doppio del determinante di A.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche lo stesso determinante.

V F b) Se una matrice reale $n \times n$ ha 0 come autovalore reale di molteplicità geometrica n allora è la matrice nulla.

V F c) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F d) Se una matrice reale $n \times n$ ha n autovalori reali distinti allora è diagonalizzabile per similitudine.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = 0, z = 1$ ammette $(1, 0, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) Per ogni punto passa una e una sola retta perpendicolare a un piano dato.

V F c) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$.

V F d) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro paralleli.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutti i campi sono anche anelli.

V F b) Il gruppo delle rotazioni del piano reale di $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ radianti, dotato dell'usuale operazione di composizione, è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_4, +)$.

V F c) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

V F d) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità algebrica.

V F b) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso rango.

V F c) Il polinomio $5\lambda^2 - \lambda + 1$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice.

V F d) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a n.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j} \cdot a_{nj} \cdot \det M_{nj}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F b) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari i cui termini siano tutti negativi ha sempre determinante negativo.

V F c) Per ogni numero reale x esiste almeno una matrice ortogonale 10×10 il cui determinante è uguale a x.

V F d) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Per ogni sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^n$ ogni sistema di generatori di U ha cardinalità superiore o uguale a quella di ogni sottoinsieme linearmente indipendente di U.

V F b) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) La relazione di isomorfismo fra i sottogruppi di un gruppo finito G fissato è una relazione di equivalenza.

V F d) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

V F b) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{N}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

V F c) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi non ha sottogruppi.

V F d) $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ è un campo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni prodotto scalare su $\mathbb{R}^9$ ammette un vettore non nullo ortogonale a se stesso.

V F b) L'inversa di una isometria di uno spazio vettoriale euclideo V è sempre una isometria di V.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V F d) $\mathbb{R}^8$ ammette un numero infinito di prodotti scalari fra loro distinti.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il piano di equazione cartesiana $x = 4$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 2, x = 0$ sono fra loro paralleli.

V F b) $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$.

V F c) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 0, y = 1$ e $x = 1, z = 1$ sono fra loro sghembe.

V F d) Esistono piani per i quali l'equazione cartesiana coincide con quella parametrica.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzioni se e solo se $A = C$.

V F b) L'unica matrice reale 10×10 di rango 0 è la matrice nulla 10×10.

V F c) Se in una matrice reale A esistono k colonne linearmente indipendenti, allora esistono in A anche k righe linearmente indipendenti.

V F d) Esiste un'unica matrice reale 7×5 che sia allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il prodotto di due matrici reali $n \times n$ simmetriche A, B tali che $AB = BA$ è sempre una matrice simmetrica.

V F b) Tutte le matrici triangolari reali $n \times n$ a traccia nulla sono non invertibili.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

V F d) Se due matrici reali hanno la stessa trasposta, allora coincidono.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale 3×3 nella sua trasposta è una trasformazione lineare.

V F b) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e B è una base per V, allora $f(B)$ è una base per W.

V F c) L'immagine di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x + 2y, y + 2z, z + 2x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base finita.

V F b) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) L'unione di due basi di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) L'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La matrice reale 10×10 $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i + j$ ha determinante nullo.

V F b) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1, allora tutte le sue potenze hanno determinante uguale a 1.

V F c) L'insieme delle matrici reali 10×10 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.

V F d) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è commutativo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Una matrice quadrata reale A ha sempre lo stesso rango di $A +^t A$.

V F b) Il prodotto di due matrici reali 5×5 di rango 4 non può avere rango 5.

V F c) Non esistono sistemi lineari di 5 equazioni in 8 incognite privi di soluzioni.

V F d) Un sistema lineare omogeneo che abbia una matrice A con m righe e n colonne come matrice incompleta ammette sempre uno spazio di soluzioni di dimensione $n - r(A)$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x + y + 1, y + z + 1, x + z + 1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F c) Non esistono trasformazioni lineari suriettive $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^7$ il cui nucleo abbia dimensione 3.

V F d) Gli endomorfismi di uno spazio vettoriale finitamente generato sono iniettivi se e solo se sono suriettivi.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$.

V F b) Esistono piani per i quali l'equazione cartesiana coincide con quella parametrica.

V F c) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 0, y = 1$ e $x = 1, z = 1$ sono fra loro sghembe.

V F d) Il piano di equazione cartesiana $x = 4$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 2, x = 0$ sono fra loro paralleli.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

V F b) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) Tutti i campi sono anche anelli.

V F d) Il gruppo delle rotazioni del piano reale di $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ radianti, dotato dell'usuale operazione di composizione, è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_4, +)$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se da una matrice quadrata reale A di ordine dispari $n \geq 3$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = \det B$.

V F b) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 2 gli elementi della diagonale principale si ottiene una matrice il cui determinante è il doppio del determinante di A.

V F c) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+2} \cdot a_{i1} \cdot \det M_{i2}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F d) La combinazione lineare di due matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è sempre una matrice a determinante nullo.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso rango.

V F b) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a n.

V F c) Il polinomio $5\lambda^2 - \lambda + 1$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice.

V F d) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità algebrica.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'inversa di una isometria di uno spazio vettoriale euclideo V è sempre una isometria di V.

V F b) $\mathbb{R}^8$ ammette un numero infinito di prodotti scalari fra loro distinti.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V F d) Ogni prodotto scalare su $\mathbb{R}^9$ ammette un vettore non nullo ortogonale a se stesso.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e B è una base per V, allora $f(B)$ è una base per W.

V F b) L'immagine di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x + 2y, y + 2z, z + 2x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F d) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale 3×3 nella sua trasposta è una trasformazione lineare.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'ortogonale $W^\perp$ del sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ ha come base $B = \{(0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

V F c) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definito ponendo $f(x_1, \dots, x_n) = (x_n, x_1, \dots, x_{n-1})$ per ogni $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F d) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi non ha sottogruppi.

V F b) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

V F c) $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ è un campo.

V F d) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{N}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F b) La retta di equazione parametrica $x = t, y = 0, z = 1$ ammette $(1, 0, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F c) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$.

V F d) Per ogni punto passa una e una sola retta perpendicolare a un piano dato.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

V F b) Il prodotto di due matrici reali $n \times n$ simmetriche A, B tali che $AB = BA$ è sempre una matrice simmetrica.

V F c) Se due matrici reali hanno la stessa trasposta, allora coincidono.

V F d) Tutte le matrici triangolari reali $n \times n$ a traccia nulla sono non invertibili.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La relazione di isomorfismo fra i sottogruppi di un gruppo finito G fissato è una relazione di equivalenza.

V F b) Per ogni sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^n$ ogni sistema di generatori di U ha cardinalità superiore o uguale a quella di ogni sottoinsieme linearmente indipendente di U.

V F c) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F d) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari i cui termini siano tutti negativi ha sempre determinante negativo.

V F b) Per ogni numero reale x esiste almeno una matrice ortogonale 10×10 il cui determinante è uguale a x.

V F c) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

V F d) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \cdot a_{nj} \cdot \det M_{nj}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'unica matrice reale 10×10 di rango 0 è la matrice nulla 10×10.

V F b) Se in una matrice reale A esistono k colonne linearmente indipendenti, allora esistono in A anche k righe linearmente indipendenti.

V F c) Esiste un'unica matrice reale 7×5 che sia allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

V F d) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzioni se e solo se $A = C$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se una matrice reale $n \times n$ ha n autovalori reali distinti allora è diagonalizzabile per similitudine.

V F b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche lo stesso determinante.

V F c) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F d) Se una matrice reale $n \times n$ ha 0 come autovalore reale di molteplicità geometrica n allora è la matrice nulla.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il prodotto di due matrici reali $n \times n$ simmetriche A, B tali che $AB = BA$ è sempre una matrice simmetrica.

V F b) Se due matrici reali hanno la stessa trasposta, allora coincidono.

V F c) Tutte le matrici triangolari reali $n \times n$ a traccia nulla sono non invertibili.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2$.

V F b) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definito ponendo $f(x_1, \dots, x_n) = (x_n, x_1, \dots, x_{n-1})$ per ogni $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F c) L'ortogonale $W^\perp$ del sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ ha come base $B = \{(0,0,0,1,0), (0,0,0,0,1)\}$.

V F d) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = 0, z = 1$ ammette $(1, 0, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F d) Per ogni punto passa una e una sola retta perpendicolare a un piano dato.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un sistema lineare omogeneo che abbia una matrice A con m righe e n colonne come matrice incompleta ammette sempre uno spazio di soluzioni di dimensione $n - r(A)$.

V F b) Il prodotto di due matrici reali 5×5 di rango 4 non può avere rango 5.

V F c) Non esistono sistemi lineari di 5 equazioni in 8 incognite privi di soluzioni.

V F d) Una matrice quadrata reale A ha sempre lo stesso rango di $A + {}^tA$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Gli endomorfismi di uno spazio vettoriale finitamente generato sono iniettivi se e solo se sono suriettivi.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x + y + 1, y + z + 1, x + z + 1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F c) Non esistono trasformazioni lineari suriettive $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^7$ il cui nucleo abbia dimensione 3.

V F d) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La combinazione lineare di due matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è sempre una matrice a determinante nullo.

V F b) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 2 gli elementi della diagonale principale si ottiene una matrice il cui determinante è il doppio del determinante di A.

V F c) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+2} \cdot a_{i1} \cdot \det M_{i2}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F d) Se da una matrice quadrata reale A di ordine dispari $n \geq 3$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = \det B$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche lo stesso determinante.

V F b) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F c) Se una matrice reale $n \times n$ ha n autovalori reali distinti allora è diagonalizzabile per similitudine.

V F d) Se una matrice reale $n \times n$ ha 0 come autovalore reale di molteplicità geometrica n allora è la matrice nulla.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

V F b) $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ è un campo.

V F c) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{N}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

V F d) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi non ha sottogruppi.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Per ogni sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^n$ ogni sistema di generatori di U ha cardinalità superiore o uguale a quella di ogni sottoinsieme linearmente indipendente di U.

V F b) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) La relazione di isomorfismo fra i sottogruppi di un gruppo finito G fissato è una relazione di equivalenza.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni prodotto scalare su $\mathbb{R}^9$ ammette un vettore non nullo ortogonale a se stesso.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V F c) $\mathbb{R}^8$ ammette un numero infinito di prodotti scalari fra loro distinti.

V F d) L'inversa di una isometria di uno spazio vettoriale euclideo V è sempre una isometria di V.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità algebrica.

V F b) Il polinomio $5\lambda^2 - \lambda + 1$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice.

V F c) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a n.

V F d) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso rango.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) L'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base finita.

V F d) L'unione di due basi di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base di $\mathbb{R}^n$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Il gruppo delle rotazioni del piano reale di $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ radianti, dotato dell'usuale operazione di composizione, è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_4, +)$.

V F c) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

V F d) Tutti i campi sono anche anelli.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1, allora tutte le sue potenze hanno determinante uguale a 1.

V **F** b) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è commutativo.

V **F** c) La matrice reale 10×10 $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i + j$ ha determinante nullo.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali 10×10 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \cdot a_{nj} \cdot \det M_{nj}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V **F** b) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari i cui termini siano tutti negativi ha sempre determinante negativo.

V **F** c) Per ogni numero reale x esiste almeno una matrice ortogonale 10×10 il cui determinante è uguale a x.

V **F** d) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale 3×3 nella sua trasposta è una trasformazione lineare.

V **F** b) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e B è una base per V, allora $f(B)$ è una base per W.

V **F** c) L'immagine di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V **F** d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x + 2y, y + 2z, z + 2x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzioni se e solo se $A = C$.

V **F** b) L'unica matrice reale 10×10 di rango 0 è la matrice nulla 10×10.

V **F** c) Se in una matrice reale A esistono k colonne linearmente indipendenti, allora esistono in A anche k righe linearmente indipendenti.

V **F** d) Esiste un'unica matrice reale 7×5 che sia allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) Il piano di equazione cartesiana $x = 4$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 2, x = 0$ sono fra loro paralleli.

V **F** b) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 0, y = 1$ e $x = 1, z = 1$ sono fra loro sghembe.

V **F** c) Esistono piani per i quali l'equazione cartesiana coincide con quella parametrica.

V **F** d) $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Un sistema lineare omogeneo che abbia una matrice A con m righe e n colonne come matrice incompleta ammette sempre uno spazio di soluzioni di dimensione $n - r(A)$.

V **F** b) Non esistono sistemi lineari di 5 equazioni in 8 incognite privi di soluzioni.

V **F** c) Una matrice quadrata reale A ha sempre lo stesso rango di $A +^t A$.

V **F** d) Il prodotto di due matrici reali 5×5 di rango 4 non può avere rango 5.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La combinazione lineare di due matrici reali $n\times n$ a determinante nullo è sempre una matrice a determinante nullo.

V **F** b) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+2} \cdot a_{i1} \cdot \det M_{i2}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V **F** c) Se da una matrice quadrata reale A di ordine dispari $n \geq 3$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = \det B$.

V **F** d) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 2 gli elementi della diagonale principale si ottiene una matrice il cui determinante è il doppio del determinante di A.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso rango.

V **F** b) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità algebrica.

V **F** c) Il polinomio $5\lambda^2 - \lambda + 1$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice.

V **F** d) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a n.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Gli endomorfismi di uno spazio vettoriale finitamente generato sono iniettivi se e solo se sono suriettivi.

V **F** b) Non esistono trasformazioni lineari suriettive $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^7$ il cui nucleo abbia dimensione 3.

V **F** c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V **F** d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x + y + 1, y + z + 1, x + z + 1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'inversa di una isometria di uno spazio vettoriale euclideo V è sempre una isometria di V.

V F b) Ogni prodotto scalare su $\mathbb{R}^9$ ammette un vettore non nullo ortogonale a se stesso.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V F d) $\mathbb{R}^8$ ammette un numero infinito di prodotti scalari fra loro distinti.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(1,0,0) \wedge (0,1,0) = (0,0,1)$.

V F b) Il piano di equazione cartesiana $x = 4$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 2, x = 0$ sono fra loro paralleli.

V F c) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 0, y = 1$ e $x = 1, z = 1$ sono fra loro sghembe.

V F d) Esistono piani per i quali l'equazione cartesiana coincide con quella parametrica.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ è un campo.

V F b) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{N}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

V F c) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

V F d) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi non ha sottogruppi.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^n$ ogni sistema di generatori di U ha cardinalità superiore o uguale a quella di ogni sottoinsieme linearmente indipendente di U.

V F d) La relazione di isomorfismo fra i sottogruppi di un gruppo finito G fissato è una relazione di equivalenza.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici reali hanno la stessa trasposta, allora coincidono.

V F b) Tutte le matrici triangolari reali $n \times n$ a traccia nulla sono non invertibili.

V F c) Il prodotto di due matrici reali $n \times n$ simmetriche A, B tali che $AB = BA$ è sempre una matrice simmetrica.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base finita.

V **F** b) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** c) L'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** d) L'unione di due basi di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base di $\mathbb{R}^n$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \cdot a_{nj} \cdot \det M_{nj}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V **F** b) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari i cui termini siano tutti negativi ha sempre determinante negativo.

V **F** c) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

V **F** d) Per ogni numero reale x esiste almeno una matrice ortogonale 10×10 il cui determinante è uguale a x.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche lo stesso determinante.

V **F** b) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V **F** c) Se una matrice reale $n \times n$ ha 0 come autovalore reale di molteplicità geometrica n allora è la matrice nulla.

V **F** d) Se una matrice reale $n \times n$ ha n autovalori reali distinti allora è diagonalizzabile per similitudine.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) La matrice reale 10×10 $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i + j$ ha determinante nullo.

V **F** b) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1, allora tutte le sue potenze hanno determinante uguale a 1.

V **F** c) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è commutativo.

V **F** d) L'insieme delle matrici reali 10×10 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

V F b) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) Il gruppo delle rotazioni del piano reale di $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ radianti, dotato dell'usuale operazione di composizione, è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_4, +)$.

V F d) Tutti i campi sono anche anelli.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

V F b) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definito ponendo $f(x_1, \dots, x_n) = (x_n, x_1, \dots, x_{n-1})$ per ogni $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F c) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

V F d) L'ortogonale $W^\perp$ del sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ ha come base $B = \{(0,0,0,1,0), (0,0,0,0,1)\}$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale 3×3 nella sua trasposta è una trasformazione lineare.

V F b) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e B è una base per V, allora $f(B)$ è una base per W.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x + 2y, y + 2z, z + 2x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F d) L'immagine di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzioni se e solo se $A = C$.

V F b) L'unica matrice reale 10×10 di rango 0 è la matrice nulla 10×10.

V F c) Esiste un'unica matrice reale 7×5 che sia allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

V F d) Se in una matrice reale A esistono k colonne linearmente indipendenti, allora esistono in A anche k righe linearmente indipendenti.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = 0, z = 1$ ammette $(1, 0, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$.

V F c) Per ogni punto passa una e una sola retta perpendicolare a un piano dato.

V F d) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro paralleli.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è commutativo.

V F b) L'insieme delle matrici reali 10×10 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.

V F c) La matrice reale 10×10 $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i + j$ ha determinante nullo.

V F d) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1, allora tutte le sue potenze hanno determinante uguale a 1.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il prodotto di due matrici reali 5×5 di rango 4 non può avere rango 5.

V F b) Un sistema lineare omogeneo che abbia una matrice A con m righe e n colonne come matrice incompleta ammette sempre uno spazio di soluzioni di dimensione $n - r(A)$.

V F c) Una matrice quadrata reale A ha sempre lo stesso rango di $A +{}^tA$.

V F d) Non esistono sistemi lineari di 5 equazioni in 8 incognite privi di soluzioni.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x + y + 1, y + z + 1, x + z + 1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F b) Gli endomorfismi di uno spazio vettoriale finitamente generato sono iniettivi se e solo se sono suriettivi.

V F c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V F d) Non esistono trasformazioni lineari suriettive $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^7$ il cui nucleo abbia dimensione 3.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 2 gli elementi della diagonale principale si ottiene una matrice il cui determinante è il doppio del determinante di A.

V F b) La combinazione lineare di due matrici reali $n\times n$ a determinante nullo è sempre una matrice a determinante nullo.

V F c) Se da una matrice quadrata reale A di ordine dispari $n \geq 3$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = \det B$.

V F d) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+2} \cdot a_{i1} \cdot \det M_{i2}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) L'unione di due basi di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base finita.

V F d) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'ortogonale $W^{\perp}$ del sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ ha come base $B = \{(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2$.

V F c) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definito ponendo $f(x_1,\dots,x_n) = (x_n, x_1, \dots, x_{n-1})$ per ogni $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F d) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F b) La retta di equazione parametrica $x = t, y = 0, z = 1$ ammette $(1,0,1)$ come terna di parametri direttori.

V F c) $(1,0,0) \wedge (0,0,1) = (0,1,0)$.

V F d) Per ogni punto passa una e una sola retta perpendicolare a un piano dato.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se una matrice reale $n \times n$ ha n autovalori reali distinti allora è diagonalizzabile per similitudine.

V F b) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche lo stesso determinante.

V F c) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F d) Se una matrice reale $n \times n$ ha 0 come autovalore reale di molteplicità geometrica n allora è la matrice nulla.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il gruppo delle rotazioni del piano reale di $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ radianti, dotato dell'usuale operazione di composizione, è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_4, +)$.

V F b) Tutti i campi sono anche anelli.

V F c) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

V F d) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'inversa di una isometria di uno spazio vettoriale euclideo V è sempre una isometria di V.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$ si ha che $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\|\le\|\mathbf{v}\|+\|\mathbf{w}\|$.

V F c) $\mathbb{R}^8$ ammette un numero infinito di prodotti scalari fra loro distinti.

V F d) Ogni prodotto scalare su $\mathbb{R}^9$ ammette un vettore non nullo ortogonale a se stesso.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso rango.

V F b) Il polinomio $5\lambda^2-\lambda+1$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice.

V F c) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a n.

V F d) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità algebrica.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) Per ogni sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^n$ ogni sistema di generatori di U ha cardinalità superiore o uguale a quella di ogni sottoinsieme linearmente indipendente di U.

V F d) La relazione di isomorfismo fra i sottogruppi di un gruppo finito G fissato è una relazione di equivalenza.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{N}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

V F b) $(\mathbb{Z}_5,+,\cdot)$ è un campo.

V F c) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x\star y=0$ per ogni $x,y\in\mathbb{R}$.

V F d) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi non ha sottogruppi.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esiste un'unica matrice reale 7×5 che sia allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

V F b) Se in una matrice reale A esistono k colonne linearmente indipendenti, allora esistono in A anche k righe linearmente indipendenti.

V F c) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzioni se e solo se $A = C$.

V F d) L'unica matrice reale 10×10 di rango 0 è la matrice nulla 10×10.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutte le matrici triangolari reali $n \times n$ a traccia nulla sono non invertibili.

V F b) Se due matrici reali hanno la stessa trasposta, allora coincidono.

V F c) Il prodotto di due matrici reali $n \times n$ simmetriche A, B tali che $AB = BA$ è sempre una matrice simmetrica.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$.

V F b) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 0, y = 1$ e $x = 1, z = 1$ sono fra loro sghembe.

V F c) Esistono piani per i quali l'equazione cartesiana coincide con quella parametrica.

V F d) Il piano di equazione cartesiana $x = 4$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 2, x = 0$ sono fra loro paralleli.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x + 2y, y + 2z, z + 2x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F b) L'immagine di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V F c) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale 3×3 nella sua trasposta è una trasformazione lineare.

V F d) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e B è una base per V, allora $f(B)$ è una base per W.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

V F b) Per ogni numero reale x esiste almeno una matrice ortogonale 10×10 il cui determinante è uguale a x.

V F c) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \cdot a_{nj} \cdot \det M_{nj}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F d) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari i cui termini siano tutti negativi ha sempre determinante negativo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Una matrice quadrata reale A ha sempre lo stesso rango di $A +{}^tA$.

V F b) Il prodotto di due matrici reali 5×5 di rango 4 non può avere rango 5.

V F c) Un sistema lineare omogeneo che abbia una matrice A con m righe e n colonne come matrice incompleta ammette sempre uno spazio di soluzioni di dimensione $n - r(A)$.

V F d) Non esistono sistemi lineari di 5 equazioni in 8 incognite privi di soluzioni.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità algebrica.

V F b) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso rango.

V F c) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a n.

V F d) Il polinomio $5\lambda^2 - \lambda + 1$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x + y + 1, y + z + 1, x + z + 1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F c) Gli endomorfismi di uno spazio vettoriale finitamente generato sono iniettivi se e solo se sono suriettivi.

V F d) Non esistono trasformazioni lineari suriettive $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^7$ il cui nucleo abbia dimensione 3.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni prodotto scalare su $\mathbb{R}^9$ ammette un vettore non nullo ortogonale a se stesso.

V F b) L'inversa di una isometria di uno spazio vettoriale euclideo V è sempre una isometria di V.

V F c) $\mathbb{R}^8$ ammette un numero infinito di prodotti scalari fra loro distinti.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V **F** a) Il piano di equazione cartesiana $x = 4$ e la retta di equazione cartesiana $x+y+z = 2, x = 0$ sono fra loro paralleli.

V **F** b) $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$.

V **F** c) Esistono piani per i quali l'equazione cartesiana coincide con quella parametrica.

V **F** d) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 0, y = 1$ e $x = 1, z = 1$ sono fra loro sghembe.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Se da una matrice quadrata reale A di ordine dispari $n \geq 3$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = \det B$.

V **F** b) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 2 gli elementi della diagonale principale si ottiene una matrice il cui determinante è il doppio del determinante di A.

V **F** c) La combinazione lineare di due matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è sempre una matrice a determinante nullo.

V **F** d) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+2} \cdot a_{i1} \cdot \det M_{i2}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) Tutti i campi sono anche anelli.

V **F** b) Il gruppo delle rotazioni del piano reale di $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ radianti, dotato dell'usuale operazione di composizione, è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_4, +)$.

V **F** c) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V **F** d) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'unione di due basi di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base di $\mathbb{R}^n$.

V **F** b) L'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V **F** c) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V **F** d) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base finita.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V **F** a) L'insieme delle matrici reali 10×10 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.

V **F** b) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è commutativo.

V **F** c) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1, allora tutte le sue potenze hanno determinante uguale a 1.

V **F** d) La matrice reale 10×10 $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i + j$ ha determinante nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ è un campo.

V F b) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

V F c) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi non ha sottogruppi.

V F d) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{N}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

V F b) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \cdot a_{nj} \cdot \det M_{nj}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F c) Per ogni numero reale x esiste almeno una matrice ortogonale 10×10 il cui determinante è uguale a x.

V F d) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari i cui termini siano tutti negativi ha sempre determinante negativo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici reali hanno la stessa trasposta, allora coincidono.

V F b) Il prodotto di due matrici reali $n \times n$ simmetriche A, B tali che $AB = BA$ è sempre una matrice simmetrica.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

V F d) Tutte le matrici triangolari reali $n \times n$ a traccia nulla sono non invertibili.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Per ogni sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^n$ ogni sistema di generatori di U ha cardinalità superiore o uguale a quella di ogni sottoinsieme linearmente indipendente di U.

V F c) La relazione di isomorfismo fra i sottogruppi di un gruppo finito G fissato è una relazione di equivalenza.

V F d) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x,y,z) = (x+2y, y+2z, z+2x)$ per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F b) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale 3×3 nella sua trasposta è una trasformazione lineare.

V F c) L'immagine di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V F d) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e B è una base per V, allora $f(B)$ è una base per W.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esiste un'unica matrice reale 7×5 che sia allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

V F b) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzioni se e solo se $A = C$.

V F c) Se in una matrice reale A esistono k colonne linearmente indipendenti, allora esistono in A anche k righe linearmente indipendenti.

V F d) L'unica matrice reale 10×10 di rango 0 è la matrice nulla 10×10.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se una matrice reale $n \times n$ ha 0 come autovalore reale di molteplicità geometrica n allora è la matrice nulla.

V F b) Se una matrice reale $n \times n$ ha n autovalori reali distinti allora è diagonalizzabile per similitudine.

V F c) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche lo stesso determinante.

V F d) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Per ogni punto passa una e una sola retta perpendicolare a un piano dato.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) La retta di equazione parametrica $x = t, y = 0, z = 1$ ammette $(1, 0, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F d) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

V F b) L'ortogonale $W^\perp$ del sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ ha come base $B = \{(0,0,0,1,0), (0,0,0,0,1)\}$.

V F c) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

V F d) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definito ponendo $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_n, x_1, \ldots, x_{n-1})$ per ogni $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2$.

V F b) L'ortogonale $W^\perp$ del sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ ha come base $B = \{(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$.

V F c) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definito ponendo $f(x_1,\dots,x_n) = (x_n, x_1, \dots, x_{n-1})$ per ogni $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F d) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = 0, z = 1$ ammette $(1,0,1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) $(1,0,0) \wedge (0,0,1) = (0,1,0)$.

V F d) Per ogni punto passa una e una sola retta perpendicolare a un piano dato.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il prodotto di due matrici reali $n \times n$ simmetriche A, B tali che $AB = BA$ è sempre una matrice simmetrica.

V F b) Se due matrici reali hanno la stessa trasposta, allora coincidono.

V F c) Tutte le matrici triangolari reali $n \times n$ a traccia nulla sono non invertibili.

V F d) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+2} \cdot a_{i1} \cdot \det M_{i2}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F b) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 2 gli elementi della diagonale principale si ottiene una matrice il cui determinante è il doppio del determinante di A.

V F c) Se da una matrice quadrata reale A di ordine dispari $n \geq 3$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = \det B$.

V F d) La combinazione lineare di due matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è sempre una matrice a determinante nullo.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche lo stesso determinante.

V F b) Se una matrice reale $n \times n$ ha n autovalori reali distinti allora è diagonalizzabile per similitudine.

V F c) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F d) Se una matrice reale $n \times n$ ha 0 come autovalore reale di molteplicità geometrica n allora è la matrice nulla.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

V F b) $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ è un campo.

V F c) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{N}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

V F d) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi non ha sottogruppi.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Per ogni sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^n$ ogni sistema di generatori di U ha cardinalità superiore o uguale a quella di ogni sottoinsieme linearmente indipendente di U.

V F b) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F c) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) La relazione di isomorfismo fra i sottogruppi di un gruppo finito G fissato è una relazione di equivalenza.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Non esistono sistemi lineari di 5 equazioni in 8 incognite privi di soluzioni.

V F b) Il prodotto di due matrici reali 5×5 di rango 4 non può avere rango 5.

V F c) Una matrice quadrata reale A ha sempre lo stesso rango di $A +^t A$.

V F d) Un sistema lineare omogeneo che abbia una matrice A con m righe e n colonne come matrice incompleta ammette sempre uno spazio di soluzioni di dimensione $n - r(A)$.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Non esistono trasformazioni lineari suriettive $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^7$ il cui nucleo abbia dimensione 3.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x + y + 1, y + z + 1, x + z + 1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F c) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V F d) Gli endomorfismi di uno spazio vettoriale finitamente generato sono iniettivi se e solo se sono suriettivi.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se in una matrice reale A esistono k colonne linearmente indipendenti, allora esistono in A anche k righe linearmente indipendenti.

V F b) L'unica matrice reale 10×10 di rango 0 è la matrice nulla 10×10.

V F c) Esiste un'unica matrice reale 7×5 che sia allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

V F d) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzioni se e solo se $A = C$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il gruppo delle rotazioni del piano reale di $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ radianti, dotato dell'usuale operazione di composizione, è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_4, +)$.

V F b) Tutti i campi sono anche anelli.

V F c) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F d) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Per ogni numero reale x esiste almeno una matrice ortogonale 10×10 il cui determinante è uguale a x.

V F b) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari i cui termini siano tutti negativi ha sempre determinante negativo.

V F c) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

V F d) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j} \cdot a_{nj} \cdot \det M_{nj}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 0, y = 1$ e $x = 1, z = 1$ sono fra loro sghembe.

V F b) $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$.

V F c) Il piano di equazione cartesiana $x = 4$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 2, x = 0$ sono fra loro paralleli.

V F d) Esistono piani per i quali l'equazione cartesiana coincide con quella parametrica.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è commutativo.

V F b) L'insieme delle matrici reali 10×10 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.

V F c) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1, allora tutte le sue potenze hanno determinante uguale a 1.

V F d) La matrice reale 10×10 $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i + j$ ha determinante nullo.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) L'unione di due basi di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base finita.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il polinomio $5\lambda^2 - \lambda + 1$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice.

V F b) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso rango.

V F c) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità algebrica.

V F d) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a n.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'immagine di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V F b) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e B è una base per V, allora $f(B)$ è una base per W.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x + 2y, y + 2z, z + 2x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F d) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale 3×3 nella sua trasposta è una trasformazione lineare.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\| \cdot \|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V F b) L'inversa di una isometria di uno spazio vettoriale euclideo V è sempre una isometria di V.

V F c) Ogni prodotto scalare su $\mathbb{R}^9$ ammette un vettore non nullo ortogonale a se stesso.

V F d) $\mathbb{R}^8$ ammette un numero infinito di prodotti scalari fra loro distinti.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Una matrice quadrata reale A ha sempre lo stesso rango di $A + {}^tA$.

V F b) Non esistono sistemi lineari di 5 equazioni in 8 incognite privi di soluzioni.

V F c) Il prodotto di due matrici reali 5×5 di rango 4 non può avere rango 5.

V F d) Un sistema lineare omogeneo che abbia una matrice A con m righe e n colonne come matrice incompleta ammette sempre uno spazio di soluzioni di dimensione $n - r(A)$.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V F b) Non esistono trasformazioni lineari suriettive $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^7$ il cui nucleo abbia dimensione 3.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x + y + 1, y + z + 1, x + z + 1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F d) Gli endomorfismi di uno spazio vettoriale finitamente generato sono iniettivi se e solo se sono suriettivi.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'inversa di una isometria di uno spazio vettoriale euclideo V è sempre una isometria di V.

V F b) Ogni prodotto scalare su $\mathbb{R}^9$ ammette un vettore non nullo ortogonale a se stesso.

V F c) $\mathbb{R}^8$ ammette un numero infinito di prodotti scalari fra loro distinti.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$.

V F b) Il piano di equazione cartesiana $x = 4$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 2, x = 0$ sono fra loro paralleli.

V F c) Esistono piani per i quali l'equazione cartesiana coincide con quella parametrica.

V F d) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 0, y = 1$ e $x = 1, z = 1$ sono fra loro sghembe.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se da una matrice quadrata reale A di ordine dispari $n \geq 3$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = \det B$.

V F b) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+2} \cdot a_{i1} \cdot \det M_{i2}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F c) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 2 gli elementi della diagonale principale si ottiene una matrice il cui determinante è il doppio del determinante di A.

V F d) La combinazione lineare di due matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è sempre una matrice a determinante nullo.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso rango.

V F b) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità algebrica.

V F c) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a n.

V F d) Il polinomio $5\lambda^2 - \lambda + 1$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ è un campo.

V F b) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{N}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

V F c) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi non ha sottogruppi.

V F d) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) La relazione di isomorfismo fra i sottogruppi di un gruppo finito G fissato è una relazione di equivalenza.

V F d) Per ogni sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^n$ ogni sistema di generatori di U ha cardinalità superiore o uguale a quella di ogni sottoinsieme linearmente indipendente di U.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici reali hanno la stessa trasposta, allora coincidono.

V F b) Tutte le matrici triangolari reali $n \times n$ a traccia nulla sono non invertibili.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

V F d) Il prodotto di due matrici reali $n \times n$ simmetriche A, B tali che $AB = BA$ è sempre una matrice simmetrica.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) L'unione di due basi di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base di $\mathbb{R}^n$.

V F c) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base finita.

V F d) L'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F b) Tutti i campi sono anche anelli.

V F c) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

V F d) Il gruppo delle rotazioni del piano reale di $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ radianti, dotato dell'usuale operazione di composizione, è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_4, +)$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1, allora tutte le sue potenze hanno determinante uguale a 1.

V F b) L'insieme delle matrici reali 10×10 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.

V F c) La matrice reale 10×10 $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i + j$ ha determinante nullo.

V F d) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è commutativo.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche lo stesso determinante.

V F b) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F c) Se una matrice reale $n \times n$ ha n autovalori reali distinti allora è diagonalizzabile per similitudine.

V F d) Se una matrice reale $n \times n$ ha 0 come autovalore reale di molteplicità geometrica n allora è la matrice nulla.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x + 2y, y + 2z, z + 2x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F b) L'immagine di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V F c) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale 3×3 nella sua trasposta è una trasformazione lineare.

V F d) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e B è una base per V, allora $f(B)$ è una base per W.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Esiste un'unica matrice reale 7×5 che sia allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

V F b) Se in una matrice reale A esistono k colonne linearmente indipendenti, allora esistono in A anche k righe linearmente indipendenti.

V F c) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzioni se e solo se $A = C$.

V F d) L'unica matrice reale 10×10 di rango 0 è la matrice nulla 10×10.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle \cdot, \cdot \rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

V F b) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definito ponendo $f(x_1, \dots, x_n) = (x_n, x_1, \dots, x_{n-1})$ per ogni $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F c) L'ortogonale $W^\perp$ del sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ ha come base $B = \{(0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$.

V F d) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = 0, z = 1$ ammette $(1, 0, 1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F d) Per ogni punto passa una e una sola retta perpendicolare a un piano dato.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

V F b) Per ogni numero reale x esiste almeno una matrice ortogonale 10×10 il cui determinante è uguale a x.

V F c) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \cdot a_{nj} \cdot \det M_{nj}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F d) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari i cui termini siano tutti negativi ha sempre determinante negativo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V F b) Non esistono trasformazioni lineari suriettive $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^7$ il cui nucleo abbia dimensione 3.

V F c) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x + y + 1, y + z + 1, x + z + 1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F d) Gli endomorfismi di uno spazio vettoriale finitamente generato sono iniettivi se e solo se sono suriettivi.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se da una matrice quadrata reale A di ordine dispari $n \geq 3$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = \det B$.

V F b) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+2} \cdot a_{i1} \cdot \det M_{i2}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F c) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 2 gli elementi della diagonale principale si ottiene una matrice il cui determinante è il doppio del determinante di A.

V F d) La combinazione lineare di due matrici reali $n\times n$ a determinante nullo è sempre una matrice a determinante nullo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche lo stesso determinante.

V F b) Se una matrice reale $n \times n$ ha n autovalori reali distinti allora è diagonalizzabile per similitudine.

V F c) Se una matrice reale $n \times n$ ha 0 come autovalore reale di molteplicità geometrica n allora è la matrice nulla.

V F d) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

V F b) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

V F c) Il gruppo delle rotazioni del piano reale di $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ radianti, dotato dell'usuale operazione di composizione, è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_4, +)$.

V F d) Tutti i campi sono anche anelli.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2$.

V F b) L'ortogonale $W^\perp$ del sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ ha come base $B = \{(0,0,0,1,0),(0,0,0,0,1)\}$.

V F c) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

V F d) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definito ponendo $f(x_1,\dots,x_n) = (x_n, x_1, \dots, x_{n-1})$ per ogni $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) La retta di equazione parametrica $x = t, y = 0, z = 1$ ammette $(1,0,1)$ come terna di parametri direttori.

V F b) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F c) Per ogni punto passa una e una sola retta perpendicolare a un piano dato.

V F d) $(1,0,0) \wedge (0,0,1) = (0,1,0)$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base finita.

V F b) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F c) L'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F d) L'unione di due basi di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base di $\mathbb{R}^n$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La matrice reale 10×10 $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i + j$ ha determinante nullo.

V F b) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1, allora tutte le sue potenze hanno determinante uguale a 1.

V F c) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è commutativo.

V F d) L'insieme delle matrici reali 10×10 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Una matrice quadrata reale A ha sempre lo stesso rango di $A + {}^tA$.

V F b) Non esistono sistemi lineari di 5 equazioni in 8 incognite privi di soluzioni.

V F c) Il prodotto di due matrici reali 5×5 di rango 4 non può avere rango 5.

V F d) Un sistema lineare omogeneo che abbia una matrice A con m righe e n colonne come matrice incompleta ammette sempre uno spazio di soluzioni di dimensione $n - r(A)$.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Per ogni sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^n$ ogni sistema di generatori di U ha cardinalità superiore o uguale a quella di ogni sottoinsieme linearmente indipendente di U.

V F b) La relazione di isomorfismo fra i sottogruppi di un gruppo finito G fissato è una relazione di equivalenza.

V F c) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F d) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

V F b) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi non ha sottogruppi.

V F c) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{N}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

V F d) $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ è un campo.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se in una matrice reale A esistono k colonne linearmente indipendenti, allora esistono in A anche k righe linearmente indipendenti.

V F b) Esiste un'unica matrice reale 7×5 che sia allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

V F c) L'unica matrice reale 10×10 di rango 0 è la matrice nulla 10×10.

V F d) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzioni se e solo se $A = C$.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il prodotto di due matrici reali $n \times n$ simmetriche A, B tali che $AB = BA$ è sempre una matrice simmetrica.

V F b) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

V F c) Tutte le matrici triangolari reali $n \times n$ a traccia nulla sono non invertibili.

V F d) Se due matrici reali hanno la stessa trasposta, allora coincidono.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Ogni prodotto scalare su $\mathbb{R}^9$ ammette un vettore non nullo ortogonale a se stesso.

V F b) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v}+\mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V F c) L'inversa di una isometria di uno spazio vettoriale euclideo V è sempre una isometria di V.

V F d) $\mathbb{R}^8$ ammette un numero infinito di prodotti scalari fra loro distinti.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità algebrica.

V F b) Il polinomio $5\lambda^2 - \lambda + 1$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice.

V F c) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso rango.

V F d) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a n.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Per ogni numero reale x esiste almeno una matrice ortogonale 10×10 il cui determinante è uguale a x.

V F b) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

V F c) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari i cui termini siano tutti negativi ha sempre determinante negativo.

V F d) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \cdot a_{nj} \cdot \det M_{nj}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Il piano di equazione cartesiana $x = 4$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 2, x = 0$ sono fra loro paralleli.

V F b) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 0, y = 1$ e $x = 1, z = 1$ sono fra loro sghembe.

V F c) $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$.

V F d) Esistono piani per i quali l'equazione cartesiana coincide con quella parametrica.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'immagine di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V F b) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x + 2y, y + 2z, z + 2x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F c) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e B è una base per V, allora $f(B)$ è una base per W.

V F d) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale 3×3 nella sua trasposta è una trasformazione lineare.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il polinomio $5\lambda^2 - \lambda + 1$ non è il polinomio caratteristico di alcuna matrice.

V F b) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso rango.

V F c) Un endomorfismo di $\mathbb{R}^n$ è semplice se e solo se la somma delle molteplicità algebriche dei suoi autovalori è uguale a n.

V F d) La molteplicità geometrica di un autovalore è sempre non superiore alla sua molteplicità algebrica.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il prodotto di due matrici reali 5×5 di rango 4 non può avere rango 5.

V F b) Una matrice quadrata reale A ha sempre lo stesso rango di $A +^t A$.

V F c) Non esistono sistemi lineari di 5 equazioni in 8 incognite privi di soluzioni.

V F d) Un sistema lineare omogeneo che abbia una matrice A con m righe e n colonne come matrice incompleta ammette sempre uno spazio di soluzioni di dimensione $n - r(A)$.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x + y + 1, y + z + 1, x + z + 1)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

V F b) Il nucleo di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V F c) Non esistono trasformazioni lineari suriettive $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^7$ il cui nucleo abbia dimensione 3.

V F d) Gli endomorfismi di uno spazio vettoriale finitamente generato sono iniettivi se e solo se sono suriettivi.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) Le rette di rispettive equazioni cartesiane $x = 0, y = 1$ e $x = 1, z = 1$ sono fra loro sghembe.

V F b) $(1, 0, 0) \wedge (0, 1, 0) = (0, 0, 1)$.

V F c) Esistono piani per i quali l'equazione cartesiana coincide con quella parametrica.

V F d) Il piano di equazione cartesiana $x = 4$ e la retta di equazione cartesiana $x + y + z = 2, x = 0$ sono fra loro paralleli.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il gruppo delle rotazioni del piano reale di $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$ radianti, dotato dell'usuale operazione di composizione, è isomorfo al gruppo $(\mathbb{Z}_4, +)$.

V F b) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{R}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

V F c) Tutti i campi sono anche anelli.

V F d) L'insieme dei numeri complessi è un campo rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'insieme delle funzioni continue da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

V F b) Ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ ammette almeno una base finita.

V F c) L'unione di due basi di $\mathbb{R}^n$ è sempre una base di $\mathbb{R}^n$.

V F d) L'intersezione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Il prodotto fra matrici reali $n \times n$ è commutativo.

V F b) La matrice reale 10×10 $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = i + j$ ha determinante nullo.

V F c) L'insieme delle matrici reali 10×10 è un anello rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto fra matrici.

V F d) Se una matrice quadrata reale ha determinante uguale a 1, allora tutte le sue potenze hanno determinante uguale a 1.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare su uno spazio vettoriale V. Allora per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ si ha che $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$.

V F b) L'inversa di una isometria di uno spazio vettoriale euclideo V è sempre una isometria di V.

V F c) $\mathbb{R}^8$ ammette un numero infinito di prodotti scalari fra loro distinti.

V F d) Ogni prodotto scalare su $\mathbb{R}^9$ ammette un vettore non nullo ortogonale a se stesso.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se in una matrice quadrata reale A si moltiplicano per 2 gli elementi della diagonale principale si ottiene una matrice il cui determinante è il doppio del determinante di A.

V F b) Se da una matrice quadrata reale A di ordine dispari $n \geq 3$ si ottiene una nuova matrice B togliendo la prima riga dal primo posto e mettendola immediatamente dopo tutte le rimanenti righe, si ha che $\det A = \det B$.

V F c) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+2} \cdot a_{i1} \cdot \det M_{i2}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F d) La combinazione lineare di due matrici reali $n \times n$ a determinante nullo è sempre una matrice a determinante nullo.

Ogni quesito presenta quattro risposte; ce ne possono essere da 0 a 4 vere. Attraversare con una crocetta la lettera **V** *se ritenete la risposta vera, la lettera* **F** *se la ritenete falsa. Per annullare una crocetta, cerchiarla.* **Ogni risposta assegna un punteggio di 1/2 punto se l'indicazione è esatta, -1/2 punto se è errata, 0 punti in caso di astensione.** *Non è consentito alcun ausilio (libri, appunti, calcolatrici,...). La scheda verrà ritirata al termine della prima ora. Nel testo k, m ed n indicano sempre numeri naturali positivi. Se non specificato diversamente le matrici citate si devono intendere reali, e su $\mathbb{R}^n$ e $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ si devono considerare le operazioni e strutture standard.*

1) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.

V F b) Se una matrice reale $n \times n$ ha 0 come autovalore reale di molteplicità geometrica n allora è la matrice nulla.

V F c) Se una matrice reale $n \times n$ ha n autovalori reali distinti allora è diagonalizzabile per similitudine.

V F d) Se due matrici quadrate reali hanno lo stesso polinomio caratteristico allora hanno anche lo stesso determinante.

2) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'unione di due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$ è sempre un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

V F b) Per ogni sottospazio vettoriale U di $\mathbb{R}^n$ ogni sistema di generatori di U ha cardinalità superiore o uguale a quella di ogni sottoinsieme linearmente indipendente di U.

V F c) La relazione di isomorfismo fra i sottogruppi di un gruppo finito G fissato è una relazione di equivalenza.

V F d) L'insieme delle matrici reali 3×3 simmetriche è uno spazio vettoriale reale rispetto alle usuali operazioni di somma e prodotto per uno scalare.

3) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Tutte le matrici triangolari reali $n \times n$ a traccia nulla sono non invertibili.

V F b) Il prodotto di due matrici reali $n \times n$ simmetriche A, B tali che $AB = BA$ è sempre una matrice simmetrica.

V F c) Una matrice reale $n \times n$ è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

V F d) Se due matrici reali hanno la stessa trasposta, allora coincidono.

4) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'endomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definito ponendo $f(x_1, \ldots, x_n) = (x_n, x_1, \ldots, x_{n-1})$ per ogni $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ è una isometria rispetto al prodotto scalare standard.

V F b) Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali di $\mathbb{R}^n$ è linearmente indipendente.

V F c) L'ortogonale $W^\perp$ del sottospazio vettoriale euclideo W di $\mathbb{R}^5$ di equazione cartesiana $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ ha come base $B = \{(0, 0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 0, 1)\}$.

V F d) Sia $\|\cdot\|$ la norma indotta da un prodotto scalare $\langle\cdot,\cdot\rangle$ su uno spazio vettoriale reale V. Allora $\langle\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$ se e solo se $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2$.

5) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) L'immagine di una trasformazione lineare $f : U \to W$ è sempre un sottospazio vettoriale di U.

V F b) La funzione da $M_3(\mathbb{R})$ a $M_3(\mathbb{R})$ che porta ogni matrice reale 3×3 nella sua trasposta è una trasformazione lineare.

V F c) Se $f : V \to W$ è un isomorfismo e B è una base per V, allora $f(B)$ è una base per W.

V F d) La funzione $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definita ponendo $f(x, y, z) = (x + 2y, y + 2z, z + 2x)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è una trasformazione lineare.

6) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Se in una matrice reale A esistono k colonne linearmente indipendenti, allora esistono in A anche k righe linearmente indipendenti.

V F b) Un sistema lineare con matrice incompleta A e matrice completa C ammette soluzioni se e solo se $A = C$.

V F c) L'unica matrice reale 10×10 di rango 0 è la matrice nulla 10×10.

V F d) Esiste un'unica matrice reale 7×5 che sia allo stesso tempo completamente ridotta per righe e completamente ridotta per colonne.

7) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Per ogni numero reale x esiste almeno una matrice ortogonale 10×10 il cui determinante è uguale a x.

V F b) Se $n \geq 2$ e $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ allora $\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n+j} \cdot a_{nj} \cdot \det M_{nj}$, dove M_{ij} rappresenta il minore complementare dell'elemento a_{ij}.

V F c) Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari i cui termini siano tutti negativi ha sempre determinante negativo.

V F d) Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ e A è invertibile allora $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

8) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere nello spazio vettoriale euclideo standard $\mathbb{R}^3$:

V F a) $(1, 0, 0) \wedge (0, 0, 1) = (0, 1, 0)$.

V F b) Per ogni punto passa una e una sola retta perpendicolare a un piano dato.

V F c) I piani di rispettive equazioni cartesiane $x + y + 5z = 0$ e $3x + 3y + 15z = 1$ sono fra loro paralleli.

V F d) La retta di equazione parametrica $x = t, y = 0, z = 1$ ammette $(1, 0, 1)$ come terna di parametri direttori.

9) Dire quali delle seguenti affermazioni sono vere:

V F a) Fra due sottoinsiemi infiniti di $\mathbb{N}$ esiste sempre almeno una corrispondenza biunivoca.

V F b) L'insieme dei numeri reali è un gruppo rispetto all'operazione $\star$ definita ponendo $x \star y = 0$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$.

V F c) Il gruppo delle permutazioni su 3 elementi non ha sottogruppi.

V F d) $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot)$ è un campo.