DETTAGLIO DEL PROGRAMMA SVOLTO LEZIONE PER LEZIONE NEL CORSO GEOMETRIA E ALGEBRA T (per Ing. Informatica - A.A. 2015/2016)

L1. Introduzione al corso. Prerequisiti della teoria elementare degli insiemi. Gruppi. Gruppi abeliani e gruppi non abeliani. Esempi ed esercizi.

L2. Omomorfismi e isomorfismi di gruppi. Anelli. Anelli commutativi. Anelli con unità. Campi. Il campo dei numeri complessi. Esempi.

L3. Spazi vettoriali. Combinazioni lineari. Sistemi di generatori. Dipendenza e indipendenza lineare. Basi. Esempi.

L4. Base canonica di R^n. Unicità di rappresentazione di un vettore generico rispetto a una base data. Ogni spazio vettoriale ammette almeno una base. La cardinalità di un insieme linearmente indipendente è sempre minore o uguale di quella di un sistema di generatori dello spazio vettoriale. Teorema del completamento a una base. Due basi di uno stesso spazio vettoriale hanno sempre la medesima cardinalità. Dimensione di uno spazio vettoriale. Relazioni fra lineare indipendenza, sistemi di generatori e dimensione di uno spazio vettoriale. Sottospazi vettoriali. Esempi ed esercizi.

L5. Spazio generato da un insieme finito di vettori. Intersezione e somma di sottospazi vettoriali. Formula di Grassmann (con dimostrazione). Somma diretta di sottospazi vettoriali. Spazio vettoriale delle matrici reali mxn. Matrici quadrate, matrici triangolari alte e basse, matrici diagonali. Matrice trasposta. Matrici simmetriche e antisimmetriche. Esempi.

L6. Spazio delle righe e spazio delle colonne di una matrice. Matrice identità. Prodotto righe per colonne fra due matrici e sue proprietà. Matrici invertibili e unicità della matrice inversa. Potenze di matrici. Anello delle matrici reali nxn. Inversa della matrice AB. Esempi ed esercizi.

L7. Sistemi lineari e loro rappresentazione in forma matriciale: AX=B. Differenza fra due soluzioni di AX=B come soluzione del sistema lineare omogeneo associato AX=O. Insieme delle soluzioni di AX=B come traslato delle soluzioni di AX=O. Dimensione dello spazio delle soluzioni di AX=B. Matrice incompleta A e completa C associate a un sistema lineare. Riduzione di una matrice nella forma a gradini mediante operazioni riga. Pivot di una matrice A ridotta a gradini e rango di A. Metodo di Gauss per la risoluzione di un sistema lineare. Teorema di Rouché-Capelli. Definizione alternativa di rango di una matrice come dimensione dello spazio generato dalle sue righe e come dimensione dello spazio generato dalle sue colonne. Esempi.

L8. Esercitazione sul calcolo di una base di uno spazio vettoriale partendo da un sistema di generatori. Definizione di trasformazione lineare. Esempi di trasformazioni lineari. Nucleo e immagine di una trasformazione lineare (definizioni e loro strutture di spazi vettoriali). Immagine di un sistema di generatori di uno spazio vettoriale V mediante una trasformazione lineare T come sistema di generatori per l'immagine di T. Una trasformazione lineare T:V-->W è suriettiva se e solo se Im T=W, e iniettiva se e solo il suo nucleo contiene il solo vettore nullo.

L9. Teorema fondamentale delle trasformazioni lineari. Equazione dimensionale per una trasformazione lineare $T:V \to W$: $\dim V = \dim(\mathrm{Im}\, T)+\dim(\ker T)$. Una trasformazione lineare fra due spazi vettoriali della stessa dimensione finita è iniettiva se e solo se è suriettiva. Relazioni fra dimensioni degli spazi vettoriali dominio e codominio, iniettività e suriettività. Isomorfismi di spazi vettoriali. Ogni spazio vettoriale di dimensione n è isomorfo a R^n. Linearità dell'isomorfismo inverso. Esempi.

L10. Matrice associata a una trasformazione lineare. Matrice associata alla composizione di due trasformazioni lineari. Esempi ed esercizi. Spazio vettoriale delle trasformazioni lineari tra due spazi vettoriali e suo isomorfismo con uno spazio vettoriale di matrici. Relazioni fra dimensione dell'immagine, dimensione del nucleo, e rango di una matrice associata a una trasformazione lineare. Esempi.

L11. Calcolo di basi per il nucleo e l'immagine di una trasformazione lineare f tramite una matrice associata a f. Matrice del cambiamento di base. Esercitazione sulle matrici del cambiamento di base. Una matrice quadrata è invertibile se e solo se ha rango massimo. Similitudine di matrici quadrate nxn.

L12. Minore di una matrice. Complemento algebrico. Definizione di determinante di una matrice quadrata secondo Laplace. Il determinante come volume orientato di un parallelepipedo. Regola di Sarrus. Principali proprietà del determinante e sua multilinearità. Determinante di una matrice triangolare. Esercitazione sul calcolo del determinante di una matrice 4x4.

L13. Determinante della matrice identica. Il determinante della matrice associata a una trasformazione lineare f come rapporto fra l'area di f(X) e l'area di un insieme X. Enunciato del Teorema di Binet. Una matrice quadrata ha rango massimo se e solo se il suo determinante è diverso da zero. Esempi. Minori e minori orlati. Teorema di Kronecker (in forma debole e forte). Esercitazione sul calcolo del rango di una matrice parametrica tramite il teorema di Kronecker. Calcolo della matrice inversa col metodo della matrice dei cofattori. Esempi.

L14. Calcolo della matrice inversa col metodo delle due matrici affiancate. Regola di Cramer. Permutazioni su n oggetti e loro parità. Definizione di determinante come sommatoria di prodotti con segno. Definizione di determinante come unica funzione multilineare nelle righe, alternante e normalizzata. Esempi ed esercizi.

L15. Introduzione al concetto di autovalore e autovettore. Definizione di autovalore, autospazio e autovettore. U_0 come nucleo dell'endomorfismo considerato. Autovalori e autovettori di una matrice quadrata. Matrice caratteristica e polinomio caratteristico. Esercitazione sul calcolo degli autovalori e dei rispettivi autospazi.

L16. Basi spettrali e diagonalizzazione di matrici. Molteplicità di una radice di un polinomio. Ogni matrice quadrata reale di ordine dispari ammette almeno un autovalore reale. Molteplicità algebrica ma(x) e molteplicità geometrica mg(x) di un autovalore x. Endomorfismi semplici. Se un endomorfismo T ammette una base spettrale B, la matrice associata a T rispetto a B è diagonale. Autovalori della matrice A^k. Esempi ed esercizi.

L17. $1 \le mg(x) \le ma(x)$. L'unione delle basi degli autospazi di un endomorfismo è un insieme linearmente indipendente. Un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale di dimensione n è semplice se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori è uguale a n. Ogni endomorfismo di uno spazio vettoriale reale di dimensione n che ammetta n autovalori reali distinti è semplice. Ogni endomorfismo che sia associato a una matrice reale simmetrica è semplice. Se A e B sono due matrici nxn la traccia di AB è uguale alla traccia di BA. Se due matrici quadrate reali sono simili hanno lo stesso polinomio caratteristico, la stessa traccia, lo stesso determinante e lo stesso rango. Nel polinomio caratteristico di A si possono leggere traccia e determinante della matrice A. Esempi ed esercizi.

L18. Il prodotto scalare standard di due vettori di R^n (espresso sia in funzione dei loro moduli e dell'angolo da loro formato, che in funzione delle loro componenti). Definizione generale di prodotto scalare. Spazi vettoriali euclidei. Norma indotta da un prodotto scalare e sue principali proprietà. Esempi.

L19. Distanza, angolo e ortogonalità fra vettori. Indipendenza lineare di vettori non nulli a due a due ortogonali. Complemento ortogonale, sua base e dimensione. Esempi. Basi ortogonali e ortonormali. Componenti di un vettore rispetto a una base ortonormale. Ogni prodotto scalare acquista una forma standard rispetto a ogni base ortonormale. Metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt e proprietà del complemento ortogonale. Endomorfismi isometrici e matrici ortogonali. Matrici ortogonali 2x2. Determinante di una matrice ortogonale. Enunciato del teorema spettrale.

L20. Ogni matrice ortogonale di ordine dispari con determinante positivo ammette l'autovalore 1. Sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Distanza fra due punti. Equazioni cartesiane e parametriche dei piani di R^3. Piano per tre punti non allineati. Piani per un punto. Piani paralleli (disgiunti e coincidenti). Piani incidenti. Piani ortogonali.

L21. Equazioni cartesiane e parametriche delle rette di R^3. Equazione parametrica della retta per due punti. Equazione cartesiana della retta per due punti. Numeri direttori di una retta. Passaggio da equazioni parametriche a equazioni cartesiane e viceversa. Posizioni reciproche di due rette. Posizioni reciproche di retta e piano. Parallelismo e ortogonalità fra una retta e un piano. Distanza fra un punto e un piano. Distanza fra due piani paralleli. Piano passante per un punto e parallelo a due rette fra loro non parallele. Fasci propri e impropri di piani (sola definizione). Prodotto vettoriale e suo uso per il calcolo di aree di triangoli e parallelogrammi.

L22. Lezione sul PageRank di Google e le sue connessioni con l'algebra lineare.

L23. Esercitazione di preparazione all'esame. Chiusura del corso.