CORSO "GEOMETRIA E ALGEBRA T"
INGEGNERIA INFORMATICA
ANNO ACCADEMICO 2016/2017
PROGRAMMA SVOLTO LEZIONE PER LEZIONE

L1. Introduzione al corso. Permutazioni e loro parità.

L2. Strutture algebriche. Gruppi e gruppi commutativi. Numeri complessi. Numerabilità dei numeri razionali e non numerabilità dei numeri reali. Omomorfismi e isomorfismi di gruppi. Esempi ed esercizi.

L3. Esercitazione sui concetti di insieme, funzione e gruppo.

L4. Anelli e campi. Divisori dello zero in un anello. Un campo non può mai contenere divisori dello zero. Z_n è un campo se e solo se n è primo. Esempi ed esercizi. Definizione di spazio vettoriale ed esempi di spazi vettoriali.

L5. Sistemi di generatori. Insiemi linearmente indipendenti. Basi. Spazi finitamente generati. Esempi ed esercizi.

L6. Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base. Uso delle operazioni riga su una matrice per trovare sistemi di generatori di R^n e verificare la lineare indipendenza di insiemi di vettori di R^n. Ogni insieme di più di n vettori di R^n è linearmente dipendente. Teorema del completamento a una base in R^n. Tutte le basi di R^n hanno la stessa cardinalità. Esempi ed esercizi.

L7. Trasformazioni lineari e isomorfismi. Esempi. Omomorfismi e isomorfismi fra strutture algebriche. Coordinate di un vettore rispetto a una base data. La mappa che porta i vettori nelle loro coordinate rispetto a una base data è un isomorfismo di spazi vettoriali. Ogni isomorfismo di spazi vettoriali porta sistemi di generatori in sistemi di generatori e insiemi linearmente indipendenti in insiemi linearmente indipendenti.

L8. Dimostrazione del fatto che in uno spazio vettoriale finitamente generato tutte le basi hanno la stessa cardinalità (riconducendosi al caso di R^n tramite un isomorfismo). Definizione di dimensione di uno spazio vettoriale. Relazioni fra i concetti di base, sistema di generatori, insieme linearmente indipendente e dimensione negli spazi vettoriali finitamente generati. Concetto di sottospazio vettoriale. Esercitazione sul concetto di sottospazio vettoriale, su quello di dimensione e sulle modalità per trovare una base di un sottospazio vettoriale.

L9. Esercitazione sui sottospazi vettoriali e sulla loro dimensione.

L10. Sottospazio vettoriale generato da un insieme finito di vettori di uno spazio vettoriale V. Intersezione di sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Somma e somma diretta di sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale V. Formula di Grassmann. Esercitazione.

L11. Esercitazione su sottospazi vettoriali, sistemi di generatori, insiemi linearmente indipendenti, basi e dimensione.

L12. Il gruppo additivo delle matrici mxn. Lo spazio vettoriale delle matrici mxn. Matrici quadrate, matrici triangolari alte e basse, matrici diagonali. Trasposta di una matrice. Matrici simmetriche e matrici antisimmetriche. Spazio delle righe e spazio delle colonne di una matrice. Invarianza della dimensione dello spazio delle righe e della dimensione dello spazio delle colonne quando si applicano trasformazioni riga. Definizione di rango di una matrice A come numero di pivot di una sua qualunque forma ridotta, come dimensione dello spazio delle righe di A e come dimensione dello spazio delle colonne di A. Il rango di una matrice coincide col rango della sua trasposta. Prodotto fra matrici e sue proprietà. Anello con unità delle matrici quadrate. Matrice identità. Matrice inversa.

L13. Inversa di una matrice 2x2 e suo determinante. Inversa di una matrice quadrata e sua unicità. Inversa di una matrice prodotto di due matrici nxn. Trasposta di una matrice prodotto di due matrici. Potenza di una matrice quadrata. Esercitazione sulle matrici.

L14. Sistemi lineari e loro forma matriciale. Risolubilità di sistemi lineari e Teorema di Rouché-Capelli. Sistemi lineari omogenei. Insieme delle soluzioni di un sistema lineare come traslato dell'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo associato. Dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare: definizione e calcolo tramite il rango. Risoluzione di un sistema lineare tramite il metodo di Gauss. Esempi ed esercizi.

L15. Applicazioni lineari. Immagine e nucleo di una trasformazione lineare e loro proprietà. Esempi ed esercizi.

L16. Equazione dimensionale e sue conseguenze sulla iniettività e suriettività di una trasformazione lineare. Matrici associate a una trasformazione lineare T e uso del loro rango per calcolare le dimensioni di Im T e ker T. Esercitazione su immagine e nucleo di una trasformazione lineare.

L17. Matrice associata a una composizione di trasformazioni lineari. Matrice associata a una rotazione. Matrice del cambiamento di base. Esempi ed esercizi.

L18. Teorema fondamentale delle trasformazioni lineari. Una matrice nxn è invertibile se e solo se ha rango n. Similitudine fra matrici e sua relazione con le matrici del cambiamento di base. Esercitazione su matrici del cambiamento di base e trasformazioni lineari.

L19. Varie definizioni equivalenti di determinante. Interpretazione del determinante come volume orientato.

L20. Le principali proprietà del determinante. Il determinante di una matrice quadrata A è sempre uguale al determinante della trasposta di A. Una matrice quadrata ha rango massimo se e solo se il suo determinante è non nullo. Teorema di Binet. Teorema di Kronecker. Esercitazione sul calcolo del determinante.

L21. Formula per il calcolo della matrice inversa. Formula di Cramer. Esempi ed esercizi. Introduzione ai concetti di autovalore e autovettore.

L22. Definizione di autovalore, autovettore e autospazio. Matrice caratteristica. Polinomio caratteristico. Basi spettrali e diagonalizzazione di matrici. Esempi ed esercizi.

L23. Endomorfismi semplici. Un endomorfismo è semplice se e solo se la sua matrice associata rispetto a una data base è diagonalizzabile per similitudine. Molteplicità algebriche e geometriche di autovalori. Una matrice nxn è diagonalizzabile se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori fa n. Esercitazione sull'esistenza, al variare di un parametro k, di una base spettrale per un endomorfismo dipendente da k. Due matrici simili hanno sempre lo stesso polinomio caratteristico, lo stesso determinante, lo stesso rango e la stessa traccia. Ogni matrice nxn con n dispari ammette almeno un autovalore reale. Esistenza di una base spettrale per tutte le matrici nxn dotate di n autovalori distinti. Esistenza di una base spettrale per tutte le matrici simmetriche. Ogni matrice ortogonale nxn con n dispari e determinante positivo ammette 1 come autovalore.

L24. Prodotti scalari e norme su R^n e loro principali proprietà. Spazi vettoriali euclidei. Ortogonalità fra vettori. Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali è linearmente indipendente. Complemento ortogonale e sua dimensione. Basi ortogonali e basi ortonormali. Metodo di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt. Coordinate di un vettore rispetto a una base ortonormale.

Isometrie e matrici ortogonali. Determinante di una matrice ortogonale. Sistemi di riferimento cartesiano ortogonale in R^n. Parallelismo e ortogonalità fra due rette, due piani e un piano e una retta in R^3. Posizioni reciproche di due rette in R^3. Distanza fra un punto e una retta in R^2. Distanza fra un punto e un piano in R^3. Prodotto vettoriale in R^3. CONCLUSIONE DEL CORSO.