

**CORSO "GEOMETRIA E ALGEBRA T"
INGEGNERIA INFORMATICA
ANNO ACCADEMICO 2017/2018
PROGRAMMA SVOLTO LEZIONE PER LEZIONE**

22/09/2017 Introduzione al corso. Concetto di cardinalità. Strutture algebriche. Gruppi, anelli, campi. Anello delle classi di resto modulo n . Esempi.

25/09/2017 Esempi di campi. I campi non hanno divisori dello zero. L'anello delle classi di resto modulo n è un campo se e solo se n è primo. Esempi di gruppi non commutativi: gruppo delle permutazioni su n elementi per $n \geq 3$ e gruppo dei movimenti rigidi di \mathbb{R} , \mathbb{R}^2 ed \mathbb{R}^3 . Esercizi.

29/09/2017 Esercitazione su gruppi, principio di induzione e anello dei polinomi. Omomorfismi e isomorfismi di gruppi. Spazio vettoriale dei vettori applicati. Definizione generale di spazio vettoriale.

02/10/2017 Gli omomorfismi di gruppi mandano unità in unità. Esempi di spazi vettoriali. Omomorfismi, isomorfismi endomorfismi e automorfismi di spazi vettoriali. Combinazioni lineari e sistemi di generatori.

09/10/2017 Lineare dipendenza e indipendenza. Base di uno spazio vettoriale. Esempi di basi.

13/10/2017 Spazi vettoriali finitamente generati. Ogni spazio vettoriale finitamente generato ammette almeno una base. Coordinate di un vettore rispetto a una base data. Operazioni riga su di una matrice. Forma ridotta e completamente ridotta per righe. Metodo della riduzione a gradini per stabilire se le righe di una matrice sono fra loro linearmente indipendenti e per trovare un sistema di generatori più semplice per lo spazio da esse generato. Esempi.

16/10/2017 Sottospazi vettoriali. Determinazione di una base per un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n mediante riduzione per righe di una matrice. Ogni base di \mathbb{R}^n ha cardinalità n . Isomorfismi di spazi vettoriali. La mappa che manda ogni vettore nell' n -upla delle sue coordinate rispetto a una base fissata è un isomorfismo. Esempi ed esercizi.

20/10/2017 Ogni spazio vettoriale che ammetta una base con n elementi è isomorfo a \mathbb{R}^n . Gli isomorfismi portano sistemi di generatori in sistemi di generatori, insiemi linearmente indipendenti in insiemi linearmente indipendenti e basi in basi. Tutte le basi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno la stessa cardinalità. Dimensione di uno spazio vettoriale. Ogni sistema di generatori di uno spazio vettoriale di dimensione n ha almeno n elementi. Ogni sottoinsieme linearmente indipendente di uno spazio vettoriale di dimensione n ha al più n elementi. Due spazi vettoriali finitamente generati sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione. Intersezione e somma di due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale. Somma diretta. Teorema del completamento a una base. Relazione di Grassmann. Esempi ed esercizi.

23/10/2017 Dimostrazione della relazione di Grassmann. Esercitazione sui sottospazi vettoriali. Matrici simmetriche e antisimmetriche.

27/10/2017 Operazione di trasposizione di matrici e sue principali proprietà. Matrici simmetriche e antisimmetriche. Esercitazione sull'uso della relazione di Grassmann per il calcolo della dimensione della somma diretta fra lo spazio vettoriale delle matrici simmetriche $n \times n$ e lo spazio vettoriale delle matrici antisimmetriche $n \times n$. Se U è un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale finitamente generato V e $\dim U = \dim V$ allora $U = V$. Ogni matrice $n \times n$ si può scrivere come somma di una matrice simmetrica e una matrice antisimmetrica. Prodotto righe per colonne fra due matrici. Matrice identità. Matrice inversa. Esempi.

30/10/2017 Matrici triangolari alte, triangolari basse e diagonali. Spazio vettoriale delle matrici $m \times n$. Anello delle matrici quadrate $n \times n$. Il prodotto fra due matrici $n \times n$ non è in generale commutativo. Spazio delle righe e spazio delle colonne. Uguaglianza fra dimensione dello spazio delle righe, dimensione dello spazio delle colonne e numero di pivot nella forma completamente ridotta di una matrice. Rango di una matrice. Esercitazione sul calcolo del rango.

03/11/2017 Matrice inversa del prodotto di due matrici $n \times n$ invertibili. Determinante e inversa di una matrice quadrata 2×2 . Divisori dello zero nell'anello delle matrici quadrate $n \times n$. Potenze di una matrice quadrata. Esercitazione sul calcolo matriciale.

06/11/2017 Sistemi lineari. Algoritmo di Gauss. Teorema di Rouché-Capelli. Dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema lineare. Sistemi lineari omogenei. L'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo in n incognite è un sottospazio vettoriale di \mathbb{R}^n . Esempi.

10/11/2017 Esercitazione sui sistemi lineari.

17/11/2017 Trasformazioni lineari. Matrice associata a una trasformazione lineare rispetto a due basi date. Esempi ed esercizi. Traccia di una matrice quadrata.

20/11/2017 Nucleo e immagine di una trasformazione lineare. Equazione dimensionale e sue conseguenze in relazione alla iniettività e suriettività delle trasformazioni lineari. Uguaglianza fra la dimensione di $\text{Im } f$ e il rango di ogni matrice associata alla trasformazione lineare f .

24/11/2017 Matrice associata alla composizione di due omomorfismi. Matrice del cambiamento di base e sue principali proprietà. Una matrice quadrata è invertibile se e solo se ha rango massimo. Matrici simili. Due matrici associate allo stesso endomorfismo sono sempre tra loro simili. Esempi ed esercizi.

27/11/2017 Determinante di una matrice quadrata. Il determinante è una funzione multilineare, alternante e normalizzata. Esempi.

01/12/2017 Proprietà del determinante. Il determinante di una matrice quadrata e della sua trasposta coincidono. Teorema di Binet (con dimostrazione). Una matrice quadrata ha determinante nullo se e solo se il suo rango non è massimo. Esempi ed esercizi sul calcolo del determinante.

04/12/2017 Sottomatrici e minori. Orli di un minore. Teorema di Kronecker. Esercitazione sulla discussione dei sistemi lineari parametrici mediante il teorema di Kronecker. Una matrice quadrata è invertibile se e solo se ha determinante non nullo.

11/12/2017 Calcolo dell'inversa di una matrice quadrata. Risoluzione di un sistema normale col metodo di Cramer. Teorema fondamentale delle trasformazioni lineari. Definizione di autovalore e di autovettore per un endomorfismo di uno spazio vettoriale reale finitamente generato. Esempi ed esercizi.

14/12/2017 Polinomio caratteristico e sue principali proprietà. Proprietà degli autovalori e degli autospazi. Invarianza di polinomio caratteristico, traccia e determinante rispetto alla similitudine di matrici. Basi spettrali. Esercitazione sulle basi spettrali.

15/12/2017 Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. Endomorfismi semplici e matrici diagonalizzabili. Un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione n è semplice se e solo se la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori fa n . Se un endomorfismo di uno spazio vettoriale V di dimensione n ha n autovalori distinti allora è semplice. Ogni matrice simmetrica reale è diagonalizzabile per similitudine. Ogni matrice ortogonale di ordine dispari e determinante positivo ammette 1 come autovalore. Esercitazione sulla determinazione degli endomorfismi semplici. Prodotto scalari. Spazi vettoriali euclidei. Norma indotta da un prodotto scalare e sue principali proprietà. Coseno dell'angolo fra due vettori. Ortogonalità fra vettori. Ogni insieme di vettori non nulli a due a due ortogonali è linearmente indipendente. Complemento ortogonale di un sottospazio di uno spazio vettoriale euclideo e sua dimensione.

18/12/2017 Il complemento ortogonale del complemento ortogonale di un sottospazio vettoriale euclideo W coincide con W . Basi ortogonali e ortonormali. Coordinate rispetto a una base ortonormale. Metodo di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt. Isometrie e matrici ortogonali. Rappresentazioni cartesiane e parametriche di sottospazi vettoriali. Parallelismo e ortogonalità fra rette nel piano. Parallelismo e ortogonalità fra due rette, due piani e un piano e una retta in \mathbb{R}^3 . Rette sghembe in \mathbb{R}^3 . Prodotto vettoriale in \mathbb{R}^3 . CONCLUSIONE DEL CORSO.