Dal metodo delle tangenti al calcolo differenziale: un percorso storico-didattico

Veronica Gavagna*

Indice

*Queste sono le dispense del laboratorio *Dal metodo delle tangenti al calcolo differenziale: un percorso storico-didattico* realizzato dal 2009 al 2012 presso il Dipartimento di Matematica di Salerno nell'ambito del Piano Lauree Scientifiche.

1 Introduzione

Le recenti Indicazioni nazionali per i percorsi liceali (Decreto 15 marzo 2010) suggeriscono ai docenti di evidenziare il carattere culturale della matematica, mettendone in luce i rapporti con le altre discipline: fisica e scienze naturali innanzi tutto, ma anche storia e filosofia. Si legge infatti

> Al termine del percorso liceale lo studente [...] saprà inquadrare le varie teorie matematiche studiate nel contesto storico entro cui si sono sviluppate e ne comprenderà il significato concettuale. Lo studente avrà acquisito una visione storico-critica dei rapporti tra le tematiche principali del pensiero matematico e il contesto filosofico, scientifico e tecnologico. In particolare, avrà acquisito il senso e la portata dei tre principali momenti che caratterizzano la formazione del pensiero matematico: la matematica nella civiltà greca, il calcolo infinitesimale che nasce con la rivoluzione scientifica del Seicento e che porta alla matematizzazione del mondo fisico, la svolta che prende le mosse dal razionalismo illuministico e che conduce alla formazione della matematica moderna e a un nuovo processo di matematizzazione che investe nuovi campi (tecnologia, scienze sociali, economiche, biologiche) e che ha cambiato il volto della conoscenza scientifica.

L'evidente scopo degli estensori di questo documento è quello di restituire la matematica alla sua dimensione di profonda riflessione filosofica, superando così il tradizionale approccio esclusivamente calcolistico, che ha generalmente indotto a percepire la matematica come una disciplina tecnica e artificiosa e non come una scienza inscindibilmente legata all'evoluzione del pensiero umano. La storia della matematica può, in molti casi, far emergere la dimensione culturale di questa disciplina, purché essa non sia interpretata come una serie di aneddoti volti ad alleggerire e a facilitare l'apprendimento dei contenuti tecnici, ma costituisca invece uno strumento per cogliere le ragioni più profonde che stanno alla base di una teoria matematica.

Le attività di questo laboratorio si propongono di accompagnare gli studenti dell'ultimo biennio della scuola secondaria di secondo grado lungo un percorso che, approfondendo temi curricolari – peraltro di non esclusivo ambito matematico – evidenzi le problematiche che hanno condotto all'invenzione del calcolo differenziale alla fine del Seicento.

Le attività prendono avvio da una riflessione sul concetto di curva e di tangente a una curva. Per i matematici moderni una curva (algebrica) è descritta dalla sua equazione o quanto meno da una sua proprietà. Per esempio, l'ellisse è il luogo dei punti del piano tali che la somma delle loro distanze da due punti fissi è costante; oppure il luogo di zeri di un'equazione di secondo grado in due variabili i cui coefficienti soddisfano certe proprietà. Questo approccio però è relativamente recente: nella matematica greca una curva è data quando si conosce una procedura costruttiva che la descriva e in questo senso preesiste alle sue proprietà, che andranno cercate e determinate. L'ellisse, dunque, si definisce come la curva che si ottiene tagliando un cono con un piano che incontri tutte le generatrici e tra le sue proprietà figurerà anche il fatto che la somma delle distanze di un punto della curva da due punti fissi interni alla curva rimane sempre costante.

Il fatto che l'esistenza di una curva sia subordinata al suo procedimento costruttivo, implica che ogni curva diventi un oggetto unico con caratteristiche assolutamente specifiche; infatti le (poche) curve della matematica greca sono addirittura dotate di nome e patronimico: spirale di Archimede, cissoide di Diocle, quadratrice di Ippia, concoide di Nicomede etc. Dal momento che manca un concetto generale di curva, non può nemmeno esistere un *metodo generale* per determinarne la tangente in un suo punto: per ogni curva esisterà dunque uno specifico procedimento di costruzione che sfrutterà le caratteristiche peculiari della curva stessa. Un esempio semplice è dato dalla costruzione della tangente alla circonferenza, che viene proposto attraverso la lettura (in traduzione italiana) delle proposizioni III.16 e III.17 degli *Elementi* di Euclide(§ 2).

Solo dopo essersi resi conto di questo particolare modo di intendere le curve, gli studenti potranno più consapevolmente apprezzare la portata della rivoluzione cartesiana che irrompe nella matematica del primo Seicento, ancora largamente dominata dal paradigma della matematica classica. Con la *Géométrie* di Descartes (1637) (§ 3), che in questa opera interpreta in ambito geometrico i principi filosofici del *Discours de la méthode*, si afferma il concetto di curva-equazione, che è del tutto familiare allo studente dell'ultimo biennio della scuola superiore, ma che rappresenta una profonda novità per i matematici dell'epoca, finalmente dotati di potenti strumenti algebrico-geometrici per affrontare problemi irrisolti o risolti solo parzialmente. Il mondo (ristretto) delle curve greche lascia così definitivamente il posto a un universo popolato da infinite curve-equazione, curve cioè rappresentate da un'equazione di tipo polinomiale. Questa generalizzazione del concetto di curva pone le basi per la formulazione di un metodo generale per la determinazione delle tangenti alle curve algebriche. Verranno dunque proposti, in traduzione italiana, alcuni passi della *Géométrie* in cui Descartes spiega come costruire un'algebra di segmenti e come utilizzare l'equazione di una curva per determinarne in prima battura la retta normale in un punto e, successivamente, la retta tangente.

Il metodo cartesiano non è tuttavia esente da limiti: anzitutto è valido solamente per curve algebriche (e il panorama matematico seicentsco iniziava a popolarsi anche di quelle che oggi chiamiamo curve trascendenti) e anche in questi casi presentava notevoli difficoltà di calcolo anche nei casi di curve più semplici. I successori di Descartes (§ 4) cercano dunque di "alleggerire" il metodo pur lasciandone inalterata la struttura portante. In § 4 verrà proposta la variante di Florimond de Beaune (1649), che è una generalizzazione a una curva algebrica di grado n del procedimento appreso dagli studenti nel contesto della geometria analitica per le curve di secondo grado; infine si illustreranno anche i metodi di Jan Hudde (1659) e di René-François de Sluse (1672) perché mostrano il tentativo di automatizzare il procedimento astraendolo dalla consueta interpretazione geometrica per ridurlo a una manipolazione dei coefficienti dell'equazione della curva.

Negli anni in cui Descartes elabora il proprio metodo, anche Pierre de Fermat ne propone uno, basato questa volta sulla possibilità di "leggere" sulla tangente la proprietà della curva (§ 5). Il metodo di Fermat si può estendere anche a curve trascendenti come la cicloide, ma non elimina i problemi di calcolo, che continuano a permanere in presenza di radici ed espressioni frazionarie.

Nonostante la trasformazione del *metodo* in *regola*, i limiti insiti nella struttura del procedimento cartesiano o di quello fermatiano non vengono superati fino al momento in cui Gottfried Wilhelm Leibniz cambia radicalmente il punto di vista su questo problema (§ 6) e pubblica quello che è considerato come l'atto di nascita del calcolo differenziale, ovvero la memoria *Nova methodus pro maximis et minimis* apparsa nel 1684. In questo lavoro si introduce il concetto di differenziale di una curva e si trasforma il problema algebrico-geometrico della costruzione della tangente in un problema di calcolo del differenziale, che soggiace a specifiche regole. L'invenzione leibniziana viene proposta attraverso la lettura critica di alcuni passi originali (in latino e in traduzione) della *Nova Methodus*.

Possiamo quindi riassumere l'*excursus* nei seguenti punti:

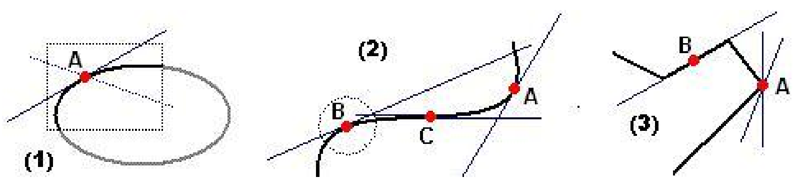
- il concetto di curva nella geometria greca (letture dagli *Elementi* di Euclide)
- il nuovo concetto di curva-equazione e la formulazione di un metodo generale per le tangenti (letture dalla *Géométrie* di Descartes)
- i limiti del metodo algebrico cartesiano e i tentativi per superarli (letture dai commentatori della *Géométrie* Hudde e de Sluse)
- le novità e i limiti del metodo di Fermat (letture selezionate dalle *Oeuvres*)
- l'invenzione del calcolo differenziale come proposta di un nuovo metodo per la determinazione delle tangenti (letture dalla *Nova methodus* di Leibniz)

Nelle dispense vengono proposti alcuni passi anche in lingua originale (latino e francese) oltre che in traduzione in modo che, eventualmente, gli studenti possano cimentarsi da soli o in gruppo con la traduzione di un testo scientifico.

2 La retta tangente a una circonferenza: gli *Elementi* di Euclide

Le definizioni I.15 e I.16 degli *Elementi* di Euclide recitano: "Il cerchio è una figura piana compresa da un'unica linea che si chiama circonferenza, tale che tutte le rette[1] che cadono sulla circonferenza a partire da un solo punto tra quelli posti all'interno della figura, sono uguali tra loro. Quel punto si chiama centro del cerchio." Nella seconda definizione del libro III degli *Elementi*, Euclide definisce la tangente a un cerchio in un suo punto come "la retta che, toccando il cerchio e prolungata, non seca il cerchio".

Non c'è dubbio che tale definizione individui univocamente la retta tangente a una circonferenza in un suo punto (e anche a un'ellisse, come si vede dalla figura (1)[2]), ma possiamo estenderla al caso di una curva qualsiasi? Se consideriamo, ad esempio, l'asse di una parabola (o una retta ad esso parallela) vediamo immediatamente che soddisfa la definizione euclidea, pur non essendo una retta tangente nel vertice della parabola. D'altra parte, se consideriamo la figura (2) possiamo constatare che la retta tangente in B interseca la curva in due punti e non in uno soltanto.



[1]Negli *Elementi* non c'è distinzione fra *rette* e *segmenti*.

[2]Tratta da http://macosa.dima.unige.it/om/voci/tangente/tangente.htm.

La definizione III.2 degli *Elementi* può essere estesa alla classe delle curve convesse e chiuse, ma non ha certo carattere generale. Quando Apollonio di Perga (III-II sec. a.C.) dovrà definire, nelle sue *Coniche*, la tangente alla parabola si troverà costretto ad adattare la definizione euclidea aggiungendo la condizione che la retta tangente lasci tutta la curva da una parte. Anche in questo caso le cose funzionano solo per certe curve (ad esempio, l'asse della parabola viene ora escluso) perché, se si considerano le tangenti in B e in C nella figura (2) si vede subito che non soddisfano la definizione, mentre le rette passanti per A della figura (3) soddisfano la definizione ma non sono tangenti. Appurato che la definizione di tangente può essere molto insidiosa ed è subordinata a una buona definizione di curva, vediamo come viene affrontato il problema della tangente a una circonferenza negli *Elementi* di Euclide.

Le proposizioni che caratterizzano la tangente alla circonferenza sono la 16 e la 17 del libro III degli *Elementi*, dedicato allo studio del cerchio e delle sue proprietà. La proposizione 16 è un vero e proprio teorema di esistenza e unicità: si verifica, cioè che, dato un punto della circonferenza, la retta perpendicolare al diametro che passa per quel punto soddisfa – ed è l'unica a farlo – le condizioni di tangenza, cioè tocca la circonferenza in un solo punto e poi non la intereseca più[3]. La proposizione 17 è invece, in termini euclidei, un "problema", ovvero una costruzione geometrica che in questo caso fornisce una procedura per la determinazione della tangente a una circonferenza da un suo punto esterno.

Attività

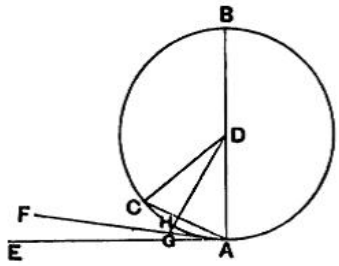
Le due dimostrazioni vengono qui presentate in traduzione italiana, ma senza che i passaggi logici siano giustificati sulla base di definizioni, postulati, nozioni comuni o sulle proposizioni che precedono la III.16: questa attività è proposta agli studenti durante il laboratorio[4].

Euclide, *Elementi*

> Proposizione III.16 *In un cerchio, una retta che sia tracciata perpendicolare al diametro partendo da un estremo di questo*
>
> 1. *cadrà esternamente al cerchio,* [I tesi]
> 2. *nessun'altra retta potrà interporsi nello spazio tra la retta e la circonferenza,* [II tesi]
> 3. *e l'angolo del semicerchio è maggiore, e quello che rimane fra la retta e la circonferenza minore, di ogni angolo acuto rettilineo.* [III tesi]

[3] Il teorema, in realtà dimostra anche che l'insieme degli angoli mistilinei non è archimedeo, ma la discussione su questo tema esula dagli scopi del laboratorio.

[4] Per poter svolgere l'attività è naturalmente necessario un testo di riferimento degli *Elementi*. Il testo in lingua inglese è facilmente reperibile in rete all'indirizzo `http://aleph0.clarku.edu/ djoyce/java/elements/toc.html`. Esistono anche due traduzioni italiane: *Gli Elementi*, a cura di A.Frajese e L.Maccioni, Torino, UTET 1970; *Euclide. Tutte le opere*, a cura di F.Acerbi, Milano, Bompiani 2007. La traduzione che abbiamo seguito è quella di Frajese-Maccioni.



Sia ABC un cerchio di centro D e diametro AB; dico che la retta, tracciata perpendicolarmente ad AB dal suo estremo A, cadrà esternamente al cerchio.

Supponiamo che la retta non sia esterna al cerchio, ma che cada internamente. Detta CA tale retta, si tracci la congiungente DC.

Poiché DA è uguale a DC, anche l'angolo $\widehat{DAC}$ è uguale all'angolo $\widehat{ACD}$. Dato che $\widehat{DAC}$ è retto, anche $\widehat{ACD}$ è retto e si avrebbe che nel triangolo ACD la somma dei due angoli $\widehat{DAC}$, $\widehat{ACD}$ sarebbe uguale a due retti: il che è impossibile.

Si deve allora concludere che la retta tracciata dal punto A perpendicolarmente a BA non cadrà internamente al cerchio. Similmente potremo dimostrare che non verrà a cadere neppure sulla circonferenza; dunque cadrà esternamente.

Cada essa come fa AE; dico ora che nessun'altra retta potrà interporsi fra la retta AE e la circonferenza CHA.

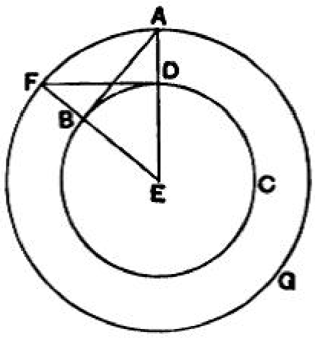
Infatti, se fosse possibile, venga un'altra retta ad interporsi, come la retta FA e dal punto D si conduca DG perpendicolare a FA. Poiché l'angolo $\widehat{AGD}$ è retto e l'angolo $\widehat{DAG}$ è minore di un retto, AD è maggiore di DG, ma DA è uguale a DH; quindi DH è in tal caso maggiore di DG, il che è impossibile. Dunque nello spazio fra la retta e la circonferenza non potrà interporsi nessuna altra retta.

Dico infine che l'angolo del semicerchio, ossia quello compreso dalla retta BA e dalla circonferenza CHA, è maggiore di ogni angolo acuto rettilineo, e che l'angolo restante, compreso dalla circonferenza CHA e dalla retta AE, è minore di ogni angolo acuto rettilineo, e che l'angolo restante, compreso dalla circonferenza CHA e dalla retta AE, è minore di ogni angolo acuto rettilineo. Infatti, se potesse esservi un angolo acuto rettilineo maggiore dell'angolo compreso dalla retta BA e dalla circonferenza CHA, e minore invece di quello compreso dalla circonferenza CHA e dalla retta AE, nello spazio fra CHA e la retta AE verrebbe ad interporsi una retta, la quale formerebbe un angolo rettilineo che sarebbe maggiore di quello compreso dalla retta BA e dalla circonferenza CHA, e minore invece dell'angolo compreso dalla circonferenza CHA e dalla retta AE. Ma nessuna retta può interporsi; non potrà quindi esservi alcun angolo acuto rettilineo che sia maggiore dell'angolo compreso dalla retta BA e dalla circonferenza CHA, né che sia minore dell'angolo compreso dalla circonferenza CHA e dalla retta CE.

Corollario alla Proposizione III.16 *E' da ciò evidente che la retta tracciata perpendicolarmente al diametro di un cerchio, da un estremo del diametri, è tangente al cerchio*

Proposizione III.17 *Condurre da un punto dato una linea retta che sia tangente a un cerchio dato.*

Siano A il punto dato, e BCD il cerchio dato; si deve dunque condurre dal punto A una linea retta che sia tangente a un cerchio BCD.



Si prenda il centro E del cerchio, si tracci la congiungente AE e con centro E e per raggio EA si descriva il cerchio AFG; da D si conduca DF perpendicolare ad EA e si traccino le congiungenti EF, AB; dico che AB è stata condotta dal punto A in modo da essere tangente al cerchio BCD.

Poiché difatti E è il centro dei cerchi BCD, AFG, risultano uguali i raggi EA ed EF, ED ed EB; quindi i due lati AE, EB sono uguali ai due lati FE, ED e comprendono un angolo comune, cioè l'angolo in E; la base DF è quindi uguale alla base AB, il triangolo DEF è uguale al triangolo BEA, e gli angoli rimanenti del primo sono uguali agli angoli rimanenti del secondo; perciò l'angolo $\widehat{EDF}$ è uguale all'angolo $\widehat{EBA}$. Ma $\widehat{EDF}$ è retto; quindi anche $\widehat{EBA}$ è retto.

Ora, EB è un raggio, e una retta tracciata perpendicolarmente a un diametro da un estremo di esso è tangente al cerchio; la retta AB è perciò tangente al cerchio BCD.

Dunque, dal punto dato A è stata condotta la linea retta AB tangente al cerchio dato BCD.

Come si è detto, Apollonio è costretto ad aggiungere una condizione alla definizione euclidea: nel caso della parabola, la retta tangente deve toccare la curva in un solo punto e non intersecarla più (e qui si ferma Euclide) e inoltre deve lasciare tutta la curva da una parte. Come Euclide, Apollonio dimostra prima una sorta di teorema di esistenza e unicità di una retta siffatta e poi indica un procedimento per costruirla basato su una singolare proprietà, che illustriamo in una forma semplificata. Considerata una parabola il cui asse coincida, ad esempio, con l'asse delle delle ordinate, si prenda un punto P della parabola e si tracci la tangente, che interseca l'asse delle ordinate in un punto T; il segmento P_1T, dove P_1 è il piede della perpendicolare condotta da P all'asse delle ordinate si dice *sottotangente*. Apollonio dimostra che la retta passante per i punti P e T è tangente alla parabola se e solo se la sottotangente è divisa in due parti uguali dal vertice della parabola[5]. La tangente alla parabola in un suo punto è dunque caratterizzata da una proprietà geometrica che consente di tracciarla in maniera semplice e immediata[6].

Abbandoniamo ora le curve e le tangenti così come erano concepite nella matematica greca e compiamo un salto temporale che ci trasporti ai primi del Seicento. Nel corso del Cinquecento è avvenuta la completa riappropriazione del *corpus* geometrico classico, che è stato pubblicato in edizioni a stampa – innovazione tecnologica della fine del XV secolo – che si sono succedute per tutto il secolo: *Elementi* di Euclide (principali edizioni nel 1482, 1505, 1516, 1533, 1572), *Coniche* di Apollonio (1537, 1566), opere di Archimede (1544, 1558, 1565), *Sferiche* di Menelao e Teodosio (1558), *Collezioni matematiche* di Pappo (1588) per non fare che qualche esempio. Alla fine del Cinquecento tutta la geometria greca conservata nei manoscritti è a disposizione della comunità scientifica, mentre del tutto diversa è la situazione in ambito algebrico: la disciplina si è profondamente trasformata evolvendo da algebra retorica ad algebra simbolica. I tempi sono ormai maturi perchè strumenti algebrici e geometrici possano trovare una nuova interpretazione.

3 La rivoluzione di Descartes (1596-1650)

3.1 Qualche notizia biografica

[7]

Nato nel 1596 nella regione della Touraine, René Descartes frequentò dal 1607 al 1614/15 il prestigioso Collegio di La Flèche della Compagnia di Gesù, per poi trasferirsi all'Università di Poitiers ove conseguì il baccellierato in diritto canonico e civile nel 1616. Arruolatosi nel reggimento francese dell'esercito calvinista olandese guidato da Maurizio di Nassau-Orange, di stanza nei Paesi Bassi, conobbe il noto scienziato Isaac Beeckman che lo incoraggiò a intraprendere gli studi scientifici. Dopo un periodo trascorso nell'esercito del duca Massilimiano di Baviera e un viaggio in Italia (1623-1625), si stabilì a Parigi nel 1625 ed entrò a far parte del circolo scientifico animato dal frate minimo Marin Mersenne. Nel 1628 si trasferì nei Paesi Bassi dove rimase per circa vent'anni e nel 1637, a Leida, fece pubblicare in maniera anonima il *Discours de la Méthode* con le tre appendici *Dioptrique, Météores e Géométrie*. Nel 1649 accettò l'invito della Regina Cristina di Svezia a recarsi a Stoccolma, dove morì di polmonite dopo qualche mese, nel febbraio 1650.

[5] In realtà le proposizioni apolloniane dimostrano un risultato più generale, ma per gli scopi prefissi è sufficiente anche questa proprietà, che peraltro può essere dimostrata dagli studenti in maniera semplice con strumenti della geometria analitica.

[6] Si rimanda al libretto di R.Bellè e P.D.Napolitani, *Le curve dei greci*, per un approfondimento del tema delle sezioni coniche nella matematica greca e per alcuni teoremi apolloniani, compreso quello relativo alla costruzione della tangente alla parabola in un suo punto.

[7] E. Lojacono, *Cartesio. La spiegazione del mondo fra scienza e metafisica*, Le Scienze, Collana *I grandi della scienza*, n.16 ottobre 2000.

3.2 Il *Discorso sul metodo*, 1637

Attorno al 1620 Descartes comincia a maturare l'idea di ricercare un *metodo universale*, non solo per risolvere tutti i problemi geometrici, ma per scoprire tutto ciò che è possibile. Il metodo che sta cercando Descartes, dunque, deve essere in grado di aumentare la conoscenza in qualsiasi dominio e contemporaneamente deve essere in grado di distinguere il vero dal falso.

Nel 1637 pubblica il *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison, et chercher la verité dans les sciences Plus la Dioptrique, les Meteores, et la Geometrie qui sont des essais de cete Méthode* (Discorso sul metodo per un retto uso della propria ragione e per la ricerca della verità nelle scienze più la diottrica, le meteore e la geometria che sono saggi di questo metodo) in cui spiega le caratteristiche essenziali del suo metodo e mostra come sia stato applicato nell'ambito dello studio dell'ottica (fenomeni di rifrazione e di diffrazione), dei fenomeni meteorologici (es. la formazione dell'arcobaleno) e della geometria.

R. Descartes, *Discours de la méthode*, 1637, Parte prima, *Considerazioni sulle scienze*

> Il buon senso è fra le cose del mondo quella più equamente distribuita, giacché ognuno pensa di esserne così ben dotato, che perfino quelli che sono più difficili da soddisfare riguardo a ogni altro bene non sogliono desiderarne più di quanto ne abbiano. E in questo non è verosimile che tutti si sbaglino; è la prova, piuttosto, che il potere di ben giudicare e di distinguere il vero dal falso, che è propriamente quel che si dice buon senso o ragione, è per natura uguale in tutti gli uomini; e quindi che la diversità delle nostre opinioni non dipende dal fatto che alcuni siano più ragionevoli di altri, ma soltanto da questo, che facciamo andare i nostri pensieri per strade diverse e non prestiamo attenzione alle stesse cose. Perché non basta avere buono l'ingegno; la cosa principale è usarlo bene.
>
> [...] Non intendo dunque insegnare qui il metodo che ciascuno deve seguire per ben giudicare la propria ragione, ma solo far vedere in che modo ho cercato di guidare la mia.
>
> [descrizione degli studi compiuti in collegio] Mi piacevano soprattutto le matematiche, per la certezza e l'evidenza delle loro ragioni; ma non ne avevo ancora riconosciuto il vero uso e, pensando che servissero solo alle arti meccaniche, mi stupivo del fatto che, pur essendo le loro fondamenta così sicure e solide, su di esse non si fosse costruito nulla di più alto.

Dunque è la matematica l'unica disciplina che, secondo Descartes, può essere assunta come modello sul quale plasmare il proprio metodo. Come vedremo, Descartes ritiene che l'analisi degli antichi e l'algebra dei moderni non siano esenti da pecche, ma un uso complementare dei due strumenti può rendere il metodo più efficace. Bisogna prima chiarire cosa intende Descartes per *analisi degli antichi* e *algebra dei moderni*.

La sintesi è la maniera con cui vengono dimostrate le proposizioni degli *Elementi* di Euclide: si parte da un'ipotesi e, attraverso una serie di deduzioni che si basano su definizioni, postulati, nozioni comuni ed eventuali proposizioni precedenti si arriva alla tesi. I matematici del Rinascimento si erano chiesti quale potesse essere il metodo col quale i geometri classici scoprivano i loro risultati, dato che l'approccio sintetico sembra più adatto a formalizzare un risultato entro rigidi canoni dimostrativi piuttosto che a scoprirlo. Nel 1588 vennero pubblicate le *Collezioni matematiche* (in latino) di Pappo di Alessandria (IV sec.). Nel settimo libro delle sue *Collezioni*, Pappo descrive il cosiddetto *tesoro dell'analisi*, una serie di testi geometrici dell'antichità – fra cui i *Dati* di Euclide – le cui proposizioni erano dimostrate con una tecnica del tutto diversa, l'analisi appunto. Che cosa fosse veramente l'analisi nell'antichità è una questione ancora aperta, su cui le ipotesi storiografiche non trovano un accordo, tuttavia è chiaro come venne intesa nel Rinascimento: si assume come vera la tesi della proposizione e si costruisce una catena deduttiva fino ad arrivare all'ipotesi. Una volta costruita questa catena (di condizioni necessarie e sufficienti), basta ripercorrerla all'indietro e si ottiene una dimostrazione per sintesi. La seconda fonte che cita Descartes è l'*algebra dei moderni* e il riferimento è a François Viète (1540-1603), ritenuto il padre dell'algebra simbolica.

R. Descartes, *Discours de la méthode*, 1637, Parte seconda, *Le principali regole del metodo*

> Non potendo dunque scegliere nessuno, le cui opinioni mi sembrassero preferibili a quelle di altri, mi trovai quasi costretto a cominciare a guidarmi da me. Ma come fa un uomo che cammina da solo nelle tenebre, decisi di procedere così lentamente e di adoperare in ogni cosa tanta prudenza da evitare almeno di cadere, pur avanzando assai poco. Non volli neppure cominciare a respingere del tutto nessuna delle opinioni che potevano essersi già introdotte fra le mie convinzioni senza passare attraverso la ragione, se non avessi prima impiegato il tempo necessario a disegnare il piano dell'opera a cui mi accingevo, e a cercare il vero metodo per arrivare a conoscere tutte le cose di cui la mia intelligenza fosse capace. Quando ero più giovane avevo studiato un poco, tra le parti della filosofia, la logica, e, delle matematiche, l'analisi geometrica e l'algebra, tre arti o scienze che sembrava dovessero contribuire in qualche modo al mio disegno. Ma esaminandole, mi accorsi che, per quanto riguarda la logica, i suoi sillogismi e la maggior parte dei suoi precetti servono, piuttosto che ad apprendere, a spiegare ad altri le cose che si sanno, o anche, come l'arte di Lullo, a parlare senza giudizio di quelle che si ignorano. E benché contenga di fatto numerosi precetti molto veri e molto buoni, a questi se ne mescolano altrettanti che sono nocivi o superflui, sicché è quasi altrettanto difficile districarne i primi quanto tirarne fuori una Diana o una Minerva da un blocco di marmo non ancora sbozzato. Per quanto mi riguarda poi l'analisi degli antichi e l'algebra dei moderni, oltre al fatto che si riferiscono solo a oggetti molto astratti e che non sembrano avere nessuna utilità, la prima è sempre così strettamente unita alla considerazione delle figure, che non può esercitare l'intelletto senza una gran fatica per l'immaginazione; e nell'altra ci si è resi schiavi di certe regole e formule tanto da farla diventare un arte confusa e oscura che impaccia l'ingegno invece che una scienza che l'accresce. Perciò pensai che fosse necessario cercare un altro metodo che, raccogliendo i pregi di queste tre, fosse immune dai loro difetti. [...]

La prima regola era di non accettare mai nulla per vero, senza conoscerlo evidentemente come tale: cioè di evitare scrupolosamente la precipitazione e la prevenzione; e di non comprendere nei miei giudizi niente più di quanto si fosse presentato alla mia ragione tanto chiaramente e distintamente da non lasciarmi nessuna occasione di dubitarne.

La seconda, di dividere ogni problema preso in esame in tante parti quanto fosse possibile e richiesto per risolverlo più agevolmente.

La terza, di condurre ordinatamente i miei pensieri cominciando dalle cose più semplici e più facili a conoscersi, per salire a poco a poco, come per gradi, sino alla conoscenza delle più complesse; supponendo altresì un ordine tra quelle che non si precedono naturalmente l'un l'altra.

E l'ultima, di fare in tutti i casi enumerazioni tanto perfette e rassegne tanto complete, da essere sicuro di non omettere nulla.[8] Quelle lunghe catene di ragionamenti, tutti semplici e facili, di cui sogliono servirsi i geometri per arrivare alle più difficili dimostrazioni, mi avevano indotto a immaginare che tutte le cose che possono rientrare nella conoscenza umana si seguono l'un l'altra allo stesso modo, e che non ce ne possono essere di così remote a cui alla fine non si arrivi, né di così nascoste da non poter essere scoperte; a patto semplicemente di astenersi dall'accettarne per vera qualcuna che non lo sia, e di mantenere sempre l'ordine richiesto per dedurre le une dalle altre. Né mi fu molto difficile la ricerca di quelle da cui bisognava cominciare: sapevo già infatti che dovevano essere le più semplici e facili a conoscersi; e considerando che di tutti coloro che hanno finora cercato le verità nelle scienze solo i matematici han potuto trovare qualche dimostrazione, e cioè delle ragioni certe ed evidenti, non dubitavo che avrei dovuto incominciare dalle stesse cose prese in esame da loro; anche se non speravo di ricavarne nessun'altra utilità se non quella di abituare la mia mente a nutrirsi di verità e a non contentarsi di false ragioni.

[...] Ma non volevo, con questo, mettermi a imparare tutte quelle scienze particolari che son dette comunemente matematiche; e vedendo che, sebbene i loro oggetti siano diversi, pure concordano tutte tra loro nel considerare soltanto le varie proporzioni o rapporti in essi racchiusi, pensai che fosse meglio esaminare soltanto queste proporzioni in generale [...]

3.3 La *Géométrie*

A differenza degli *Elementi* di Euclide, che si aprono con una lunga serie di definizioni, postulati ed assiomi, il primo dei tre libri della *Géométrie* è dedicato alla costruzione di un'algebra di segmenti, cioè a stabilire una corrispondenza fra operazioni aritmetiche e operazioni geometriche, punto di partenza per la risoluzione dei problemi geometrici piani.

[8] Queste regole solleveranno più di una critica. Leibniz, ad esempio, osserverà che i precetti del *Discorso sul metodo* prescrivono di fare quello che devi fare per ottenere quello che cerchi.

Mentre la definizione di addizione e sottrazione di segmenti è banale, più delicata è la definizione di prodotto fra segmenti. In un certo senso, anche negli *Elementi* di Euclide due segmenti possono venire "moltiplicati" ma il significato di questa operazione è la costruzione di un rettangolo avente quei segmenti come lati. Questo significa che la moltiplicazione fra segmenti non è un'operazione chiusa e ciò costituisce un serio ostacolo, che nessuno era riuscito a superare.

Nel passo che segue (in traduzione italiana[9]) Descartes definisce le operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione ed estrazione di radice risultino chiuse nell'insieme dei segmenti.

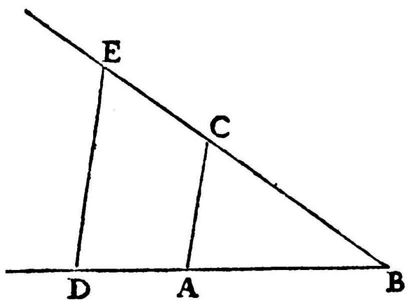
R. Descartes, *La Géométrie*, 1637, Libro primo

LIBRO PRIMO

PROBLEMI CHE SI POSSONO COSTRUIRE USANDO SOLTANTO CERCHI E LINEE RETTE

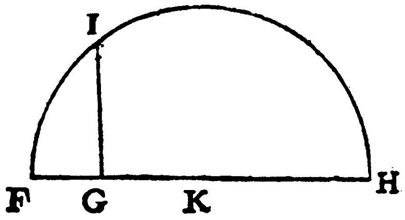
Tutti i Problemi di Geometria possono facilmente esser riportati a termini tali che poi per costruirli non c'è da conoscere che la lunghezza di alcune linee rette. E come tutta l'Aritmetica è costituita soltanto da quattro o cinque operazioni, cioè l'Addizione, la Sottrazione, la Moltiplicazione e l'Estrazione di radici, che può essere considerata una specie di Divisione, così in Geometria, a proposito delle linee che cerchiamo, per approntarle in modo che possan divenir note, non c'è altro da fare che aggiungere o togliere loro altre linee; oppure, data una linea che, per rapportarla nel miglior modo possibile ai numeri, chiamerò l'unità e che, in genere, può esser presa a piacere, poi, essendo date ancora altre due linee, trovarne una quarta che stia ad una di queste due, come l'unità sta all'altra, ciò che equivale alla Divisione; o infine, trovarne una, due o più medie proporzionali tra l'unità e qualche altra linea, ciò che equivale all'estrazione di radice quadrata o cubica, ecc. E, per esser più comprensibile, non esiterò ad introdurre questi termini dell'Aritmetica in Geometria. Sia, per esempio, AB l'unità, e occorra moltiplicare BD per BC: non debbo far altro che unire i punti A e C, tracciare poi DE parallela a CA: BE allora sarà il risultato di questa moltiplicazione.

Oppure, se occorre dividere BE per BD, dopo aver uniti i punti E e D, conduco AC parallela a DE e BC sarà il risultato di questa divisione.



[9] R.Descartes, *Opere scientifiche*, a cura di E.Lojacono, Torino, UTET 1983.

Oppure, se si deve estrarre la radice quadrata della retta GH aggiungo ad essa, lungo la stessa retta, la porzione FG uguale all'unità e dividendo FH in due parti uguali col punto K, dal centro K traccio il cerchio FIH e poi, innalzando dal punto G una retta fino ad G, perpedicolare a FH, ottengo GI, cioè la radice cercata.



Spesso non è però necessario tracciare in tal modo queste linee sulla carta, ma basta designarle con lettere, una per ciascuna di esse. Così, per aggiungere la linea BD a GH chiamo l'una a e l'altra b, e scrivo $a + b$; e $a - b$ per sottrarre b da a, ab per moltiplicare l'una con l'altra e $\frac{a}{b}$ per dividere a per b; e aa o a^2 per moltiplicare a per se stessa; e a^3 per moltiplicarla ancora una volta per a e così all'infinito; e $\sqrt{a^2 + b^2}$ per estrarre la radice quadrata da $a^2 + b^2$ e $\sqrt{C\, a^3 - b^3 + abb}$ per estrarre la radice cubica da $a^3 - b^3 + abb$ e così per tutti gli altri casi. A questo proposito debbo notare che con a^2 o b^3 o espressioni simili intendo in genere soltanto linee semplici, anche se le chiamo, per servirmi dei termini dell'algebra, quadrati, cubi, ecc.

Con l'introduzione del segmento unitario, Descartes è riuscito a superare il problema dimensionale legato, ad esempio, alla "moltiplicazione" fra segmenti, che non viene più rappresentata da un rettangolo ma da un segmento[10]. Questa perfetta corrispondenza fra operazioni aritmetiche e operazioni geometriche, permette a Descartes di risolvere tutti i problemi che si possono "costruire usando soltanto cerchi e linee rette", riducendoli a equazioni di primo e secondo grado. Dopo questa introduzione, infatti, Descartes passa alla costruzione geometrica delle radici (positive) delle equazioni quadratiche per poi cimentarsi con un più complesso problema noto come "Problema di Pappo". Nel secondo libro della *Géométrie*, Descartes affronta invece il problema della determinazione della retta normale a una curva osservando che il metodo proposto è del tutto generale qualora si conosca l'equazione (polinomiale) della curva.

R. Descartes, *La Géométrie*, 1637, Libro secondo

Ora, per il solo fatto che, come sopra è stato spiegato, conosciamo la relazione che intercorre tra tutti i punti di una curva e tutti quelli di una retta, è facile trovare anche la relazione sussistente tra detti punti, tutti gli altri e linee date. Da ciò possiamo conoscere i diametri, gli assi,

[10]In realtà il problema, più che superato, è piuttosto evitato, ma non è il caso di approfondire in questo luogo tale questione.

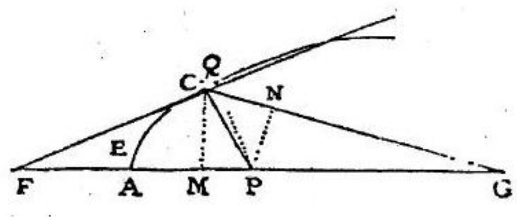
i centri, altre linee o punti, con cui ogni curva avrà qualche relazione più particolare o più semplice che con altri, e immaginare così diversi modi per descrivere tali curve, scegliendo tra essi i più facili. Anzi, in questo solo modo si può anche trovare quasi tutto ciò che può essere determinato relativamente alla grandezza dello spazio che tali curve comprendono e non occorre che di queste cose tratti ancora più ampiamente. Infine, tutte le altre proprietà, che possiamo attribuire alle curve, dipendono soltanto dall'ampiezza degli angoli che tali curve formano con qualche altra linea, Quando però possiamo tracciare rette che intersechino tale curve ad angoli retti nei punti in cui esse sono incontrate dalle linee con cui formano gli angoli che intendiamo misurare o – ciò che qui considero cosa identica – rette che taglino le loro tangenti, non è più difficile determinare l'ampiezza di questi angoli di quel che sarebbe se essi fossero compresi tra due linee rette. Perciò, quando avrò dato in generale il modo di condurre linee rette che incontrino le curve formando angoli retti in uno qualsiasi dei loro punti, stimerò aver messo in questo trattato tutto quel che si richiede per la conoscenza di tali linee. Oso anzi dire che questo è il problema più utile e generale, non solo tra tutti quelli che conosco, ma anche tra tutti quelli che in Geometria ho sempre desiderato conoscere.

Nel passo che segue, Descartes descrive il metodo per la determinazione della normale

---

R. Descartes, *La Géométrie*, 1637, Libro secondo

Sia CE la curva e, per il punto C occorra tracciare una retta che formi con essa angoli retti. Suppongo tutto già compiuto, e assumo CP come la linea cercata, linea che prolungo fino a P dove incontra la retta GA, che suppongo esser quella cui debbono riferirsi tutti i punti della linea CE; così, ponendo $MA \propto y$, $CM \propto x$, otterrò una certa equazione che esprime la relazione che sussiste tra x e y



Poi prendo $PC \propto s$ e $PA \propto v$ o $PM \propto v-y$ e, essendo PMC un triangolo rettangolo, ss che è il quadrato della base, uaguale a $xx + vv - 2vy + yy$ cioè ai quadrati dei due lati; quindi

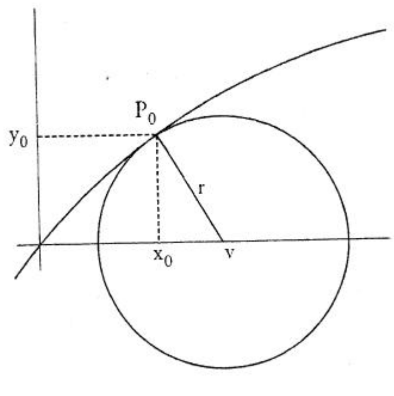
$$x \propto \sqrt{ss - vv + 2vy - yy} \qquad y \propto v + \sqrt{ss - xx}$$

e, mediante quest'equazione, elimino dall'altra equazione, che esprime la relazione tra tutti i punti della curva CE e quelli della retta GA, una delle quantità indeterminate, x o y; operazione assai facile da eseguirsi, mettendo dovunque $\sqrt{ss - vv + 2vy - yy}$ al posto di x, e il quadrato di questa somma in luogo di xx e il suo cubo in luogo di x^3; e così di seguito, se è x che intendiamo eliminare. Se invece intendessimo eliminare y, metteremmo al suo posto $v + \sqrt{ss - xx}$ e il quadrato o il cubo ecc. di questa somma, in luogo di yy o di y^3 ecc. In tal modo, dopo ciò, rimane sempre una equazione in cui non si dà che una sola quantità indeterminata, x o y.

Rivediamo il passo precedente adottando un simbolismo e un linguaggio moderni; si noti inoltre che nella *Géométrie* non compaiono i cosiddetti assi cartesiani ortogonali, ma nell'esempio che segue vengono ugualmente introdotti per facilitarne la comprensione. Allo stesso modo, anche se Descartes "inverte", rispetto all'uso corrente, le ascisse x con le ordinate y; per comodità ci adeguiamo all'uso attuale. Data una curva e un suo punto P_0 di coordinate $(x_0,\ y_0)$, si vuole trovare la retta normale alla curva in P_0. Tra le infinite circonferenze tangenti alla curva in P_0, si consideri la circonferenza con il centro che giace su uno degli assi:

$$y^2 + (x - v)^2 = r^2$$

Si devono dunque determinare i parametri v e r dell'equazione della circonferenza.



Se $F(x, y) = 0$ è l'equazione polinomiale della curva, il sistema

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ y^2 + (x - v)^2 = r^2 \end{cases}$$

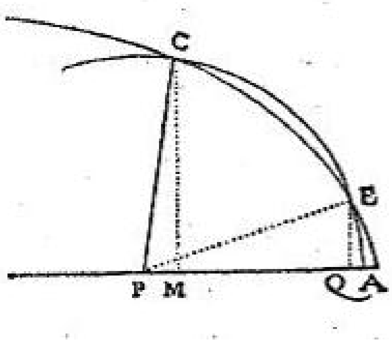
rappresenta l'intersezione tra la curva e la circonferenza. Se si elimina la variabile y si ottiene un polinomio in x, che indichiamo con $Q(x)$[11]. Osserviamo che, se l'equazione della curva è di grado n, il polinomio risultante $Q(x)$ è di grado $2n$. Quale caratteristica dovrà avere il polinomio $Q(x)$?

Continuiamo a leggere Descartes.

---

[11] In generale, il problema di eliminare una variabile è meno semplice di quanto sembri. Per approfondire l'argomento si veda

`http://php.math.unifi.it/archimede/archimede/mini_calcolo/schede/07.pdf`



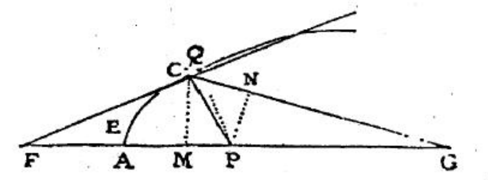
Ora, dopo aver trovato tale equazione [...], poiché il punto C è dato, dobbiamo usarla per trovare v o s, che determinano il punto P richiesto. A tal fine, bisogna considerare che se questo punto P è come lo desideriamo, il cerchio di cui sarà centro e che passerà per C, vi toccherà la curva CE senza intersecarla. Al contrario, se questo punto P è un po' più vicino o un po' più lontanodal punto A di quel che deve essere, il cerchio intersecherà la curva, e non solo nel punto C, ma necessariamente anche in qualche altro. Inoltre, dobbiamo pure considerare che quando tale cerchio interseca la curva CE, l'equazione con cui cerchiamo la quantità x o y o qualche altra simile – supponendo note PA e PC – ammette necessariamente due radici che non sono uguali [...] Da ciò segue evidentemente che il valore di x o di y o di qualsiasi altra ipotetica quantità, sarà doppio in questa equazione, cioè che vi saranno due radici diverse tra loro delle quali, se è x la quantità cercata, saranno l'una CM e l'altra EQ, mentre se è y, l'una MA e l'altra QA; e così per le altre. E' pur vero che se il punto E non si trova sulla stessa parte della curva in cui giace il punto C, una sola radice sarà vera, mentre l'altra sarà dalla parte opposta o inferiore a zero; al contrario però tanto più questi due punti, C ed E, sono vicini tra loro, tanto minore è la differenza che sussiste fra queste radici; infine, se questi punti giacciono ambedue in uno (cioè se il cerchio che passa per C vi tocca la curva senza intersecarla), queste radici saranno assolutamente uguali. Inoltre, dobbiamo considerare che un'Equazione in cui si danno due radici uguali ha necessariamente la stessa forma che si ottiene se si moltiplica per se stessa la differenza fra la quantità incognita e la quantità nota che le è uguale e, dopo ciò, se quest'ultima somma è di grado inferiore alla precedente, la si moltiplica per un'altra somma che abbia tanti gradi quanti mancano alla precedente, in modo che preso separatamente, ciascun termine dell'una corrisponda a quello dell'altra.

La condizione di tangenza del cerchio dunque, equivale, dal punto di vista algebrico, a richiedere che il polinomio $Q(x)$ di grado $2n$ abbia una radice doppia in x_0, cioè sia della forma

$$Q(x) = (x - x_0)^2 R(x)$$

dove $R(x)$ è un polinomio di grado $2n-2$. Applicando il *principio di identità dei polinomi*, cioè eguagliando ordinatamente i coefficienti[12], otteniamo $2n+1$ equazioni in $2n+1$ incognite, rappresentate dai $2n-1$ coefficienti di $R(x)$ e dai due parametri v e r. Si noti che la risoluzione di questo sistema, potenzialmente molto complesso, serve però a determinare solo i parametri v e r che definiscono univocamente il cerchio tangente.

Nell'ultimo passo che viene proposto, Descartes enfatizza la potenza del proprio metodo:

> Perciò, se in virtù di questa espressione prendiamo la linea AP uguale a v, le cui quantità son tutte note, e se tracciamo dal punto P, così trovato, una retta verso C, questa interseca in tal punto ad angoli retti la curva CE, ciò che si doveva fare
>
> 
>
>
> Non vedo nulla che impedisca che si estenda questo problema, nella stessa maniera, a tutte le linee curve che sottostanno a qualche calcolo Geometrico.

Il metodo della normale, osserva Descartes, può applicarsi teoricamente a tutte le curve "che sottostanno a qualche calcolo Geometrico", cioè alle curve algebriche. Siamo dunque di fronte al primo vero metodo generale, ma, contrariamente a quanto afferma Descartes, gli ostacoli che si frappongono fra l'enunciazione teorica e l'applicazione pratica non sono di poco conto.

Cominciamo a rendercene conto applicando il metodo a una parabola di equazione $y = mx^2$; vogliamo determinare la tangente nel punto $P_0(x_0, y_0)$. Intersechiamo la parabola con la circonferenza

$$\begin{cases} y = mx^2 \\ y^2 + (x-v)^2 = r^2 \end{cases}$$

eliminando la y otteniamo il polinomio $Q(x) = m^2x^4 + x^2 - 2vx + v^2 - r^2$ al quale imponiamo che abbia una radice doppia, cioè che sia della forma

$$(x - x_0)^2(ax^2 + bx + c)$$

[12] Se due polinomi $P(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n$ e $T(x) = b_o + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + \ldots + b_nx^n$ sono uguali per ogni valore di x, allora i coefficienti sono ordinatamente uguali, cioè $a_i = b_i$ per $i = 0, 1, 2 \ldots n$. Si può vedere una semplice dimostrazione in
`http://php.math.unifi.it/archimede/archimede/mini_calcolo/schede/05.pdf`

Sviluppiamo quest'espressione ed eguagliamo i polinomi ottenuti

$$m^2x^4+x^2-2vx+v^2-r^2 = ax^4+(b-2ax_0)x^3+(c-2bx_0+ax_0^2)x^2+(bx_0^2-2cx_0)x+cx_0^2$$

Applicando il principio di identità dei polinomi e facendo un po' di calcoli si ottiene $a = m^2$, $b = 2m^2x_0$, $c = 1 + 3m^2x_0^2$, $v = x_0 + 2m^2x_0^3$, $r^2 = m^2x_0^4 + 4m^4x_0^6$. La circonferenza tangente ha dunque centro di coordinate $(x_0 + 2m^2x_0^3,\ 0)$ e raggio $\sqrt{m^2x_0^4 + 4m^4x_0^6}$.

A questo punto, per ottenere il risultato dimostrato da Apollonio sulla tangente alla parabola, ovvero per constatare che la sottotangente è divisa in due parti uguali dal vertice della parabola, bisognerebbe aggiungere qualche considerazione geometrica. Dal momento che gli studenti usano con padronanza gli strumenti della geometria analitica, si può anche procedere per questa via. Considerando la retta normale che passa per il centro della circonferenza e per il punto P_0, si trova facilmente che l'equazione della retta tangente in P_0 alla parabola di equazione $y = mx^2$ è $y = 2mx_0(x - x_0) + y_0$.

Applichiamo il metodo a una curva appena più complessa, usando anche questa volta anche gli strumenti della geometria analitica. Data l'equazione della parabola semicubica

$$y^2 = x^3$$

si vuole determinare la tangente nel punto $P_0 = (x_0, y_0)$.

Si consideri la circonferenza con centro nel punto v sull'asse delle ascisse e raggio r, dunque di equazione:

$$y^2 + (x - v)^2 = r^2$$

Il metodo elaborato da Descartes impone che la circonferenza abbia un'intersezione doppia in P_0 con la parabola semicubica. Bisogna dunque determinare l'intersezione delle due curve:

$$\begin{cases} y^2 = x^3 \\ y^2 + (x - v)^2 = r^2 \end{cases}$$

e imporre che l'equazione risultante

$$Q(x) = x^3 + x^2 - 2xv + v^2 - r^2 = 0$$

abbia due radici coincidenti per $x = x_0$, cioè sia del tipo

$$Q(x) = (x - x_0)^2R(x)$$

dove $R(x)$ è un polinomio di primo grado e avrà la forma $ax + b$. In altre parole i coefficienti del polinomio $x^3 + x^2 - 2xv + v^2 - r^2$ devono essere ordinatamente uguali a quelli del polinomio $ax^3 + x^2(b - 2ax_0) + x(ax_0^2 - 2bx_0) + bx_0^2$,

Per il *principio di identità dei polinomi*, si avrà dunque:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2ax_0 = 1 \\ ax_0^2 - 2bx_0 = -2v \\ bx_0^2 = v^2 - r^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 + 2ax_0 \\ v = \frac{3x_0^2+2x_0}{2} \\ r^2 = \frac{x_0^3}{4}(9x_0 + 4) \end{cases}$$

I parametri v e r consentono di determinare la circonferenza tangente, che ha equazione

$$y^2 + (x - \frac{3x_0^2 + 2x_0}{2})^2 = \frac{x_0^3}{4}(9x_0 + 4)$$

e centro nel punto C di coordinate $(\frac{3x_0^2+2x_0}{2}, 0)$.

La tangente alla parabola semicubica nel punto $P(x_0, y_0)$ è dunque perpendicolare al raggio PC.

Facendo qualche calcolo, si vede che il coefficiente angolare della retta passante per i punti $P(x_0, y_0)$ e $C(\frac{3x_0^2+2x_0}{2}, 0)$ è pari a $-\frac{2}{3}\frac{y_0}{x_0^2}$. Il coefficiente angolare della retta tangente alla parabola cubica in $P(x_0, y_0)$ sarà dunque $m = \frac{3}{2}\frac{x_0^2}{y_0}$ e l'equazione della retta:

$$y - y_0 = \frac{3}{2}\frac{x_0^2}{y_0}(x - x_0)$$

Questi due esempi dovrebbero essere sufficienti a far capire come, anche in caso di equazioni di grado non elevato, i calcoli da eseguirsi sono piuttosto laboriosi e questo è un limite del metodo che viene immediatamente percepito.

4 I metodi algebrici post-cartesiani

4.1 Il metodo di Florimond De Beaune

Il metodo cartesiano si impone subito per la sua generalità ed efficacia, ma è chiaro che la risoluzione del sistema di $2n + 1$ equazioni in $2n + 1$ incognite richiede molti calcoli, la maggior parte dei quali sono, come si è detto, inutili. Si immagini poi cosa succederebbe se l'equazione della curva contenesse dei radicali o delle frazioni: bisognerebbe elevare e alzare ancora di più il grado del polinomio, con la conseguenza di aumentare le dimensioni del sistema. Senza contare che il metodo, per quanto generale, vale solo per le curve algebriche e nulla può fare con curve trascendenti.

Alcuni commentatori indirizzarono i loro sforzi a migliorare il metodo della normale, intendendo con questo alleggerire i calcoli senza modificare l'apparato concettuale elaborato da Descartes.

Nel 1649 Frans van Schooten pubblicò un'edizione della *Géométrie* in cui era inserito il commento di Florimond de Beaune, che suggeriva di intersecare la curva di n-simo grado $F(x, y) = 0$ non con una circonferenza ma con una retta, in modo da abbassare il grado del polinomio intersezione $Q(x)$.

Nel metodo proposto da de Beaune, bisogna quindi mettere a sistema l'equazione della curva di grado n con quella di una retta passante per il punto $P_0(x_0, y_0)$ e, se si elimina la variabile y, si ottiene un polinomio $Q(x)$ di grado n (e non più $2n$ come prima). A questo punto si procede seguendo Descartes e quindi imponendo a $Q(x)$ l'esistenza di una radice doppia in x_0, ma in questo caso il principio di identità dei polinomi conduce a un sistema più semplice, costituito da $n + 1$ equazioni in $n + 1$ incognite.

Se si considera una curva di secondo grado, anche il polinomio $Q(x)$ sarà di secondo grado e imporre la condizione che abbia una radice doppia significa chiedere che il discriminante dell'equazione sia nullo. Questo caso particolare del metodo di de Beaune (la curva è di grado $n = 2$) è proprio il metodo delle tangenti che viene generalmente insegnato nella scuola secondaria nell'ambito della geometria analitica: il metodo di de Beaune ne rappresenta una generalizzazione per curve algebriche di grado n.

Attività

Ritrovare la tangente alla parabola semicubica di equazione $y^2 = x^3$ con il metodo di De Beaune.

4.2 Il metodo di Jan Hudde

Mentre de Beaune si era concentrato sulla possibilità di abbassare il grado di $Q(x)$ e quindi la dimensione del sistema, un altro commentatore cartesiano, Jan Hudde, pubblicava nell'edizione commentata della *Géométrie* edita in latino nel 1659, un metodo che evitava l'introduzione del polinomio ausiliario $R(x)$ grazie a questo teorema

---

Johannis Huddenii, *Epistula secunda de maximis et minimis*

Theorema

Si in æquatione duæ radices sunt æquales, atque ipsa multiplicetur per Arithmeticam Progressionem, quam libuerit; nimirum, primus terminus aequationis per primum terminum Progressionis, secundus terminus æquationis per secundum terminum Progressionis & sic deinceps. Dico Productum fore aequationem, in qua una dictarum radicum reperietur.[13]

Come de Beaune, Hudde arrivava alla determinazione del polinomio $Q(x)$ di grado n al quale si doveva imporre di avere una radice doppia in x_0, ma a questo punto osservava che $Q(x)$ aveva una radice doppia in x_0 se e solo se $Q(x_0) = 0$ e $Q'(x_0) = 0$,

[13] "Se un'equazione ha due radici uguali, e si moltipliva tale equazione per una qualsiasi progressione aritmetica – ovvero, il primo termine dell'equazione per il primo termine della progressione, il secondo termine dell'equazione per il secondo termine della progressione, e così via, allora questo prodotto sarà un'equazione che ammette ancora quella radice come radice semplice".

dove $Q'(x)$ rappresenta il polinomio $Q(x)$ i cui termini sono stati ordinatamente moltiplicati per una progressione aritmetica. Se si sceglie una progressione aritmetica opportuna, ad esempio la progressione aritmetica di ragione 1 dei numeri interi positivi 0, 1, 2, 3, 4, 5, etc. dovremo verificare che se l'equazione

$$Q(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n = 0$$

ha come radice x_0 (il che è ovvio, visto che $P_0(x_0, y_0)$ appartiene alla curva) anche l'equazione

$$Q'(X) = 0 \cdot a_0 + 1 \cdot a_1X + 2 \cdot a_2X^2 + \ldots + n - 1 \cdot a_{n-1}X^{n-1} + n \cdot a_nX^n = 0$$

ovvero

$$Q'(X) = a_1 + 2 \cdot a_2X + \ldots + n - 1 \cdot a_{n-2}X^{n-1} + n \cdot a_nX^{n-1} = 0$$

ha come radice x_0.

Consideriamo la parabola di equazione $py = x^2$.

$$\begin{cases} py = x^2 \\ y = y_0 + m(x - x_0) \end{cases}$$

Si ottiene

$$Q(x_0) = x_0^2 - pmx_0 + p(mx_0 - y_0) = 0$$

e

$$Q'(x_0) = 2x_0^2 - pmx_0 = 0$$

da cui si ricava $m = 2x_0/p$

L'equazione della retta tangente alla parabola nel punto $(x_0,\, y_0)$ è dunque

$$y = y_0 + \frac{2x_0(x - x_0)}{p}$$

Con il metodo di Hudde si limitano i calcoli a una sola equazione, tuttavia occorre ancora mettere a sistema la retta con la curva e talvolta i calcoli possono diventare pesanti. Siamo ancora di fronte a un *metodo* e non a una *regola*, o algoritmo.

Attività

Per acquisire dimestichezza con questo metodo, ritrovare ancora una volta la tangente alla parabola semicubica di equazione $y^2 = x^3$.

4.3 La regola di Hudde-Sluse

Nel 1659 Jan Hudde scrive una lettera a Frans van Schooten in cui spiega come è riuscito ad automatizzare completamente il "metodo" trasformandolo in una "regola". Hudde prega van Schooten di non divulgare la sua scoperta[14] che verrà pubblicata solo nel *Journal literaire de la Haye* nel 1713:

Jan Hudde a Frans von Schooten (1659, pubbl. 1713)

Rangez tous le termes de l'équation qui exprime la nature de la courbe, de maniére qu'ils soient =0 et ôtez de cette équation toutes les fractions qui ont x ou y dans leurs diviseurs. Multipliez le terme dans lequel y a le plus de dimensions par un nombre pris à discrétion, ou même par 0, et multipliez le terme dans lequel y a une dimension de moins, par le même nombre diminué d'une unité, et continuez de même à l'égard des autres termes de l'équation. De même multipliez par un nombre pris à volonté ou par 0 le terme où x a les plus des dimensions: le terme où x a une dimension de moins, doit être multiplié par le même nombre moins l'unité, et ainsi des autres. Quand on divise le premier de ces produits par le second, le quotient multiplié par $-x$ est AC. [...][15]

Example

Soit l'équation qui exprime la nature de la courbe

$$ay^3 + xy^3 + b^2y^2 - x^2y^2 - \frac{x^3}{2a}y^2 + 2x^4 - 4ab^3 = 0$$

1.Multipl. par	1	$+1$	0	0	0	-1	-2	-2
2.Multipl. par	0	$+1$	0	$+2$	$+3$		$+4$	0
1.Produit	ay^3	xy^3					$-4x^4$	$8ab^3$
2.Produit		xy^3		$-2x^2y^2$	$-\frac{3x^2}{2a}y^2$		$+8x^4$	

par conseq.

$$AC = \frac{ay^3 + xy^3 - 4x^4 + 8ab^3}{+xy^3 - 2x^2y^2 - \frac{3x^3}{2a}y^2 + 8x^4} \text{ par } -x$$

Qualche anno dopo, la medesima regola verrà comunicata da René François de Sluse al segretario della Royal Society di Londra, Henry Oldenburg

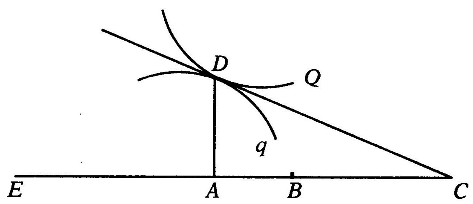
---

René-François de Sluse a Henry Oldenburg, 1673

[14] "Je vous prie, Monsieur, que ce que je vous envoie reste secret, et que vous ne disiez pas, même à qui que ce puisse être, qu'on à trouvé rien de sembable."

[15] Ordinate tutti i termini dell'equazione che esprime la natura della curva in modo che siano =0 e togliete tutte le frazioni che abbiano x o y nei loro denominatori. Moltiplicate il termine in cui y ha potenza massima per un numero arbitrario, o anche per 0, moltiplicate il termine in cui y ha una dimensione in meno per il numero precedente diminuito di un'unità e continuate in questo modo per tutti gli altri termini dell'equazione. Allo stesso modo, moltiplicate per un numero arbitrario o per 0 il termine in cui x figura alla potenza massima: il termine in cui x figura alla potenza massima diminuita di uno deve essere moltiplicato per il numero precedente diminuito di uno e così di seguito. Quando si divide [la somma] dei primi prodotti per la [la somma] dei secondi, il quoziente, moltiplicato per $-x$ rappresenterà il segmento AC ovvero la sottotangente.

Ti invio il mio metodo per tracciare le tangenti a curve geometriche qualsiasi [...] mi è sembrato breve e facile tanto da potersi insegnare addirittura a un bambino e si può estendere senza alcun lavoro di calcolo a tutte le curve in generale [...] Sia data dunque una curva qualunque DQ i cui punti si riferiscono tutti ad una qualunque retta data EAB mediante una retta DA: ovvero EAB sia il diametro o qualunque altra cosa o ancora siano contemporaneamente date altre linee le quali (o loro potenze) entrino nell'equazione: poco importa. Nell'equazione analitica, per facilità di esposizione, si chiami sempre DA v, BA y e si indichino invece con consonanti EB e le altre quantità date. Si supponga allora condotta DC, che è tangente alla curva in D e che, prolugata se necessario, incontra EB nel punto C e inoltre si chiami sempre CA a. Questa sarà la regola generale[16] per trovare AC, ossia a:



1. Espunte dall'equazione tutti i termini nei quali non compare né y né v, si pongano da un lato tutti quelli che contengono la y e dall'altro tutti quelli contenenti la v, con i loro segni + e -. Per semplicità chiameremo quest'ultimo lato destro e il primo lato sinistro.
2. Nel lato destro si premetta ad ogni parte l'esponente della potenza che in essa ha la v, ossia, ciò che è lo stesso, si moltiplichi ogni termine per l'esponente della potenza alla quale è elevata la v
3. Si faccia lo stesso nel lato sinistro, e cioè si moltiplichi ogni termine per l'esponente della potenza della y. Ma in più in ogni termine si cambi una y in a.

Dico che l'equazione così rimaneggiata fornisce il modo di condurre la tangente al punto dato D.

Vediamo un esempio concreto. Data la curva di equazione

$$3x^3 - 2y^2 + xy - 2 = 0$$

Passo 1.

$3x^3 + xy = 2y^2 - xy$

Si noti infatti che, a chiarimento del punto 1., Sluse aggiunge che i termini in cui compare sia la x che la y devono essere riportati in ambedue i lati coi segni opportuni.

Passi 2, 3.

$9tx^2 + ty = 4y^2 - xy$

[16]Ai lettori più avvertiti non sarà sfuggito che questa regola fornisce l'espressione della sottotangente $t = -y\frac{f_y}{f_x}$ per la curva definita dall'equazione polinomiale $f(x, y) = 0$.

La sottotangente sarà allora data da

$$t = \frac{4y^2 - xy}{9x^2 + y}$$

In particolare, se il punto ha coordinate (1,1) si ottiene $t = 3/10$ e quindi la retta tangente in (1,1) ha equazione $3y = 10x - 7$.

Attività

Determinare la retta tangente alla parabola semicubica con i metodi di Hudde e de Sluse.

4.4 Considerazioni conclusive sui metodi algebrici cartesiani

Introducendo il nuovo concetto di curva-equazione, Descartes trova un metodo generale per la determinazione della tangente a una curva algebrica. Si tratta tuttavia di un metodo che richiede molti calcoli ed è ancora saldamente ancorato all'interpretazione geometrica della tangente, ed è subordinato alla determinazione di un parametro squisitamente geometrico, la sottotangente.

Le variazioni che vengono proposte cercano di migliorare l'aspetto del calcolo:

- De Beaune sostituisce la circonferenza da intersecare con la curva con una retta e così facendo dimezza il grado dell'equazione risultante;
- Hudde elimina il polinomio ausiliario e concentra la sua attenzione sull'equazione "derivata";
- Lo stesso Hudde e in seguito De Sluse, infine, arrivano a trasformare il metodo in una regola avulsa da interpretazioni geometriche. In altre parole, la determinazione della sottotangente si ottiene manipolando opportunamente i coefficienti dell'equazione in maniera puramente formale

Nonostante questi progressi, il metodo/regola rimane di difficile applicazione nei casi in cui le equazioni presentino radici o frazioni. E non funziona per le curve non-algebriche che pur erano oggetto di studio da parte dei matematici.

Occorre escogitare un metodo più efficace, che non si arresti davanti a radici e frazioni e che sia veramente generale. La parziale risposta a questo problema verrà data da Gottfried Wilhelm Leibniz nel 1684 con l'invenzione del calcolo dei differenziali, che risolve completamente il problema delle tangenti in ambito algebrico e riduce il problema di trovare la tangente a una curva trascendente al problema di determinare il differenziale di questa curva.

Prima di affrontare la memoria di Leibniz sarà opportuno illustrare il metodo proposto da Pierre de Fermat, potenzialmente più efficace di quelli cartesiani, ma comunque incapace di affrontare efficacemente espressioni con radicali o con frazioni.

5 Il metodo dei massimi e minimi di Fermat (1601-1665)

5.1 Qualche notizia biografica

Pierre de Fermat nasce nel 1601 a Beaumont-de-Lomagne, vicino a Tolosa in una famiglia benestante. Attorno agli anni Venti trascorre un periodo a Bordeaux, dove conosce uno studioso che gli mette a disposizione la sua biblioteca, nella quale Fermat trova molti manoscritti di François Viète (1540-1603), padre dell'algebra moderna. Nel 1631 si laurea in diritto presso l'Università di Orléans. Compra la carica di Consigliere nel Parlamento di Tolosa ed inizia la sua carriera come giureconsulto. A Tolosa stringe amicizia con Pierre de Carcavi, anche lui Consigliere e appassionato di matematica. Nel 1636, grazie ai buoni uffici di Pierre de Carcavi, che si è trasferito a Parigi, Fermat entra in contatto epistolare con P. Marin Mersenne e con la sua rete di corrispondenti (Descartes, Roberval etc.) Nel 1637 manda a Parigi la memoria *Methodus ad disquierendam maximam et minimam et de tangentibus linearum curvarum* che presenta un originale approccio geometrico al problema delle tangenti, diverso da quello cartesiano che viene pubblicato quasi contemporaneamente. Dal 1654 Inizia una serrata corrispondenza con Blaise Pascal su problemi di tipo probabilistico. Nel 1655 muore a Castres, vicino a Tolosa.

Fermat, così come Descartes, non è un matematico di professione, ma un dilettante che può permettersi di fare ricerca sui temi che lo interessano. Durante la propria vita non pubblica nulla e solo nel 1679 il figlio Clément-Samuel darà alle stampe il volume *Varia opera mathematica* che comprende una selezione dell'epistolario e alcuni scritti di algebra e geometria. Solo negli anni 1891-1912 verrà approntata un'edizione in quattro tomi delle opere (ulteriormente arricchita nel 1922) che finalmente mette a disposizione degli studiosi tutti gli scritti di Fermat che sono sopravvissuti.

5.2 Il (secondo) metodo dei massimi e minimi

In queste pagine esamineremo la memoria che Fermat spedì a Mersenne alla fine del 1637 perché la facesse avere a Descartes, che la ricevette in effetti nel gennaio 1638. La prima parte riguarda un metodo per determinare i massimi e minimi e rappresenta una variante di un procedimento elaborato da Fermat diverso tempo addietro. Tale procedimento è oggi comunemente noto come *secondo metodo dei massimi e minimi*[17].

5.2.1 *Methodus ad disquierendam maximam et minimam*

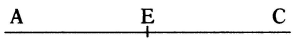
Nel passo che segue, nella successiva traduzione italiana e nell'interpretazione in linguaggio moderno, sono stati inseriti dei numeri tra parentesi quadrata, allo scopo di riconoscere e individuare i passaggi salienti del procedimento.

[17] Per una descrizione del primo metodo, si rimanda a E.Giusti, *Dalla* Géométrie *al calcolo: il problema delle tangenti e le origini del calcolo infinitesimale*, in *Storia della scienza*, Roma, Istituto dell'Enciclopedia Treccani, volume V, pp.453-465.

P. de Fermat, *Methodus ad disquierendam maximam et minimam*, 1637, in Fermat, *Œuvres*, I, pp. 133-134

Omnis de inventione maximae et minimae doctrina duabus positionibus in notis innititur et hac unica praeceptione: statuatur quilibet quaestionis terminus esse A (sive planum, sive solidum aut longitudo, prout proposito satisfieri par est) et, inventa maxima aut minima in terminis sub A [1], gradu ut libet, involutis, ponatur rursus idem qui prius terminus esse $A+E$, iterumque inveniatur maxima aut minima in terminis sub A et E gradibus, ut libet, coefficientibus [2]. Adæquentur, ut loquitur Diophantus, duo homogenea maximæ aut minimæ æqualia [3] et, demptis communibus [4] (quo peracto, homogenea omnia ex parte alterutra ab E vel ipsius gradibus afficiuntur) applicentur omnia ad E vel ad elatiorem ipsius gradum, donec aliquod ex homogeneis, ex parte utravis affectione sub E omnino liberentur [5]. Elidantur deinde utrimque homogenea sub E aut sub ipsius gradibus quomodolibet involuta, et reliqua æquentur [6], aut, si ex una parte nihil superest, æquentur sane, quod eodem recidit, negata affirmatis. Resolutio ultimæ istius æqualitatis dabit valorem A [7], qua cognita, maxima aut minima ex repetitis prioris resolutionis vestigiis innotescet.

Exemplum subjicimus: *Sit recta AC ita dividenda in E ut rectangulm AEC sit maximum.*



Recta AC dicatur B. Ponatur pars altera ipsius B esse A: ergo reliqua erit $B-A$ et rectangulum, sub segmentis erit B in $A-Aq.$ [1] quod debet inveniri maximum. Ponatur rursus pars altera ipsius B esse $A+E$: ergo reliqua erit $B-A-E$ et rectangulum sub segmentis erit [2]

$$B \text{ in } A - Aq. + B \text{ in } E - A \text{ in } E \text{ bis } - Eq.$$

quod debet adæquari superiori rectangulo [3]

$$B \text{ in } A - Aq.$$

Demptis communibus [4]

$$B \text{ in } E \text{ adæquabitur } A \text{ in } E \text{ bis } + Eq.$$

et, omnibus per E divisis [5],

$$B \text{ adæquabitur } A \text{ bis } + E$$

Elidatur E [6]

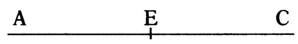
$$B \text{ æquabitur } A \text{ bis}$$

Igitur B bifariam est dividenda ad solutionem propositi [7]; nec potest generalior dari methodus.

Vediamo ora la traduzione del passo seguente, cercando di rimanere aderenti al testo[18]

L'intera teoria della determinazione dei massimi e dei minimi si fonda su due espressioni simboliche e su questa unica regola: sia A un termine qualunque del problema (piano, solido o di linea, a seconda di come sia conveniente per raggiungere lo scopo proposto[19]) e, trovato il massimo o il minimo espresso in termini che contengono a A o potenze di A [1], di grado qualunque, si ricominci indicando con $A+E$ quello che prima era A e si trovi di nuovo il massimo o il minimo in termini contenenti A ed E di grado qualunque [2]. Si adeguaglino, come dice Diofanto[20], le due espressioni omogenee dei massimi o dei minimi [3] e, sottratti i termini comuni [4](fatto questo, i due membri omogenei conterranno solamente termini in E o potenze di E) si dividano entrambe per E o per una potenza di E di grado superiore, finché E sia eliminata completamente da almeno uno dei termini [5]. Si elidano poi da una parte e dall'altra i termini contenenti E o potenze di E e si uguaglino i termini che restano [6]; oppure, se da una parte non resta nulla, si uguaglino, il che è lo stesso, i termini negativi ai positivi. La soluzione di quest'ultima uguaglianza darà il valore A [7], noto il quale, si conosceranno i massimi o minimi seguendo la traccia della precedente soluzione. Consideriamo un esempio.

Si divida la retta AC nel punto E tale che il rettangolo AEC sia massimo



Indichiamo con B la retta AC. Sia A una delle due parti di B, quindi la rimanente sarà $B-A$ e il rettangolo formato da questi due segmenti, del quale si deve trovare il massimo, sarà B per $A - Aq$ [1]. Si assuma poi che una parte di B sia $A+E$, dunque la parte restante sarà $B - A - E$ e il rettangolo che ha per lati questi segmenti sarà [2]

$$B \text{ per } A - Aq. + B \text{ per } E - A \text{ per } E \text{ due volte } -Eq.$$

che si dovrà adeguagliare [3] al rettangolo precedente

$$B \text{ per } A - Aq.$$

[18]La traduzione dal latino è liberamente ispirata a *Il metodo di Fermat* in U. Bottazzini, P. Freguglia, L. Toti Rigatelli, *Fonti per la storia della matematica*, Firenze, Sansoni 1992, pp.258-259.

[19]Fermat si riferisce alla classificazione dei problemi geometrici descritta da Pappo nelle *Collezioni matematiche*. La suddivisione in problemi piani, solidi e di linea dipende dal fatto che siano rispettivamente risolubili con riga e compasso, con coniche o con curve di altro genere.

[20]Matematico alessandrino vissuto tra il III e il IV secolo a.C., autore dell'*Aritmetica*, che venne stampata per la prima volta da Xylander nel 1575. Secondo molti autori rinascimentali, l'opera di Diofanto rappresentava una sorta di "algebra greca".

Sottratti i termini uguali [4]

B per E adeguaglierà A per E 2 volte $+Eq$.

e, divisi tutti i termini per E [5],

B adeguaglierà A 2 volte $+E$

Si elimini E

B eguaglierà A 2 volte [6]

e dunque B si deve dividere a metà per risolvere il problema iniziale [7], né si può dare un metodo più generale.

Riassumiamo questo metodo in termini moderni ripercorrendo l'esempio proposto da Fermat.

Dato un problema in cui si devono trovare dei valori massimi o minimi, il primo passo da fare è quello di fissare un'incognita. Fermat indica le incognite con le vocali (es. A, E) e i dati noti con le consonanti (es. B) seguendo la convenzione adottata da Viète. Nel nostro caso, abbiamo un segmento di lunghezza nota B e vogliamo dividere il segmento in modo tale che i due segmenti ottenuti siano i lati del rettangolo di area massima. Indichiamo dunque con A uno dei due segmenti che risolvono il problema (cioè massimizzano l'area)[21] e con $B - A$ quello rimanente.

Una volta fissata l'incognita, si imposta la relazione da massimizzare o minimizzare: nell'esempio proposto da Fermat, la relazione esprime l'area del rettangolo di lati A e $B - A$, cioè $BA - A^2$ [1].

A questo punto, si riconsidera il primo segmento incognito A e lo si incrementa di un valore E; ora abbiamo l'incognita $A + E$ che rappresenta il primo segmento e $B - A - E$ che rappresenta il secondo. Possiamo allora riscrivere la relazione che esprime l'area del rettangolo: $(A+E)(B-A-E)$ ovvero $BA-A^2+BE-2AE-E^2$ [2].

Abbiamo espresso l'area del rettangolo prima in termini di A [1] e poi in termini di $A+E$ [2]; le espressioni che abbiamo ottenuto non sono esattamente uguali – perché nel secondo caso abbiamo incrementato A di una quantità *non nulla* E – e quindi non possiamo uguagliarle ma *adeguagliarle* [3]

$$BA - A^2 \approx BA - A^2 + BE - 2AE - E^2$$

Possiamo adesso assumere che valgano le usuali regole dell'algebra ed eliminare i termini uguali che si trovano rispettivamente nel primo e nel secondo membro dell'adequazione, nonché trasportare da un membro all'altro i termini, cambiando di segno [4]. Otteniamo allora

$$BE \approx 2AE + E^2$$

[21]Non dimentichiamo che anche Fermat usa il metodo dell'analisi e quindi assume il problema come risolto.

Dividiamo ora per E [5](supponendo, *per ora*, che E sia diverso da zero), che compare in tutti i termini, in modo da ottenere un'espressione in cui almeno un termine non contenga E

$$B \approx 2A + E$$

A questo punto ci "ricordiamo" che la nostra incognita iniziale è A e dunque l'incremento E deve valere 0; ponendo $E = 0$ si eliminano tutti i termini che contengono E [6]. Si noti che per $E = 0$ l'adequazione diventa una vera equazione

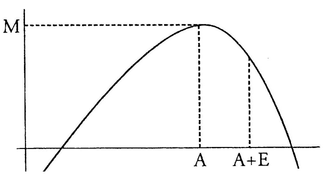
$$B = 2A$$

da cui si deduce $A = \frac{B}{2}$ [7], cioè l'area del rettangolo è massima quando si assume come lato la metà del segmento dato. In altre parole l'area è massima quando il rettangolo è in realtà un quadrato.

5.3 Osservazioni sul metodo

Non c'è dubbio che, almeno in linea di principio, il metodo enunciato da Fermat funzioni correttamente per determinare il valore di una incognita che massimizza o minimizza una relazione. Nel brano che abbiamo visto, Fermat non spiega chiaramente quali sono le ragioni matematiche che stanno dietro questa regola: si noti, in effetti, il tono prescrittivo piuttosto che argomentativo. Come possiamo rappresentare, in termini moderni, l'idea matematica di fondo?

Immaginiamo di rappresentare la relazione da massimizzare come una funzione della variabile[22] X, $f(X) = BX - X^2$ e supponiamo che f assuma il valore massimo M quando $X = A$, come si vede in figura



Se incrementiamo il valore di A di una quantità arbitraria E, il valore assunto dalla funzione nel punto $A + E$ dovrà essere minore del valore assunto dalla funzione nel punto di massimo A, cioè $f(A + E) < f(A)$. Possiamo anche scrivere la disuguaglianza come adequazione, ovvero $f(A + E) \approx f(A)$ o come

$$f(A + E) - f(A) \approx 0 \qquad [*]$$

Poiché $E \neq 0$,

$$\frac{f(A + E) - f(E)}{E} \approx 0 \qquad [**]$$

[22]Si noti che questa è una forzatura del pensiero di Fermat, che non conosce il concetto di funzione, ma, semmai quello di ordinata di una curva. L'idea di funzione viene qui introdotta perché familiare al lettore moderno.

espressione che rappresenta, in termini moderni, l'idea di Keplero (fatta propria da Fermat) secondo cui nell'intorno di un massimo, le variazioni dell'ordinata sono insensibili rispetto all'incremento E dell'ascissa corrispondente al massimo. Qualora si annulli l'incremento ($E = 0$) l'*adaequatio* diventa *æquatio*

$$\left.\frac{f(A+E)-f(E)}{E}\right|_{E=0} = 0 \qquad [***]$$

Si noti che i passaggi precedenti non sono strettamente rigorosi agli occhi di un matematico moderno: prima si divide per E sottintendendo che sia una quantità non nulla e poi si pone uguale a zero.

Si noti anche che, dal punto di vista della laboriosità del calcolo, la divisione per E è semplice solo nel caso in cui $f(A+E) - f(A)$ sia un polinomio (come si potrà constatare risolvendo il successivo esercizio sul massimo che comprende radicali).

La notazione moderna che è stata usata potrebbe indurre il lettore che ha qualche familiarità con il calcolo differenziale, a riconoscere nell'espressione [***] la derivata $f'(A) = 0$. In realtà questa identificazione sarebbe una forzatura per molteplici ragioni:

- Fermat non possiede il concetto di funzione e nemmeno conosce la teoria dei limiti, che comparirà in maniera compiuta solo all'inizio dell'Ottocento;
- La derivazione è un operatore che agisce su una funzione secondo determinate regole e la trasforma nella funzione derivata, che verrà poi uguagliata a zero per la determinazione dei punti stazionari: in altre parole si passa da $f(x)$ a $f'(x)$ a $f'(x) = 0$. Fermat invece agisce sempre su adequazioni o equazioni e "contrariamente alla derivata, l'equazione è sempre globale; se la funzione f è somma di due funzioni $f(x) = g(x) + h(x)$ l'equazione $f(x) = 0$ non ha nulla a che vedere con le due $g(x) = 0$ e $h(x) = 0$. Non è pertanto possibile separare le difficoltà, che devono sempre essere affrontate tutte insieme"[23]

Attività

Un problema di massimo Trovare il valore di A che massimizza la relazione $BA^2 - A^3$

Attività

Un problema di massimo [24] Si consideri un punto D che giace su una circonferenza di diametro AB. Sia C il piede della perpendicolare condotta da D al diametro AB; si chiede di determinare il punto D in modo che sia massima la somma dei segmenti AC e CD. Si ponga $AB = b$ e $AC = x$ e si verifichi che $CD = \sqrt{bx - x^2}$. Si dovrà massimizzare l'espressione $x + \sqrt{bx - x^2}$.

[23] E. Giusti, *Dalla* Géométrie *al calcolo: il problema delle tangenti e le origini del calcolo infinitesimale*, in *Storia della scienza*, Roma, Istituto dell'Enciclopedia Treccani, volume V, p. 463.

[24] "Sit semicirculus cuius diameter AB et in eam perpendicularis DC. Quæritur maximum AC e CD aggregatum" (*Œuvres*, I, p. 153 e segg.)

5.4 Il metodo delle tangenti

5.5 *De tangentibus linearum curvarum*

Nella seconda parte della memoria *Methodus ad disquierendam maximam et minimam*, intitolata *De tangentibus linearum curvarum*, Fermat determina, con il suo nuovo metodo, la tangente a una parabola e ritrova il risultato classico: la sottotangente è doppia del piede dell'ordinata. Il suo metodo, dunque, funziona per i casi già noti ed è questa una condizione indispensabile per presupporre che possa essere efficacemente esteso anche ai casi ancora insoluti. Nel *De tangentibus*, come vedremo, Fermat propone solo l'esempio della parabola, senza indugiare nemmeno in una pur sintetica descrizione generale del metodo, che invece troviamo in una memoria successiva, la *Doctrina tangentium*[25] (cfr.§§ 5.7)

P. de Fermat, *Doctrina tangentium*, 1637, in *Œuvres*, I p. 159

> Consideramus nempe in plano cuiuslibet curvae rectas duae positione datas, quarum altera diameter, si libeat, altera applicata nuncupetur. Deinde, iam inventam tangentem supponentes ad datum in curva punctum, proprietatem specificam curvae, non in curva amplius, sed in invenienda tangente, per adaequalitatem consideramus et, elisis (quae monet doctrina de maxima et minima) homogeneis, fit demum aequalitas quae punctum concursus tangentis cum diametro determinat, ideoque ipsam tangentem.[26]

Questo brano è particolarmente significativo perché riassume i punti essenziali del pensiero di Fermat

- si evidenza la necessità di collocare la curva da studiare in un sistema di riferimento formato da due assi, che vengono chiamati diametro e ordinata;
- il metodo si regge sulla tecnica dell'analisi, che suppone nota la tangente da determinare
- il passaggio essenziale è il *trasferimento* della proprietà che caratterizza la curva dai punti della curva ai punti della tangente. Poiché in termini algebrici la proprietà che caratterizza una curva è espressa da un'equazione. questo *trasferimento* significa che l'*equazione* si trasforma in *adequazione*. In termini moderni, questo si esprime affermando che la tangente rappresenta localmente la curva.

[25] In realtà si tratta di una memoria senza un vero e proprio titolo. Seguiamo qui il suggerimento di M. Mahoney che la indica come *Doctrina tangentium* ispirandosi all'*incipit*: "Doctrinam tangentium antecedit ..." (cfr. M.S. Mahoney, *The Mathematical Career of Pierre de Fermat (1601-1665)*, Princeton University Press 1994, p. 210 e segg.). Pubblicata nella prima edizione delle opere di Fermat, si trova anche in *Œuvres*, I, pp. 158-167.

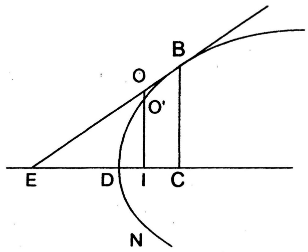
[26] "Consideriamo nel piano in cui giace la curva, due rette date in posizione, della quali una si chiamerà, se si vuole, il *diametro* e l'altra l'*applicata*. Supponiamo che sia stata determinata la tangente alla curva in un suo punto e consideriamo la proprietà specifica della curva non sulla curva ma sulla tangente e, dopo aver eliminato la quantità omogenee (come insegna il metodo dei massimi e minimi), alla fine troviamo un'equazione che determina il punto di intersezione tra la tangente e il diametro, e quindi possiamo determinare la tangente vera e propria".

- il metodo è finalizzato alla determinazione della *sottotangente*, parametro geometrico che individua univocamente la tangente.

Passiamo ora a vedere come Fermat determini effettivamente la tangente alla parabola. Anche in questo caso, numeriamo i passaggi del procedimento per ritrovare la corrispondenza tra il testo originale, la sua traduzione e l'interpretazione in termini moderni.

P. de Fermat, *Methodus ad disquierendam maximam et minimam*, 1637, in *Œuvres*, I pp. 134-136

Ad superiorem methodum inventionem tangentium ad data puncta in lineis quibuscumque curvis reducimus. Sit data, verbi gratia, parabole BDN cuius vertex D, diameter DC et punctum in ea datum B, ad quod ducenda est recta BE tangens parabolen et in puncto E cum diametro concurrens.



Ergo, sumendo quodlibet punctum in recta BE, et ab eo ducendo ordinatam OI, a puncto autem B ordinatam BC maior erit proportio CD ad DI quam quadrati BC ad quadratum OI quia punctum O est extra parabolen [1]; sed, propter similitudinem triangulorum, ut BC quadratum ad OI quadratum, ita CE quadratum ad IE quadratum [2]; maior igitur erit proportio CD ad DI quam quadrati CE ad quadratum IE [3].

Quum autem punctum B detur, datur applicata BC, ergo punctum C; datur etiam CD: sit igitur CD æqualis D datæ. Ponatur CE esse A: ponatur CI esse E. Ergo D ad $D - E$ habebit maiorem proportionem quam Aq ad $Aq + Eq - A$ in E bis [4].

Et, ducendo inter se medias et extremas [5],

$$D \text{ in } Aq + D \text{ in } Eq - D \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis maius erit quam } D \text{ in } Aq - Aq \text{ in } E$$

Adæquentur igitur iuxta superiorem methodum [6]: demptis itaque communibus [7]

$$D \text{ in } Eq - D \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis adæquabitur } -Aq \text{ in } E$$

aut, quod idem est [8],

$$D \text{ in } Eq + Aq \text{ in } E \text{ adæquabitur } D \text{ in } A \text{ in } E \text{ bis}$$

Omnia dividantur per E: ergo [9]

$$D \text{ in } E + Aq \text{ adæquabitur } D \text{ in } A \text{ bis}$$

Elidatur D in E: ergo [10]

$$Aq \text{ æquabitur } D \text{ in } A \text{ bis}$$

ideoque [11]

$$A \text{ æquabitur } D \text{ bis}$$

Ergo CE probavimus duplam ipsius CD, quod quidem ita se habet. Nec unquam fallit methodus; imo ad plerasque quæstiones pulcherrimas potest estendi ...

Vediamo ora la traduzione del passo seguente, cercando di rimanere aderenti al testo[27]

Riconduciamo al metodo precedente la determinazione della tangente a una curva qualsiasi in un punto dato. Si consideri, ad esempio, la parabola BDN di vertice D e diametro DC e si fissi il punto B da cui viene condotta la tangente alla parabola che interseca il diametro nel punto E. Si consideri un punto qualsiasi O che giace sulla retta BE e si traccino le ordinate OI e BC; il rapporto tra CD e DI sarà maggiore del rapporto del quadrato di BC^2 al quadrato di OI^2, perché il punto O è esterno alla parabola [1]. Per la similitudine dei triangoli, il quadrato di BC sta al quadrato di OI come il quadrato di CE sta al quadrato di IE [2] e dunque il rapporto tra CD e DI sarà maggiore del rapporto tra il quadrato di CE e il quadrato di IE [3]. Poiché B è un punto fissato, sarà nota anche la sua ordinata BC e quindi saranno noti sia il punto C che il segmento CD. Sia dunque CD uguale a d [*NdR* indichiamo con lettere minuscole le lunghezze dei segmenti per non confonderle con i punti], CE uguale ad a e CI uguale ad e. Allora il rapporto tra d e $d - e$ sarà maggiore del rapporto tra aq e $aq + eq - a$ per e due volte [4]. Moltiplicando i medi e gli estremi della proporzione si ha [5]

$$d \text{ per } aq + d \text{ in } eq - d \text{ per } a \text{ per } e \text{ due volte maggiore di } d \text{ per } aq - aq \text{ per } e$$

Si adeguaglino secondo il metodo esposto precedentemente [6] e si sottraggano i termini comuni [7]

[27] La traduzione dal latino è liberamente ispirata a *Il metodo di Fermat* in U. Bottazzini, P. Freguglia, L. Toti Rigatelli, *Fonti per la storia della matematica*, Firenze, Sansoni 1992, pp.258-259.

d per $eq - d$ per a per e due volte adeguaglia $-aq$ per e

oppure, il che è la stessa cosa [8]

d per $eq + aq$ per e adeguaglierà d per a per e 2 volte

Si divida tutto per e [9]

d per $e + aq$ adeguaglierà d per a 2 volte

Si elimini d per e, quindi [10]

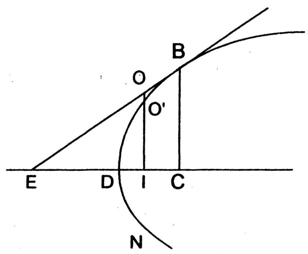
aq uguaglierà d per a 2 volte

e infine [11]

a uguaglierà d 2 volte

Quindi abbiamo provato che CE è il doppio di CD, come deve essere. Questo metodo non sbaglia mai e anzi può essere esteso a molte bellissime questioni ...

Traduciamo il metodo in termini moderni, ricordando che per *diametro* di una parabola si intende una retta che congiunge i punti medi delle corde che hanno la stessa direzione (quindi l'asse di una parabola è anche un diametro).



Consideriamo la parabola BDN di vertice B e determiniamo la tangente in un suo punto B. La tangente incontra il diametro (nella figura coincide con l'asse) nel punto E. Consideriamo il punto O che giace sulla retta tangente e conduciamo la perpendicolare OI al diametro, supponendo che OI intersechi la parabola nel punto O'. I segmenti BC (perpendicolare al diametro) e $O'I$ sono le ordinate dei punti B e O' che giacciono sulla parabola, le cui rispettive ascisse sono CD e ID. La proprietà che caratterizza una parabola – il cosiddetto *sintomo* – si sintetizza dicendo che le ascisse stanno fra loro come i quadrati delle rispettive ordinate e dunque

$$CD : DI = BC^2 : O'I^2$$

ma $OI > O'I$ perché il punto O è esterno alla parabola e dunque [1]

$$CD : DI = BC^2 : O'I^2 > BC^2 : OI^2$$

La similitudine dei triangoli rettangoli $B\widehat{C}E$ e $O\widehat{I}E$ giustifica la seguente proporzione

$$BC : OI = CE : IE$$

ovvero [2]

$$BC^2 : OI^2 = CE^2 : IE^2$$

e quindi [3]

$$CD : DI > CE^2 : IE^2$$

ovvero $CD : DI \approx CE^2 : IE^2$

Trasformiamo ora questa la disuguaglianza geometrica in una relazione algebrica, ponendo $CD = d$, $CE = a$ e $CI = e$. Otteniamo dunque [4]

$$\frac{d}{d-e} > \frac{a^2}{(a-e)^2}$$

$$d(a-e)^2 > a^2(d-e)$$

$$da^2 + de^2 - 2dae > a^2d - a^2e \qquad [5]$$

La relazione si trasforma in un'adequazione [6]

$$da^2 + de^2 - 2dae \approx a^2d - a^2e$$

Si eliminano i termini simili [7]

$$de^2 - 2dae \approx -a^2e$$

$$de^2 + a^2e \approx 2dae[8]$$

si divide per e [9]

$$de + a^2 \approx 2da$$

e si pone $e = 0$ [10] ottenendo un'equazione

$$a^2 = 2da$$

ovvero [11]

$$a = 2d$$

Abbiamo quindi ottenuto la nota relazione secondo la quale in una parabola la sottotangente CE è doppia del segmento CD, piede dell'ordinata.

5.6 Osservazioni sul metodo

La domanda che potrebbe sorgere spontanea è la seguente: come mai Fermat considera la determinazione della tangente alla parabola come un'applicazione del metodo dei massimi e minimi? Apparentemente non viene massimizzata (né minimizzata) nessuna relazione. A ben vedere, le cose non stanno veramente così.

Se consideriamo la disuguaglianza tra rapporti

$$CD : DI > BC^2 : OI^2$$

e la rileggiamo come

$$CD : BC^2 > DI : OI^2$$

possiamo osservare che, se scegliamo un punto O qualsiasi *a destra* di B, questa relazione ci dice che il rapporto $\dfrac{DI}{OI^2}$ è sempre minore del rapporto fissato $\dfrac{CD}{BC^2}$ e che al più è uguale quando O coincide con B, ovvero $e = 0$. Dal momento che per la similitudine dei triangoli $B\widehat{C}E$ e $O\widehat{I}E$ è

$$OI^2 : IE^2 = BC^2 : CE^2$$

allora

$$\frac{ID}{IO^2} = \frac{ID \cdot CE^2}{CB^2 \cdot IE^2}$$

In termini algebrici, con le posizioni fatte prima e aggiungendo $CB = b$

$$\frac{ID}{IO^2} = \frac{(d-e) \cdot a^2}{b^2 \cdot (a-e)^2}$$

L'unica grandezza che varia a secondo membro è e; dunque possiamo considerare l'espressione come una "funzione di e"

$$f(e) = \frac{(d-e) \cdot a^2}{b^2 \cdot (a-e)^2}$$

e provare che ha un massimo per $e = 0$.

Vogliamo ribadire che la peculiarità del metodo di Fermat consiste nel *trasferire* la relazione fra segmenti, che vale per punti che stanno sulla curva, a segmenti relativi a punti che stanno sulla tangente. Nel caso in esame, ad esempio, la relazione

$$CD : DI = BC^2 : O'I^2$$

vale per i punti B e O' che stanno sulla parabola e viene riletta come adequazione per i punti B e O che stanno sulla tangente, divenendo

$$CD : DI \approx BC^2 : OI^2$$

La validità di questo passaggio non è subordinata al fatto che la curva sia algebrica e infatti, come vedremo in seguito, Fermat riuscirà ad applicare con successo il suo metodo anche a una curva trascendente: la cicloide[28].

Attività

Tangente alla circonferenza Consideriamo la semicirconferenza di equazione $y = \sqrt{1-x^2}$ e determiniamo la tangente nel punto $P_0 = (x_0, y_0)$. Sia $B = (x_0, 0)$ il piede della perpendicolare condotta dal punto P_0 all'asse delle ascisse. Tracciamo la tangente, che incontra l'asse delle ascisse nel punto C: il segmento BC è la sottotangente, ovvero il parametro geometrico che determina univocamente la tangente e che indichiamo con a. Consideriamo il punto $F =$ che giace sulla tangente e sia $E = (x_0 + e, 0)$ il piede della perpendicolare condotta da F all'asse delle ascisse. La proprietà della circonferenza applicata al punto P_0, $OB^2 + BP_0^2 = 1$ viene dunque *trasferita* al punto F

$$FE^2 + OE^2 \approx 1$$

Dalla similitudine dei triangoli rettangoli $P_0\widehat{B}C$ e $F\widehat{E}C$, si ricava

$$FE = \frac{P_0B \times EC}{BC}$$

sostituendo i valori

$$FE = \frac{y_0(a-e)}{a}$$

L'adequazione diventa allora

$$(x_0 + e)^2 + \frac{y_0^2}{a^2}(a-e)^2 \approx 1$$

Applicando il metodo di Fermat, verificare che la sottotangente a risulta pari a $\frac{y_0^2}{x_0}$ e ritrovare questo stesso risultato con i metodi tradizionali della geometria analitica.

Attività

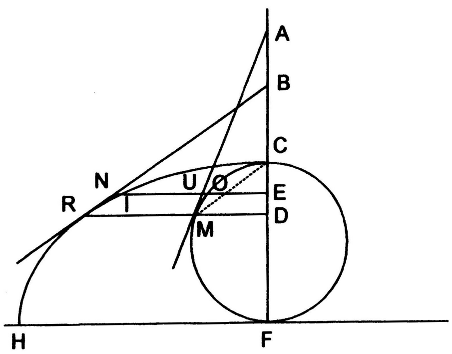
Tangente all'iperbole di equazione $xy = 1$ Determinare la tangente all'iperbole nel punto $P_0(x_0, y_0)$ mettendo a confronto i metodi di Descartes, di de Beaune e di Fermat (suggerimenti si possono trovare alla pagina

`http://php.math.unifi.it/archimede/archimede/mini_calcolo/schede/06.pdf`).

[28] A onor del vero, anche Descartes elaborò un procedimento per determinare la tangente alla cicloide, ma era basato su considerazioni fisiche e non si trattava del metodo algebrico formulato nella *Géométrie*. Si può vedere comunque in
`http://php.math.unifi.it/archimede/archimede/mini_calcolo/schede/09.pdf`

5.7 La tangente alla cicloide

Attorno al 1640 Fermat scrisse la memoria *Doctrina tangentium* in cui determinava la tangente a quattro "curve speciali": la cissoide, la concoide, la quadratrice e la cicloide. Le prime due sono curve dotate di un'equazione abbastanza complessa, ma sono curve algebriche e quindi la determinazione della tangente è, in linea teorica, possibile anche con il metodo di Descartes. La cicloide, invece è una curva trascendente, e si definisce come la curva generata da un punto che giace su una circonferenza che rotola senza strisciare su una retta[29]. Per avere un'idea di come si possa generare, si pensi alla traiettoria immaginaria disegnata dalla valvola della camera d'aria della ruota di una bicicletta, mentre la ruota sta girando.



Consideriamo la circonferenza $COMF$ che rotola sulla retta HF e genera la cicloide $HRIC$ e tracciamo dal punto R della cicloide la tangente, che incontra il diametro della curva nel punto B. La sottotangente da determinare è il segmento BD. La proprietà geometrica della cicloide risiede nel fatto che l'ordinata RD del punto R si può esprimere come la somma dell'ordinata del punto M, DM del punto che giace sulla circonferenza generatrice, e dell'arco $\widehat{CM}$ della stessa circonferenza

$$RD = DM + MR = DM + \widehat{CM}$$

Si conduca la tangente alla circonferenza nel punto M: poiché siamo in grado di determinare questa tangente[30], assumiamo come noti i segmenti AM, DM e AD, che verranno dunque indicati, seguendo lo stile di Fermat, con una consonante e precisamente $DA = b$, $AM = d$, $DM = r$ e poniamo anche l'ordinata del punto R, $RD = c$ e l'arco $\widehat{CM} = n$. Indichiamo invece la sottotangente $DB = a$. Fatte queste posizioni, si osservi che la proprietà caratteristica della cicloide $RD = DM + \widehat{CM}$ si può ora esprimere algebricamente come $c = r + n$.

Consideriamo il punto N che giace sulla tangente e, come insegna Fermat, leggiamo su questo punto la proprietà specifica della cicloide considerando però un'adequazione al posto di un'equazione[31]

$$EN \approx NO + OE \approx \widehat{OC} + OE$$

Vediamo ora di esprimere in termini algebrici i segmenti EN, OE e l'arco $\widehat{OC}$ che compaiono nell'adequazione

[29] La sua equazione cartesiana, piuttosto complessa, è $x = -\sqrt{y(2r - y)} + r \arccos(1 - \frac{y}{r})$.

[30] Come si è visto anche nell'esercizio precedente.

[31] L'equazione sarebbe $IE = IO + OE = \widehat{OC} + OE$ riferita al punto I che sta sulla cicloide.

Assumiamo $DE = e$ e ricaviamo l'espressione del segmento EN sfruttando la similitudine dei triangoli rettangoli RDB e NEB

$$EN = \frac{RD \times EB}{DB} \quad \text{ovvero} \quad EN = \frac{c \times (a-e)}{a} = \frac{ca - ce}{a}$$

Dovremmo ora esprimere OE e $\widehat{OC} = \widehat{CM} - \widehat{MO}$. Osserva allora Fermat

> Al fine di trasformare questi tre termini [NE, OE e $\widehat{CO}$ *NdR*] in termini analitici e per evitare di introdurre radicali, consideriamo il segmento EU al posto del segmento OE e, al posto dell'arco $\widehat{MO}$ il segmento di tangente MU che sottende $\widehat{MO}$[32]

Per la similitudine dei triangoli rettangoli MDA e UEA possiamo esprimere il segmento UE come

$$UE = \frac{DM \times EA}{AD} \quad \text{ovvero} \quad UE = \frac{r \times (b-e)}{b}$$

e quindi adeguagliamo UE e OE

$$OE \approx \frac{r \times (b-e)}{b}$$

Applicando il teorema di Talete alle rette EU e MD tagliate dalle trasversali AM e AD, si ottiene anche

$$MU = \frac{DE \times MA}{DA} \quad \text{ovvero} \quad MU = \frac{e \times d}{b}$$

da cui, adeguagliando MU e $\widehat{MO}$

$$\widehat{MO} \approx \frac{ed}{b}$$

$$\widehat{CO} = \widehat{CM} - \widehat{MO} \approx n - \frac{ed}{b}$$

La proprietà caratteristica della cicloide *letta sulla tangente* ($EN \approx OE + \widehat{OC}$) si esprime dunque nell'adequazione

$$\frac{ca - ce}{a} \approx \frac{rb - re}{b} + n - \frac{ed}{b}$$

Se ora applichiamo il metodo dei massimi e minimi, cioè eliminiamo i termini comuni (ricordando che $c = r + n$), dividiamo per e e poi poniamo $e = 0$ otteniamo la lunghezza della sottotangente

[32] La traduzione è molto libera; il passo originale recita: "Ut autem hi tres termini ad terminos analyticos reducantur, pro recta OE, ad vitandam asymmetriam ex superiori cautione, sumatur recta EU applicata tangenti, et pro curva MO sumatur portio tangentis MU, cui ipsa MO adiacet" (*Œuvres*, I, p. 163.).

$$a = \frac{cb}{r + d}$$

Come ultimo passo, Fermat interpreta questo risultato dal punto di vista geometrico mostrando che la tangente RB alla cicloide in R è parallela alla corda CM della circonferenza generatrice.

5.8 I limiti del metodo delle tangenti di Fermat

Diversamente dal metodo di Descartes, quello di Fermat non è vincolato – almeno in linea di principio – dalla natura algebrica delle curve: la possibilità di considerare tratti di segmenti al posto di archi consente a quest'ultimo di affrontare con successo anche la determinazione della tangente a una curva trascendente come la cicloide.

Il metodo di Fermat, tuttavia, non riesce a superare le difficoltà di calcolo che si presentano nel caso di curve rappresentate da equazioni complesse e soprattutto contenenti radicali. Come abbiamo detto in precedenza (§ § 5.3), il fatto di considerare sempre equazioni globali, impedisce a Fermat, così come a Descartes e ai suoi successori, di poter separare le difficoltà di calcolo.

Non va poi dimenticato che la centralità assunta dalla sottotangente nella determinazione della tangente è un elemento che complica i metodi fin qui visti, poiché la sottotangente è un parametro naturale dal punto di vista geometrico, ma scomodo dal punto di vista algebrico: per fare un esempio, se una curva si può considerare somma di due curve più semplici, la sua sottotangente generalmente non potrà considerarsi somma delle sottangenti delle curve componenti.

I limiti dei metodi di Descartes e di Fermat saranno evidenziati da Gottfried Wilhelm Leibniz, che nel 1684 pubblicherà una fondamentale memoria – generalmente considerata come l'atto di nascita del calcolo differenziale – il cui titolo suona come una aperta critica ai suoi predecessori *Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus* cioè *Nuovo metodo per i massimi e i minimi, come anche per le tangenti, che non si arresta davanti a quantità frazionarie e irrazionali e modo unico di calcolo per i suddetti.*

6 Leibniz (1646-1716) e la nascita del calcolo differenziale

6.1 Breve biografia scientifica

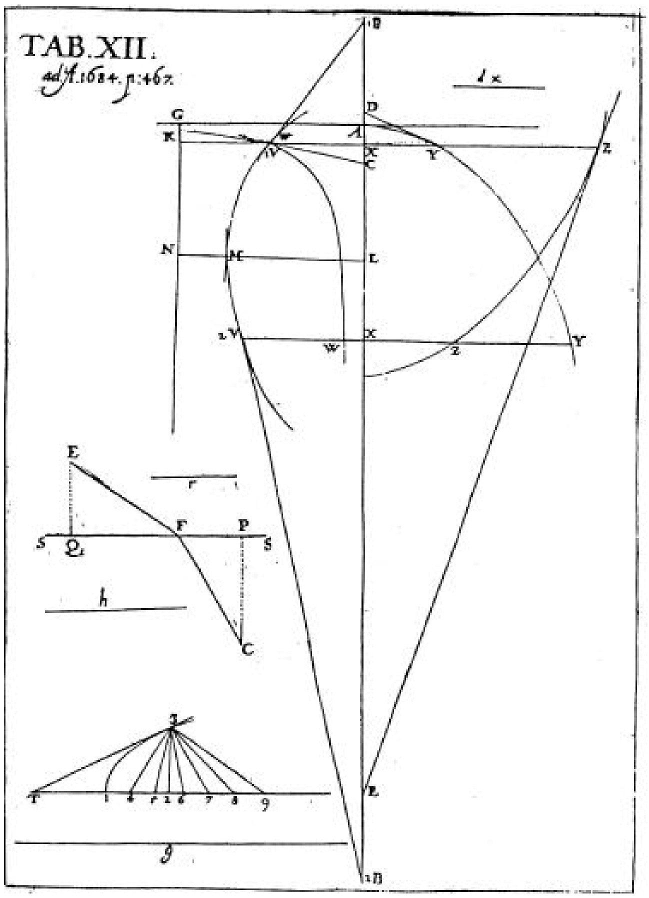
Gottfried Wilhelm Leibniz nasce a Lipsia nel 1646. Nel 1661 si iscrive all'Università di Lipsia e due anni dopo discute una tesi di filosofia dal titolo *Disputatio metaphysica de principio individui*; nel contempo inizia a studiare Galileo e Descartes e decide di approfondire le sue conoscenze matematiche. Nel 1664 ottiene il grado di *magister* di filosofia a Lipsia e nel 1666 consegue il titolo di dottore in legge all'Università di Altdorf; l'anno successivo ottiene un posto di giudice presso l'Alta corte di appello grazie all'interessamento di Johann Christian von Boineburg, che sarà il suo primo protettore. Nel 1672 si reca a Parigi per svolgere una missione diplomatica e conosce Christiaan Huygens, che lo segue nello studio della matematica e lo indirizza verso le opere di Gregoire de S.Vincent, Pascal e Wallis. Alla fine del 1673 elabora nelle sue linee essenziali l'invenzione del calcolo infinitesimale. All'inizio del 1676 viene nominato consigliere presso il duca di Hannover ed è costretto a lasciare Parigi; durante il viaggio di ritorno si ferma a Londra dove presenta un modello di macchina calcolatrice a Sir Henry Oldenburg, segretario della Royal Society, e incontra John Collins, che gli mostra il *De analysi* di Newton. Tornato a Hannover, Leibniz si dedica, su incarico del duca, a diverse attività, fra cui la realizzazione di un progetto di drenaggio dell'acqua dalle miniere dello Harz. Nel 1682 comincia a collaborare con una nuova rivista, gli *Acta Eruditorum*, dove nel 1684 pubblicherà la *Nova methodus pro maximis et minimis*, l'atto di nascita del calcolo differenziale. Nel 1685 riceve dal duca di Hannover l'incarico di ricostruire la storia del casato di Braunschweig-Lüneburg e l'esigenza di raccogliere documenti in merito lo porterà a viaggiare in Austria e in Italia (1687-1690) dove visiterà Modena, Ferrara, Firenze, Roma e Venezia. Nel 1708 scoppia la disputa con Isaac Newton sulla priorità dell'invenzione del calcolo infinitesimale. Muore nel 1716.

6.2 La *Nova Methodus*, 1684

Come si è detto, nel 1684 Leibniz pubblica una brevissima memoria dal titolo eloquente: *Nova methodus pro maximis et minimis itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur et singulare pro illis calculi genus* cioè *Nuovo metodo per i massimi e i minimi, come anche per le tangenti, che non si arresta davanti a quantità frazionarie e irrazionali e modo unico di calcolo per i suddetti.* In questo titolo Leibniz enfatizza le caratteristiche della sua invenzione, destinata a soppiantare i metodi esistenti (da qui l'aggettivo *Nuovo* che accompagna il termine *metodo*) perché ne supera i limiti, individuati nell'estrema complessità di calcolo che rendeva inutilizzabili i metodi algebrici cartesiani (anche se in linea teorica non lo erano) quando si presentavano radici o espressioni frazionarie nell'equazione da studiare.

W.G.Leibniz, *Nova Methodus*, 1684

> NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MINIMIS ITEMQUE TANGENTIBUS, QUAE NEC FRACTAS, NEC IRRATIONALES QUANTITATES MORATUR ET SINGULARE PRO ILLIS CALCULI GENUS
>
> Sit axis AX et curvae plures, ut VV, WW, YY, ZZ quarum ordinatae ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quae vocentur respective v, w, y, x et ipsa AX, abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint VB, WC, YD, ZE axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio assumta vocetur dx et recta, quae sit ad dx, ut v (vel w, vel y, vel z) est ad XB (vel XC, vel XD, vel XE) vocetur dv (vel dw, vel dy, vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsarum w, vel y, vel z).

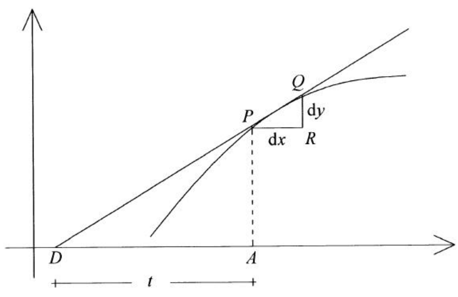


Traduzione[33]:

Siano dati l'asse AX e più curve come VV, WW, YY, ZZ, le cui ordinate VX, WX, YX, ZX, normali all'asse, siano chiamate rispettivamente v, w, y, z. Il segmento AX, tagliato sull'asse, sia chiamato x. Le tangenti siano VB, WC, YD, ZE, le quali incontrano l'asse rispettivamente nei punti B, C, D, E. Ora si indichi con dx un certo segmento preso arbitrariamente, e si indichi con dv (o dw, o dy, o dz) il segmento che sta a dx come v (o w, o y, o z) sta a XB (o XC, o XD, o XE) cioè dv (o dw, o dy, o dz) è la differenza delle v (o delle w, o delle y, oppure delle z).

Commento[34]

Consideriamo per maggior semplicità un'unica curva come nella seguente figura:



[33]Tutte le traduzioni della *Nova methodus* sono tratte da *Leibniz 84. Il decollo enigmatico del calcolo differenziale*, a cura di P.Dupont e S.Roero, Rende, Mediterranean Press, 1991.

[34]Per una critica al testo di Leibniz si rimanda a E.Giusti, *Piccola storia del calcolo infinitesimale dall'antichità al Novecento*, Pisa, Istituti editoriali e poligrafici, 2007.

Cominciamo con l'osservare che all'epoca di Leibniz non esiste il concetto di funzione così come viene concepito oggi, anche se effettivamente il termine "funzione" viene usato - presumibilmente per la prima volta - proprio da Leibniz , ma con un significato diverso. Al posto del concetto moderno di funzione troviamo, come già abbiamo visto fin da Descartes, il concetto di relazione fra variabili, relazione che può essere espressa da un'equazione del tipo $F(x, y) = 0$.

Si noti anche che Leibniz usa la tangente per definire i differenziali (o differenze, come le chiama Leibniz), ma non la definisce se non molto più avanti:

> trovare la tangente è condurre una retta che congiunga due punti aventi una distanza infinitamente piccola, ossia tracciare il lato prolungato di un poligono infinitangolo, che per noi equivale alla curva

Poiché una curva è un poligono di lati infiniti, la tangente può essere intesa come il prolungamento di uno di questi lati infinitesimi, ovvero come la retta che unisce due punti infinitamente vicini P e Q che giacciono sulla curva. Se $DA = t$ è la sottotangente, $P(x, y)$ e $Q(x + dx, y + dy)$ i due punti, possiamo sfruttare la similitudine dei due triangoli PAD e QRP (triangolo caratteristico di Pascal) per stabilire che

$$DA : PA = PR : QR \qquad \text{cioè} \qquad t : y = dx : dy$$

Da qui si ricava semplicemente la sottotangente $t = y\frac{dx}{dy}$ che, lo ricordiamo ancora, è un parametro geometrico che definisce univocamente la tangente.

Nella definizione di differenziale né dx, né dv etc sono definite come grandezze infinitesime, ma di fatto sono considerate tali. Osserviamo infatti che per stabilire la precedente proporzione i punti P e Q non devono giacere sulla curva, ma sulla retta tangente. Dunque se dx fosse un segmento finito i punti P e Q continuerebbero a giacere sulla tangente e non sulla curva, come invece si è assunto: proprio il fatto che dx sia infinitesimo consente di identificare a un certo punto l'appartenenza alla curva con quella alla tangente.

Una volta stabilito che la sottotangente si esprime come $t = y\frac{dx}{dy}$, occorre stabilire delle regole di differenziazione, cioè delle regole per calcolare il rapporto $\frac{dx}{dy}$ a partire dall'equazione della curva. I differenziali sono infatti i parametri principali su cui si fonda il metodo leibniziano: la sottotangente perde il ruolo di protagonista e diventa un parametro geometrico che entra in gioco solo alla fine del calcolo vero e proprio.

W.G.Leibniz, *Nova Methodus*, 1684

> His positis, calculi regulae erunt tales.
>
> Sit a quantitas data constans, erit da aequalis 0, et $d\,\overline{ax}$ erit aequalis adx. Si sit y aequalis v (seu ordinata quaevis curvae YY aequalis cuivis ordinatae respondenti curvae VV) erit dy aequ. dv. Jam *Additio et Subtractio*: si sit $z - y + w + x$ aequ. v, erit $d\,\overline{z - y + w + x}$ seu dv aequ. $dz - dy + dw + dx$ *Multiplicatio*: $d\,\overline{xv}$ aequ. $x\,dv + v\,dx$, seu posito y aequ. xv, fiet dy aequ. $x\,dv + v\,dx$. In arbitrio enim est vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum, et x

et dx eodem modo in hoc calculo tractari, ut y et dy, vel aliam literam indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam, non dari semper regressum a differentiali Aequatione, nisi cum quadam cautione, de quo alibi. Porro *Divisio*: $d\,\frac{v}{y}$ vel (posito z aequ. $\frac{v}{y}$) dz aequ. $\frac{\pm v\,dy \mp y\,dy}{yy}$

Traduciamo il passo in un linguaggio più moderno:

Fatte queste premesse, le regole del calcolo saranno le seguenti:

Sia a una quantità costante, sarà $da = 0$ e $d(ax) = adx$.

Se è $y = v$ (ossia se un'ordinata qualsiasi della curva YY è uguale ad una qualsiasi ordinata simmetrica della curva VV) sarà $dy = dv$.

Ora l'*Addizione* e la *Sottrazione*: se

$$z - y + w + x = v$$

risulterà

$$d(z - v + w + x) \quad \text{cioè} \quad dv = dz - dy + dw + dx$$

La *Moltiplicazione*

$$d(xv) = xdv + vdx$$

ovvero posto $y = xv$ sarà

$$dy = xdv + vdx$$

poiché è ad arbitrio usare la forma xv oppure, al posto di questa, abbreviando, la lettera y.

Si deve osservare che, in questo calcolo, x e dx sono trattati come y e dy o qualsiasi altra variabile e il suo differenziale. E' anche da notarsi che non sempre è possibile risalire dall'equazione differenziale all'equazione primitiva, se non con una certa cautela, di cui si dirà altrove. Infine, la *Divisione*:

$d\,\frac{x}{y}$ oppure dz (posto $\frac{v}{y} = z$) risulta uguale a $\frac{\pm v\,dy \mp y\,dv}{y^2}$ "

Si osservi che Leibniz enuncia queste regole ma non le dimostra per non svelare la natura inequivocabilmente infinitesimale dei differenziali. Si voglia infatti dimostrare che $d(xy) = ydx + xdy$

Per la definizione $d(xy) = (x + dx)(y + dy) - xy = xdy + ydx + dxdy$ Poiché dx e dy sono infinitesimi, il loro prodotto sarà infinitamente piccolo rispetto agli altri addendi e quindi si potrà trascurare, ottenendo così la formula da dimostrare.

Attività

Differenziazione di potenze e radici Di seguito viene riportata la traduzione del passo leibniziano in cui sono omessi i secondi membri delle uguaglianze, i quali devono essere ricostruiti sulla base delle regole enunciate in precedenza.

Potenze

$$dx^a =$$

Per esempio $dx^3 =$

$$d\frac{1}{x^a} =$$

per esempio se $w = \frac{1}{x^3}$ sarà

$$dw =$$

Radici

$$d\sqrt[b]{x^a} =$$

Di qui

$$d\sqrt{y} =$$

poiché in questo caso a è 1 e b è 2.

$$d\frac{1}{\sqrt[b]{x^a}} =$$

Si possono confrontare i risultati con il testo originale:

W.G.Leibniz, *Nova Methodus*, 1684

> *Potentiae.* $dX^a = a\dot{X}^{a-1}\,dx$, Exempli gratia $dX^3 = 3X^2\,dx$; $d\frac{1}{X^a} = \frac{a\,dx}{X^{a+1}}$, ex. gratia si w sit $= \frac{1}{X^3}$ fiet $dw = -\frac{3\,dx}{x^4}$.
> *Radices* $d\sqrt[b]{X^a} = \frac{a}{b}\,dx\sqrt[b]{X^{a-b}}$. (Hinc $d\sqrt[2]{y} = \frac{dy}{2\sqrt[2]{y}}$ nam eo casu a est 1 & b 2, ergo $\frac{a}{b}\,dx\sqrt[b]{X^{a-b}}$ est $\frac{1}{2}\sqrt[2]{y^{-1}}$ iam y^{-1} idem est, quod $\frac{1}{y}$ ex natura exponentium pregressionis Geometricae, & $\sqrt[2]{\frac{1}{Y}}$ est $\frac{1}{\sqrt[2]{Y}}$) $d\frac{1}{\sqrt[b]{X^a}} = \frac{-b\,dx}{a\sqrt[b]{X^{b-a}}}$.
> Suffecisset autem regula potentiae integrae tam ad fractas quam ad radices determinandas, potentia enim fit fracta cum exponens est negativus, & mutatur in radicem cum exponens est fractus: sed malui consequentias istats ipse deducere, quam aliis deducendas relinquere, cum sint admodum generales, & crebro occurrentes, & in re per se implicita praestet facilitati consulere.

> Ex cognito hoc velut *Algorithmo*, ut ita dicam, calculi huius quem voco *differentialem*, omnes aliae aequationes differentiales inveniri possunt per calculum communem, maximaeque & minimae, itemque tangentes haberi, ita ut opus non sit tolli fractas aut irrationales, aut alia vincula, quod tamen faciendum fuit secundum Methodos hactenus editas.

Di particolare interesse, la traduzione dell'ultimo passo, che sintetizza esemplarmente il senso profondo dell'invenzione leibniziana del calcolo differenziale:

> Sarebbe invero bastata la regola della potenza intera per determinare i differenziali tanto delle frazioni, quanto delle radici; la potenza infatti diviene una frazione quando l'esponente è negativo e si muta in radice quando l'esponente è frazionario; ma ho preferito dedurre io stesso queste conseguenze, piuttosto che lasciarle ad altri da dedurre, dal momento che sono del tutto generali e si incontrano spesso, e in un argomento per se stesso intricato, è preferibile provvedere alla facilità. Grazie alla conoscenza di questo, per così dire, *Algoritmo* di tale calcolo, che chiamo *differenziale*, tutte le altre equazioni differenziali possono essere trovate con il calcolo comune e possono ottenersi i massimi e i minimi, come pure le tangenti, senza che sia necessario eliminare le frazioni, gli irrazionali o altri vincoli, come invece si doveva fare con i metodi pubblicati fino ad ora.

Attività

Tangente alla parabola Ricordando la proprietà geometrica della sottotangente di una parabola, considerare la parabola di equazione $y = x^2$ e determinare la tangente nel punto $P(x_0, y_0)$ con il metodo di Leibniz.

Una volta stabilite le regole di differenziazione per le somme, le moltiplicazioni e le potenze, si possono calcolare i differenziali di funzioni composte. Ad esempio, si debba calcolare il differenziale della funzione

$$w = \sqrt{xy + \sqrt[5]{\frac{x-y}{xy}}}$$

Si proceda per passi in questo modo

- si ponga

  $$xy + \sqrt[5]{\frac{x-y}{xy}} = z$$

  da cui

  $$w = \sqrt{z}$$

  e quindi

  $$dw = \frac{dz}{2\sqrt{z}}$$

- si ponga

$$\frac{x-y}{xy} = u$$

da cui

$$z = xy + \sqrt[5]{u}$$

e quindi, differenziando,

$$dz = x\ dy + y\ dx + \frac{1}{5}u^{-\frac{4}{5}}\ du$$

- si differenzi, infine, la variabile u

$$du = \frac{dx - dy}{x^2\ y^2}$$

- ricomponendo le variabili, si avrà

$$dw = \frac{x\ dy + y\ dx + \frac{1}{5}(\frac{x-y}{xy})^{-\frac{4}{5}} \frac{dx-dy}{x^2\ y^2}}{2\sqrt{xy + \sqrt[5]{\frac{x-y}{xy}}}}$$

Se dunque $F(x,y) = \sqrt{xy + \sqrt[5]{\frac{x-y}{xy}}} = 0$ fosse l'equazione che rappresenta una curva – pressoché impossibile da trattare con i metodi pre-leibniziani – come si potrebbe esprimere il rapporto $\frac{dx}{dy}$?

Attività

Differenziale di una funzione composta Usando le regole di differenziazione di Leibniz, determinare il differenziale della funzione composta $\sqrt{x^2 + \frac{y}{x}}$

6.3 Il metodo leibniziano e la legge di rifrazione

Nella *Nova methodus* Leibniz propone alcuni esempi di applicazione del proprio metodo e tra questi troviamo il problema della rifrazione della luce, che l'autore aveva già trattato in precedenza nella memoria *Unicum opticae, catoptricae et dioptricae Principium* pubblicata nel 1682 negli *Acta Eruditorum.* In questa memoria, Leibniz enunciava la nota legge di rifrazione, rimandando, per la dimostrazione al proprio metodo dei massimi e minimi, all'epoca inedito ("Ex mea methodo de maximis et minimis, quae super omnes hactenus notas calculum mirifice contrahit").

Il passo che segue, tratto dalla *Nova methodus*, ha lo scopo di mostrare un'applicazione del metodo leibniziano "in esempi più evidenti per l'intelletto" ("in exemplis intellectui magis obviis ostendere").

W.G.Leibniz, *Nova Methodus*, 1684

Data sint duo puncta C & E, & recta SS in eodem cum ipsis plano, quaeritur punctum F in recta SS ita sumendum, ut junctis CF, FE, sit aggregatum rectangulorum, CF in datam h, & FE in datam r, omnium possibilium minimum, hoc est si SS sit mediorum separatrix, & repraesentet densitatem medii, ut aquae, a parte C & r densitatem medii ut aeris, a parte E, quaeritur punctum F tale, ut via a C ad E per F sit omnium possibilium facillima.

Ponamus omnia ista rectangulorum aggregata possibilia, vel omnes viarum possibilium difficultates , repraesentari per ipsas KV, curvae VV ordinatas ad rectam GK normales, quas vocabimus ω, quaerique minimam earum, NM[35]. Quia dantur puncta C & E, dabuntur & perpendiculares ad SS, nempe CP (quam vocabimus c) & EQ (quam e & praeterea PQ (quam p) ipsam autem QF quae sit aeuqualis ipsi GN (vel AX) vocabimus x & CF, f & EF, g; fiet FP, $p - x$

$$f \qquad \text{aequ.} \qquad \sqrt{cc + pp - 2px + xx}$$

seu compendio $\sqrt{l}$ & g aequ. $\sqrt{ee + xx}$ seu compendio $\sqrt{m}$. Habemus ergo ω aequ. $h\sqrt{l}+r\sqrt{m}$, cujus aequationis aequatio differentialis (posito $d\omega$ esse 0, in casu minimae) est

$$0 \qquad \text{aequ.} \qquad -h\,dl : 2\sqrt{l} - r\,dm : 2\sqrt{m}$$

per regulas calculi nostri traditas; jam dl est $-2\,dx - \overline{p + x}$, & dm est $2xdx$, ergo fit

$$h\,\overline{p + x} : f \qquad \text{aequ.} \qquad rx : g$$

Quod si jam haec accomodentur ad dioptricam & ponantur f & g, seu CF & EF aequales, quia eadem manet refractio in puncto F quantacunque ponatur longitudo rectae CF, fiet $h\,\overline{p - x}$ aequ. rx, seu

$$h : r \ :: \ x : \overline{p - x}$$

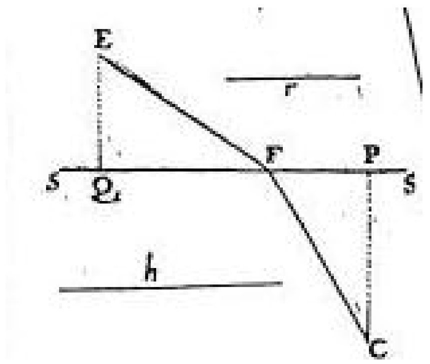
seu h ad r ut QF af FP, hoc est sinus angulorum incidentiae & refractionis FP & QF erunt reciproce ut r & h, densitates mediorum in quibus sit incidentia & refractio. Quae densitas tamen non respectu nostri, sed respectu resistentiae, quam radiis lucis faciunt, intelligenda est. Et habetur ita demonstratio calculi, alibi a nobis in his ipsis Actis exhibiti, quando generale Opticae, Catoptricae & Dioptricae fundamentum exponebamus.

Passiamo direttamente all'interpretazione del passo.

Dati due punti C ed E, che sono posti da parti opposte rispetto a una retta complananare SS e che sono immersi in due mezzi diversi di densità rispettivamente h

[35]Qui Leibniz si sta riferendo alla prima delle figure della tavola riprodotta nel primo estratto.

e r, Leibniz afferma di voler determinare il punto F sulla retta SS tale che la via da C a E per F sia la *più facile di tutte le vie possibili*[36].



Leibniz suppone che il problema sia risolto, cioè che esista un punto F sulla retta SS tale da minimizzare l'espressione

$$CF\ h\ +\ EF\ r$$

che "misura" la difficoltà del cammino da C a E via F. In termini moderni, infatti, potremo dire che per Leibniz la difficoltà di un cammino è data dal prodotto fra la lunghezza dello stesso e la densità del mezzo nel quale si muove il corpo[37]. Poiché i punti E e C sono assegnati, saranno noti anche i segmenti $PQ = p, EQ = e, PC = c$. Sia $FQ = x$ e $PF = p - x$. La relazione precedente assume la forma

$$h\sqrt{(p-x)^2 + c^2} + r\sqrt{x^2 + e^e}$$

ovvero, ponendo $p^2 + x^2 + c^2 - 2px = l$ e $x^2 + e^2 = m$ si ottiene l'espressione

$$w = h\sqrt{l} + r\sqrt{m}$$

Per il principio di minimo stabilito da Leibniz[38], dovrà essere $dw = 0$ e quindi

[36]Questo è proprio il *principio unico* che dà il titolo alla memoria del 1682 e che unifica l'ottica, la catottrica e la diottrica. Scrive infatti Leibniz all'inizio del suo lavoro: "L'ipotesi primaria di questa scienza comune, dalla quale si determina la direzione di tutti i raggi luminosi in modo geometrico, può formularsi in questo modo: La luce perviene da un punto raggiante al punto che dev'essere illuminato attraverso la via più facile tra tutte quelle possibili ...". Anche Fermat, come Leibniz, era arrivato a determinare la legge di rifrazione attraverso un principio di minimo. Il matematico francese, però, riteneva che si dovesse minimizzare il tempo necessario per andare da un punto all'altro.

[37]Questo è in effetti quanto afferma Leibniz nella memoria del 1682, ma espressa con il linguaggio della teoria delle proporzioni.

[38]Scrive Leibniz: "E poiché le ordinate v ora crescono ora decrescono, dv sarà una quantità ora positiva ora negativa, e nel primo caso la tangente ${}_1V_1B$ è tracciata verso A , nel secondo ${}_2V_2B$ dalla parte opposta. Né l'una né l'altra cosa avviene poi in un punto intermedio M, nel caso in cui le v non crescono né decrescono, ma sono stazionarie e anzi diventa $dv = 0$, dove non importa se la quantità è positiva o negativa perché $+0 = -0$ e in quel punto la v, cioè l'ordinata LV è *massima* (oppure, se si volgesse la convessità all'asse, sarebbe *minima* e la tangente alla curva in M non è tracciata né al di sopra di X dalla parte di A, ivi avvicinandosi all'asse, né al di sotto di X, dalla parte opposta, ma è parallela all'asse". La figura di riferimento è quella che si trova nel primo estratto della *Nova methodus*. La traduzione del precedente passo leibniziano è tratta da *Leibniz 84*, cit., p. 29.

$$dw = h\frac{dl}{2\sqrt{l}} + r\frac{dm}{2\sqrt{m}} = 0$$

ma $dl = (2x - 2p)\ dx$ e $dm = 2x\ dx$ da cui

$$h\frac{x-p}{\sqrt{l}} + r\frac{x}{\sqrt{m}} = 0$$

Se si pone $CF = FE$, ovvero $l = m$ si ottiene infine

$$rx = h(p - x)$$

ovvero

$$r : h = (p - x) : x$$

Ma i segmenti $PF = p - x$ e $FQ = x$ sono proporzionali rispettivamente ai seni degli angoli di rifrazione (α_r) e di incidenza (α_i), da cui la legge di rifrazione

$$r : h = \sin\alpha_r : \sin\alpha_i$$

7 Bibliografia

7.1 Fonti primarie

U. Bottazzini, P. Freguglia, L. Toti Rigatelli, *Fonti per la storia della matematica*, Firenze, Sansoni 1992. Questo manuale, ormai fuori commercio, raccoglie passi selezionati e tradotti in italiano tratti da opere di matematici.

R. Descartes, *La Géométrie*, Leiden 1637. L'edizione anglo-francese curata da D.E.Smith e M.Latham pubblicata nel 1925, si può scaricare alla pagina

`http://archive.org/details/geometryofrene00desc`

R.Descartes, *Opere scientifiche*, a cura di E.Lojacono, Torino, UTET 1983. La più recente traduzione italiana della *Geometria* è apparsa nel 2009 in Cartesio, *Opere 1637-1649*, a cura di G.Belgioioso, Milano, Bompiani.

Euclide, *Gli Elementi*, a cura di A.Frajese e L.Maccioni, Torino, UTET 1970. L'edizione inglese (sostanzialmente l'edizione di T.Heath) è consultabile all'indirizzo

`http://aleph0.clarku.edu/ djoyce/java/elements/toc.html`

di particolare impatto visivo l'edizione di Byrne dei primi sei libri euclidei

`http://www.math.ubc.ca/ cass/Euclid/byrne.html`

Euclide. Tutte le opere, a cura di F.Acerbi, Milano, Bompiani 2007.

P. de Fermat, *Œuvres*, a cura di P. Tannery, C. Henry, 4 voll., Parigi, Gauthiers-Villars 1891-1912. Le opere sono scaricabili anche alla pagina

`http://www.wilbourhall.org/index.html`]

Leibniz 84. Il decollo enigmatico del calcolo differenziale, a cura di P.Dupont e S.Roero, Rende, Mediterranean Press, 1991. Questo volume contiene il testo della *Nova methodus*, la sua traduzione italiana nonché un'analisi critica dei contenuti.

7.2 Letteratura secondaria

La letteratura su questi argomenti è vastissima. Segnaliamo solo alcuni titoli, relativamente semplici da trovare, senza nessuna pretesa di completezza.

C.B.Boyer, *Storia del calcolo e il suo sviluppo concettuale*, Prefazione e aggiornamenti a cura di A.Guerraggio, Milano, Bruno Mondadori 2007.

G. Giorello, C. Sinigaglia, *Fermat. I sogni di un magistrato all'origine della matematica moderna*, Le Scienze, Collana *I grandi della scienza*, n. 24, 2001.

E. Giusti, *A tre secoli dal calcolo: la questione delle origini*, "Bollettino U.M.I.", 3-A (1984), pp. 1-55.

E. Giusti, *Dalla* Géométrie *al calcolo: il problema delle tangenti e le origini del calcolo infinitesimale*, in *Storia della scienza*, Roma, Istituto dell'Enciclopedia Treccani, volume V, pp.453-465.

E.Giusti, *Ipotesi sulla natura degli oggetti matematici*, Torino, Bollati Boringhieri 1999.

E. Giusti, *Piccola storia del calcolo infinitesimale dall'antichità al Novecento*, Pisa, Istituti editoriali e poligrafici internazionali, 2007.

E. Lojacono, *Cartesio. La spiegazione del mondo fra scienza e metafisica*, Le Scienze, Collana *I grandi della scienza*, n.16 ottobre 2000.

M.S. Mahoney, *The Mathematical Career of Pierre de Fermat (1601-1665)*, second edition, Princeton University Press 1994.

M. Mugnai, *Leibniz. Vita di un genio tra logica, matematica e filosofia*, Le Scienze, Collana *I grandi della scienza*, n.29, novembre 2002.