Corso di Laurea Magistrale in Matematica

TEORIA DELLE RAPPRESENTAZIONI
Jacopo Gandini

Foglio di esercizi 1

25 febbraio 2022

Esercizio 1. Mostrare che $\mathbb{R}^3$ con il prodotto vettoriale è un'algebra di Lie.

Esercizio 2. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione 3 su un campo $\mathbb{k}$, con base x, y, z.
i) Mostrare che le seguenti relazioni, estese per bilinearità, definiscono una struttura di algebra di Lie su V:

$$[x, y] = z, \quad [x, z] = y, \quad [y, z] = [x, x] = [y, y] = [z, z] = 0$$

ii) Mostrare che, se $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, l'algebra di Lie sopra definita non è isomorfa a $\mathbb{R}^3$ con il prodotto vettoriale.

Esercizio 3. Classificare tutte le algebre di Lie di dimensione al più 2, a meno di isomorfismo.

Esercizio 4. Classificare tutte le algebre di Lie L di dimensione 3 con $[L, L] \neq 0$ e $[L, L] \subset Z(L)$.

Esercizio 5. Sia A una $\mathbb{k}$-algebra. Mostrare che il commutatore di due derivazioni di A è ancora una derivazione di A.

Esercizio 6. Descrivere l'algebra delle derivazioni di $\mathbb{k}[x]$, con la sua struttura naturale di algebra di Lie.
[Mostrare che per ogni $p \in \mathbb{k}[x]$ esiste una ed una sola derivazione δ tale che $\delta(x) = p(x)$.]

Esercizio 7. Mostrare che se I e J sono ideali di L, allora anche $[I, J]$ è un ideale di L.

Esercizio 8. i) Mostare che il centro di $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$ è $\mathfrak{s}(n, \mathbb{k})$.
ii) Mostare che $Z(\mathfrak{sl}(n, \mathbb{k}))$ è banale se $\mathrm{char}(\mathbb{k})$ non divide n, ed è $\mathfrak{s}(n, \mathbb{k})$ altrimenti.

Esercizio 9. i) Mostrare che se $\mathrm{char}(\mathbb{k}) = 2$ allora $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{k})$ è nilpotente.
ii) Mostrare che se $\mathrm{char}(\mathbb{k}) > 2$ allora $[\mathfrak{sl}(n, \mathbb{k}), \mathfrak{sl}(n, \mathbb{k})] = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{k})$.

Esercizio 10. Mostrare che $[\mathfrak{t}(n, \mathbb{k}), \mathfrak{t}(n, \mathbb{k})] = [\mathfrak{t}(n, \mathbb{k}), \mathfrak{n}(n, \mathbb{k})] = \mathfrak{n}(n, \mathbb{k})$.

Esercizio 11. Dato $p \geq 1$, indichiamo con $\mathfrak{n}_p(n, \mathbb{k}) \subset \mathfrak{n}(n, \mathbb{k})$ il sottospazio generato dalle matrici e_{ij} con $j - i \geq p$.
i) Mostrare che $[\mathfrak{n}_p(n, \mathbb{k}), \mathfrak{n}_q(n, \mathbb{k})] = \mathfrak{n}_{p+q}(n, \mathbb{k})$.
ii) Mostrare che $[\mathfrak{t}(n, \mathbb{k}), \mathfrak{n}_p(n, \mathbb{k})] = \mathfrak{n}_p(n, \mathbb{k})$.
iii) Calcolare le serie derivate e la serie centrali discendenti di $\mathfrak{t}(n, \mathbb{k})$ e di $\mathfrak{n}(n, \mathbb{k})$.