Corso di Laurea Magistrale in Matematica

TEORIA DELLE RAPPRESENTAZIONI
Jacopo Gandini

Foglio di esercizi 2

4 marzo 2022

Esercizio 1. Sia L un'algebra di Lie. Mostare con un esempio che se $I \subset L$ è un ideale nilpotente con L/I nilpotente, allora non necessariamente L è nilpotente.

Esercizio 2. Sia L un'algebra di Lie di dimensione finita su un campo algebricamente chiuso. Mostrare che L è nilpotente se e solo se ogni sottoalgebra di L di dimensione 2 è abeliana. [Usare il teorema di Engel.]

Esercizio 3. Sia $A \subset \mathfrak{gl}(3, \Bbbk)$ il sottospazio generato dalle due matrici

$$x = e_{1,2} + e_{2,3} \qquad\qquad y = e_{2,1} - e_{3,2}$$

i) Mostrare che A è formato da matrici nilpotenti.
ii) Mostrare che $\Bbbk^3$ non contiene vettori annullati da tutti gli elementi di A.
iii) Mostrare che la sottoalgebra generata da A contiene matrici non nilpotenti.

Esercizio 4. Sia $\mathcal{H}_k$ uno spazio vettoriale di dimensione $2k+1$ sul campo $\Bbbk$, con base

$$p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_k, u$$

Dotiamo $\mathcal{H}_k$ di un'operazione bilineare $[.,.]$, ponendo

$$[p_i, q_j] = \delta_{ij} u, \qquad [p_i, p_j] = [q_i, q_j] = [p_i, u] = [q_j, u] = [u, u] = 0.$$

i) Mostrare che $\mathcal{H}_k$ è un'algebra di Lie nilpotente (detta *algebra di Heisenberg*).
ii) Provate a determinare un omomorfismo iniettivo di $\mathcal{H}_k$ in $\mathfrak{n}(k+2, \Bbbk)$.
iii) Definiamo un'applicazione lineare $\varphi_k : \mathcal{H}_k \to \mathfrak{gl}(\Bbbk[x_1, \dots, x_k])$ come segue

- $\varphi_k(u)$ è l'identità,
- $\varphi_k(p_i)$ è la derivazione per x_i,
- $\varphi_k(q_i)$ è la moltiplicazione per x_i.

Mostrare che φ_k è una rappresentazione di $\mathcal{H}_k$.
iv) Mostrare che $\mathcal{H}_k$ non possiede alcun autovettore comune in $\Bbbk[x_1, \dots, x_k]$. Dunque il teorema di Lie fallisce in dimensione infinita, anche se L è nilpotente.

Esercizio 5. Supponiamo $\mathrm{char}(\Bbbk) = p$, e sia $\varphi_1 : \mathcal{H}_1 \to \mathfrak{gl}(\Bbbk[x])$ la rappresentazione definita nell'esercizio precedente. Consideriamo in $\Bbbk[x]$ il sottospazio $U = \langle x^j \mid j \geq p \rangle$.
i) Mostrare che U è stabile per l'azione di $\mathcal{H}_1$. Dunque φ_1 induce una rappresentazione $\bar{\varphi}_1 : \mathcal{H}_1 \to \mathfrak{gl}(\Bbbk[x]/U)$.
ii) Mostrare che $\mathcal{H}_1$ non possiede alcun autovettore comune in $\Bbbk[x]/U$. Dunque il teorema di Lie fallisce in caratteristica positiva, anche se L è nilpotente.

Esercizio 6. Supponiamo $\Bbbk$ algebricamente chiuso di caratteristica 2. Mostrare che $\mathfrak{sl}(2, \Bbbk)$ è nilpotente, ma non ammette autovettori comuni in $\Bbbk^2$.

Esercizio 7. Sia L un'algebra di Lie.

i) Mostrare che, se $I, J \subset L$ sono ideali risolubili, allora anche $I + J$ è un ideale risolubile. In particolare, L contiene un unico ideale risolubile massimale, detto *radicale* di L e indicato con $\mathrm{Rad}(L)$.

ii) Mostrare $L/\mathrm{Rad}(L)$ non contiene ideali risolubili.

Esercizio 8. Sia L un'algebra di Lie.

i) Mostrare che, se $I, J \subset L$ sono ideali nilpotenti, allora anche $I + J$ è un ideale nilpotente. In particolare, L contiene un unico ideale nilpotente massimale, detto *nilradicale* di L e indicato con $\mathrm{Nil}(L)$.

ii) Mostrare con un esempio che, a differenza dell'analogo risolubile, $L/\mathrm{Nil}(L)$ può in generale contenere ideali nilpotenti non nulli.

Esercizio 9. Sia L un'algebra di Lie su un campo algebricamente chiuso di caratteristica zero. Mostrare che L è risolubile se e solo se $[L, L]$ è nilpotente.

Esercizio 10. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo algebricamente chiuso $\mathbb{k}$, e sia $L \subset \mathfrak{gl}(V)$ una sottoalgebra abeliana. Mostrare che L possiede un autovettore comune in V, indipendentemente dalla caratteristica di $\mathbb{k}$.

Esercizio 11. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{k}$ algebricamente chiuso di caratteristica zero. Siano $x, y \in \mathfrak{gl}(V)$ due endomorfismi di V e sia $z = [x, y]$. Supponiamo che sia x che y commutano con z, mostrare che z è nilpotente.