**Corso di Laurea Magistrale in Matematica**

**TEORIA DELLE RAPPRESENTAZIONI**
**Jacopo Gandini**

**Foglio di esercizi 3**

**11 marzo 2022**

Quando non diversamente specificato, tutti i campi considerati saranno algebricamente chiusi e di caratteristica zero, mentre tutte le algebre di Lie e tutti gli spazi vettoriali considerati avranno dimensione finita.

**Esercizio 1.** Supponiamo che $\mathbb{k}$ non sia necessariamente algebricamente chiuso, e sia $\overline{\mathbb{k}}$ la sua chiusura algebrica. Se $L$ è un'algebra di Lie su $\mathbb{k}$, definiamo un'algebra di Lie $\overline{L}$ su $\overline{\mathbb{k}}$ ponendo $\overline{L} := \overline{\mathbb{k}} \otimes_{\mathbb{k}} L$ ed estendendo il bracket di $L$ per bilinearità.

i) Mostrare che $L$ è risolubile (risp. nilpotente) se e solo se $\overline{L}$ lo è.

ii) Sia $V$ un spazio vettoriale su $\mathbb{k}$ sia $L \subset \mathfrak{gl}(V)$ una sottoalgebra. Mostrare che $L$ è risolubile se e solo se $\mathrm{Tr}(xy) = 0$ per ogni $x \in [L, L]$ e per ogni $y \in L$.

**Esercizio 2.** Mostrare che per ogni $x, y, z \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{k})$ vale

$$\mathrm{Tr}([x, y]z) = \mathrm{Tr}(x[y, z])$$

**Esercizio 3.** Sia $L$ un'algebra di Lie. Data $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ una sua rappresentazione, definiamo

$$\varkappa_\varphi(x, y) = \mathrm{Tr}\left(\varphi(x) \circ \varphi(y)\right)$$

i) Mostrare che $\varkappa_\varphi$ è una forma bilineare simmetrica su $L$, associativa nel senso che

$$\varkappa_\varphi([x, y], z) = \varkappa_\varphi(x, [y, z]) \qquad \forall x, y, z \in L$$

ii) Mostrare che $\ker(\varkappa_\varphi)$ è un ideale di $L$, risolubile se $\varphi$ è iniettiva.

iii) Mostrare che, se $L$ è semisemplice e $\varphi$ è iniettiva, allora $\varkappa_\varphi$ è non degenere.

**Esercizio 4.** Sia $L$ un'algebra nilpotente, mostrare che la forma di Killing di $L$ è identicamente nulla.

**Esercizio 5.** Sia $L$ un'algebra di Lie semisemplice.

i) Sia $I$ un ideale di $L$ e sia $\varphi : I \to A$ un omomorfismo di algebre di Lie. Mostrare che $\varphi$ si estende a un omomorfismo $\widehat{\varphi} : L \to A$.

ii) Sia $\varphi : L \to A$ un omomorfismo suriettivo di algebre di Lie, mostrare che esiste un ideale $I \subset L$ tale che $\varphi$ si restringe a un isomorfismo $I \to A$.

iii) Mostrare con un esempio che le precedenti non valgono in generale se $L$ non è semisemplice.

**Esercizio 6.** Sia $L$ un'algebra di Lie semisemplice.

i) Sia $L = L_1 \oplus \ldots \oplus L_m$ una decomposizione come somma diretta di ideali semplici e sia $I \subset L$ un ideale, mostrare che $I$ è somma diretta di alcuni degli $L_i$. In particolare, gli ideali semplici di $L$ sono precisamente $L_1, \ldots, L_m$.

ii) Mostrare che ideali e quozienti di algebre semisemplici sono semisemplici.

**Esercizio 7.** Sia $L$ un'algebra di Lie. Sia $I \subset L$ un ideale semisemplice e sia $I^\perp$ l'annullatore di $I$ sotto la forma di Killing di $L$, mostrare che $L = I \oplus I^\perp$.

**Esercizio 8.** Mostrare che, se la caratteristica di $\mathbb{k}$ è diversa da 2, allora ogni ideale non banale di $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{k})$ è fatto di matrici scalari. (In particolare, se la caratteristica è dispari e non divide $n$, allora $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{k})$ è un'algebra di Lie semplice).

*Suggerimento.* Osservare che valgono le seguenti relazioni:

- Per ogni $i, j$, vale $[e_{ij}, e_{ji}] = e_{ii} - e_{jj}$.
- Se $i \neq k$, allora per ogni $j$ vale $[e_{ij}, e_{jk}] = e_{ik}$.
- Se $j \neq k$, allora per ogni $i$ vale $[e_{ij}, e_{ki}] = -e_{kj}$.
- Se $x = (x_{ij})$ e se $i \neq j$ allora $[[x, e_{ij}], e_{ij}] = -2x_{ji}\, e_{ij}$.

**Esercizio 9.** Suppniamo $\mathrm{char}(\mathbb{k}) = 3$ e sia $L = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{k})/\mathfrak{s}(3, \mathbb{k})$. Mostrare che $L$ è semplice, e che la forma di Killing di $L$ è identicamente nulla. (In particolare, questo mostra che il criterio di Cartan fallisce in caratteristica positiva.)