Corso di Laurea Magistrale in Matematica

TEORIA DELLE RAPPRESENTAZIONI
Jacopo Gandini

Foglio di esercizi 4

18 marzo 2022

Quando non diversamente specificato, tutti i campi considerati saranno algebricamente chiusi e di caratteristica zero, mentre tutte le algebre di Lie e tutti gli spazi vettoriali considerati avranno dimensione finita.

Esercizio 1. Sia L un'algebra di Lie risolubile.
i) Mostrare che una rappresentazione di L è irriducibile se e solo se ha dimensione 1.
ii) Classificare le rappresentazioni irridicibili di L a meno di isomorfismo.
[Usare il Teorema di Lie.]

Esercizio 2. Sia L un'algebra di Lie semisemplice. Mostrare che tutte le rappresentazioni di L di dimensione 1 sono banali.

Esercizio 3. Mostrare che la rappresentazione standard di $\mathfrak{sl}(n, \Bbbk)$ su $\Bbbk^n$ è irriducibile.

Esercizio 4. i) Mostrare che l'azione di un'algebra di Lie definita sul duale di un L-modulo, sul prodotto tensoriale di due L-moduli e sugli omomorfismi lineari tra due L-moduli sono in effetti azioni di algebre di Lie.
ii) Mostrare che se V, W sono L-moduli allora l'applicazione

$$V^* \otimes W \mapsto \mathrm{Hom}(V, W)$$

definita estendendo per bilinearità

$$\varphi \otimes w \longmapsto \varphi(v)w$$

è un isomorfismo di L-moduli.

Esercizio 5. Sia L un'algebra di Lie. Mostrare che il duale di un L-modulo irriducibile (risp. indecomponibile) è irriducibile (risp. indecomponibile).

Esercizio 6. Consideriamo $\Bbbk^n$ con l'azione standard di $\mathfrak{sl}(n, \Bbbk)$. Indichiamo con $\{e_i\}$ la base canonica di $\Bbbk^n$ e con $\{\varphi_i\}$ la base duale di $(\Bbbk^n)^*$
i) Mostrare che, nella coordinate associate a $\{\varphi_i\}$, l'azione duale di $x \in \mathfrak{sl}(n, \Bbbk)$ su $(\Bbbk^n)^*$ è descritta dalla moltiplicazione per $-x^T$.
ii) Mostrare che se $n > 2$ allora $\Bbbk^n$ e $(\Bbbk^n)^*$ sono $\mathfrak{sl}(n, \Bbbk)$-moduli non isomorfi.
[Suggerimento: Sia $\mathfrak{b}(n, \Bbbk) = \mathfrak{t}(n, \Bbbk) \cap \mathfrak{sl}(n, \Bbbk)$. Mostrare che $\mathfrak{b}(n, \Bbbk)$ stabilizza un'unica retta in $\Bbbk^n$ e in $(\Bbbk^n)^*$, e mostrare che tali rette sono $\mathfrak{b}(n, \Bbbk)$-moduli non isomorfi.]

Esercizio 7. Sia L un'algebra di Lie abeliana e sia V un L-modulo di dimensione finita dove L agisce tramite endomorfismi semisemplici. Mostrare che V si decompone nella somma diretta degli autospazi generalizzati

$$V_\lambda = \{v \in V \mid xv = \lambda(x)v \ \ \forall x \in L\}$$

al variare di $\lambda \in L^*$. In particolare V è completamente riducibile, e si decompone in somma diretta di sottospazi L-stabili di dimensione 1.

Esercizio 8. Sia L un'algebra di Lie semisemplice di dimensione finita, vista come L-modulo tramite la rappresentazione aggiunta. Mostrare che L e L^* sono L-moduli isomorfi.

Esercizio 9. Sia L un'algebra di Lie semplice. Siano $\beta(x, y)$ e $\gamma(x, y)$ due forme bilineari simmetriche associative su L. Mostrare che β e γ sono proporzionali.

[Usare il Lemma di Schur.]

Esercizio 10. Sia $\varkappa$ la forma di Killing di $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{k})$. Mostrare che $\varkappa(x, y) = 2n \operatorname{Tr}(xy)$.

Esercizio 11. Sia L un'algebra di Lie semisemplice e sia $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ una rappresentazione. Mostrare che l'elemento di Casimir di φ è indipendente dalla base di $\varphi(L)$ fissata.