**Corso di Laurea Magistrale in Matematica**

**TEORIA DELLE RAPPRESENTAZIONI**
**Jacopo Gandini**

**Foglio di esercizi 5**

**25 marzo 2022**

Quando non diversamente specificato, tutti i campi considerati saranno algebricamente chiusi e di caratteristica zero, mentre tutte le algebre di Lie e tutti gli spazi vettoriali considerati avranno dimensione finita.

**Esercizio 1.** Sia $V$ un $L$-modulo di dimensione finita e siano $V = \oplus_{i=1}^m V_i = \oplus_{i=1}^n W_i$ due decomposizioni in sottomoduli irriducibili. Mostrare che $m = n$ e che, a meno di riordinare gli indici, $V_i \simeq W_i$ per ogni $i \leq m$. [Usare il Lemma di Schur]

**Esercizio 2.** Sia $V$ un $L$-modulo di dimensione finita e sia $U$ un $L$-modulo irriducibile. Sia $V = \oplus_{i=1}^m V_i$ una decomposizione in irriducibili. Ordiniamo gli indici in modo tale che $V_i \simeq U$ se e solo se $i \leq a$. La *componente isotipica* di $V$ associata ad $U$ è allora il sottomodulo $V_U = \oplus_{i=1}^a V_i$.

i) Mostrare che $V_U$ non dipende dalla decomposizione assegnata.

ii) Mostrare che $a = \dim \mathrm{Hom}(V, U)^L$.

**Esercizio 3.** Un'algebra di Lie $L$ è detta *riduttiva* se $\mathrm{Rad}(L) = Z(L)$. Mostrare che le seguenti sono equivalenti.

i) $L$ è riduttiva.

ii) $L/Z(L)$ è semisemplice.

iii) $L$ è completamente riducibile come $\mathrm{ad}(L)$-modulo.

iv) $[L, L]$ è semisemplice.

v) $L = M \oplus Z(L)$ per qualche ideale semisemplice $M$ (nel qual caso $M = [L, L]$).

vi) Tutti gli ideali abeliani di $L$ sono contenuti in $Z(L)$, e $Z(L) \cap [L, L] = 0$.

vii) Ogni $L$-modulo di dimensione finita dove $Z(L)$ agisce tramite endomorfismi semisemplici è completamente riducibile.

**Esercizio 4.** Sia $L$ un'algebra di Lie semisemplice di dimensione finita, e sia $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ una sua rappresentazione di dimensione finita. Sia $x \in L$ con decomposizione di Jordan astratta $x = x_s + x_n$, mostrare che $\varphi(x) = \varphi(x_s) + \varphi(x_n)$ è la decomposizione di Jordan di $\varphi(x)$.

**Esercizio 5.** Definiamo una rappresentazione di $\mathfrak{sl}(2, \Bbbk)$ sullo spazio dei polinomi $\Bbbk[u, v]$ come segue:

$$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \longmapsto u\frac{d}{dv} \qquad \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right) \longmapsto u\frac{d}{du} - v\frac{d}{dv} \qquad \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) \longmapsto v\frac{d}{du}$$

i) Mostrare che quella sopra è in effetti una rappresentazione di $\mathfrak{sl}(2, \Bbbk)$ su $\Bbbk[u, v]$.

ii) Sia $\mathrm{S}^n(u, v) \subset \Bbbk[u, v]$ il sottospazio dei polinomi omogenei di grado $n$. Mostrare che, sotto l'azione definita, $\mathrm{S}^n(u, v)$ è un sottospazio stabile e irriducibile.

iii) Determinare la decomposizione in spazi peso di $\mathrm{S}^n(u,v)$ sotto l'azione di $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, e calcolare il peso più alto della rappresentazione.

**Esercizio 6.** Supponiamo $\mathrm{char}(\mathbb{k}) = p > 2$, e consideriamo di nuovo la rappresentazione di $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{k})$ su $\mathbb{k}[u,v]$ definita nell'esercizio precedente.

i) Mostrare che se $n < p$, allora $\mathrm{S}^n(u,v)$ è un $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{k})$-modulo irriducibile.

ii) Mostrare che se $n = p$, allora $\mathrm{S}^n(u,v)$ è un $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{k})$-modulo indecomponibile ma non irriducibile. Dunque il teorema di Weyl fallisce se la caratteristica è positiva.

**Esercizio 7.** i) Decomporre in irriducibili la rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{k})$.

ii) Si consideri $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{k})$ come sottoalgebra di $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{k})$, identificata con il blocco $2 \times 2$ in alto a sinistra. Decomporre in irriducibili la rappresentazione ottenuta restringendo la la rappresentazione aggiunta di $\mathfrak{sl}(3,\mathbb{k})$ a $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{k})$

**Esercizio 8.** Decomporre in irriducibili il prodotto tensoriale $V(3) \otimes V(7)$, mostrando che $V(3) \otimes V(7) \simeq V(10) \oplus V(8) \oplus V(6) \oplus V(4)$.