Corso di Laurea Magistrale in Matematica

TEORIA DELLE RAPPRESENTAZIONI
Jacopo Gandini

Foglio di esercizi 6

13 aprile 2022

Quando non diversamente specificato, tutti i campi considerati saranno algebricamente chiusi e di caratteristica zero, mentre tutte le algebre di Lie e tutti gli spazi vettoriali considerati avranno dimensione finita.

Esercizio 1. Sia $L = \mathfrak{gl}(n, \Bbbk)$ e sia $H = \mathfrak{d}(n, \Bbbk)$ la sottoalgebra delle matrici diagonali. Dato $\alpha \in H^*$, indichiamo al solito

$$L_\alpha = \{x \in L \mid [h, x] = \alpha(h)x \quad \forall h \in H\}$$

Sia $\varepsilon_i \in H^*$ la funzione coordinata che associa a una matrice diagonale la sua i-esima coordinata sulla diagonale. Mostrare che $L_{\varepsilon_i - \varepsilon_j} = \Bbbk e_{ij}$ per ogni $i \neq j$, e che come H-modulo vale a decomposizione

$$L = H \oplus \bigoplus_{i \neq j} L_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}.$$

Esercizio 2. Sia $L = \mathfrak{sl}(n, \Bbbk)$. Sia H con l'algebra torale massimale delle matrici diagonali, e sia $\Phi \subset H^*$ l'insieme di radici associato.

i) Per $\alpha \in \Phi$, determinare gli elementi associati h_α, t_α in H.

ii) Calcolare i prodotti scalari (α, β) al variare di $\alpha, \beta \in \Phi$.

iii) Calcolare le stringhe attraverso le varie radici, e calcolare gli interi di Cartan $\alpha(h_\beta)$ al variare di $\alpha, \beta \in \Phi$.

Esercizio 3. Sia $L = \mathfrak{so}(2n+1, \Bbbk)$ l'algebra ortogonale dispari, oppure $L = \mathfrak{sp}(2n, \Bbbk)$ l'algebra simplettica, oppure $L = \mathfrak{so}(2n, \Bbbk)$ l'algebra ortogonale pari. Poniamo $m = 2n+1$ nel primo caso e $m = 2n$ negli altri casi.

i) Mostrare che $H = L \cap \mathfrak{d}(m, \Bbbk)$ è una sottoalgebra torale massimale in L.

ii) Descrivere l'insieme dei pesi di H in L in termini delle prime n funzioni coordinate $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ su $\mathfrak{d}(m, \Bbbk)$.

In effetti L è un'algebra semplice: i pesi calcolati sono dunque le radici di L risp. ad H.

[Usare la base descritta nel libro di Humphreys, sezione 1.2]

Esercizio 4. Sia L un'algebra di Lie semisemplice con algebra torale massimale H.

i) Per $h \in H$, mostrare che il centralizzatore $C_L(h)$ è una sottoalgebra riduttiva di L.

ii) Mostrare che l'insieme degli $h \in H$ tali che $C_L(h) = H$ forma un aperto $H^{\mathrm{reg}} \subset H$.

iii) Determinare H^{reg} nel caso di $\mathfrak{sl}(n, \Bbbk)$, con H la sottoalgebra delle matrici diagonali.

Esercizio 5. Sia L un'algebra di Lie semisemplice e supponiamo che L contenga una sottoalgebra torale massimale di dimensione 1. Mostrare che $L \simeq \mathfrak{sl}(2, \Bbbk)$.

Esercizio 6. Sia L un'algebra di Lie semisemplice, sia $H \subset L$ una sottoalgebra torale massimale e sia $\Phi \subset H^*$ il sistema di radici associato. Mostrare che L è semplice se e solo se Φ è irriducibile.

Esercizio 7. Sia $\Phi \subset E$ un sistema di radici in uno spazio vettoriale euclideo E, con base $\Delta \subset \Phi$ e con gruppo di Weyl W. Definiamo la *coradice* associata ad $\alpha \in \Phi$ come

$$\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha, \alpha)}$$

Poniamo $\Phi^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Phi\}$ e $\Delta^\vee = \{\alpha^\vee \mid \alpha \in \Delta\}$.

i) Mostrare che $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \beta^\vee, \alpha^\vee \rangle$ per ogni $\alpha, \beta \in \Phi$. Dedurre che $\Phi^\vee \subset E$ è anch'esso un sistema di radici con gruppo di Weyl W, detto *sistema di radici duale* di Φ.
ii) Mostrare che $(\Phi^\vee)^\vee = \Phi$.
iii) Mostrare che $\Delta^\vee$ è una base per $\Phi^\vee$.
iv) Mostrare che se Φ è irriducibile, allora anche $\Phi^\vee$ è irriducibile.
v) Mostrare che $\frac{||\beta^\vee||}{||\alpha^\vee||} = \frac{||\alpha||}{||\beta||}$, per ogni $\alpha, \beta \in \Phi$.

Esercizio 8. Sia $\Phi \subset E$ un sistema di radici con base Δ e gruppo di Weyl W. Sia $w \in W$ e sia $\Phi^+(w) = \{\alpha \in \Phi^+ \mid w(\alpha) \in \Phi^-\}$ l'insieme delle inversioni di w. Mostrare che la lunghezza di w coincide con la cardinalità di $\Phi^+(w)$.

[Presa una scrittura ridotta $w = s_{\alpha_1} \cdots s_{\alpha_n}$ e detto $v = s_{\alpha_1} w$, mostrare che $\Phi^+(v) \subset \Phi^+(w)$.]