Corso di Laurea Magistrale in Matematica

TEORIA DELLE RAPPRESENTAZIONI
Jacopo Gandini

Foglio di esercizi 7

29 aprile 2022

Quando non diversamente specificato, tutti i campi considerati saranno algebricamente chiusi e di caratteristica zero, mentre tutte le algebre di Lie e tutti gli spazi vettoriali considerati avranno dimensione finita.

Esercizio 1. Realizziamo come visto in classe il gruppo simmetrico $\mathfrak{S}_n$ come il gruppo di Weyl del sistema di radici di tipo A_{n-1}

$$\Phi = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$$

Relativamente alla base

$$\Delta = \{\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} \mid i < n\}$$

mostrare che se $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ vale

$$\Phi^+(\sigma) = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid i < j,\ \sigma(i) < \sigma(j)\}$$

Esercizio 2. Sia Φ un sistema di radici con base Δ e gruppo di Weyl W. Mostrare che l'applicazione

$$W \longrightarrow \{\pm 1\} \qquad\qquad w \longmapsto (-1)^{\ell(w)}$$

è un omomorfismo di gruppi.

Esercizio 3. Sia Φ un sistema di radici con gruppo di Weyl W, sia Λ il reticolo dei pesi integrali di Φ e sia Λ^+ il semigruppo dei pesi integrali dominanti.

i) Mostrare che se $\lambda \in \Lambda^+$ e $w \in W$, allora $w\lambda \preceq \lambda$. [Ragionare per induzione sulla lunghezza di w: data una scrittura ridotta $w = s_{\alpha_1} \dots s_{\alpha_n}$, considerare l'elemento $v = ws_{\alpha_n}$.]

ii) Mostrare che Λ^+ è un *dominio fondamentale* per l'azione di W su Λ: vale a dire, ogni W-orbita in Λ interseca Λ^+ esattamente in un punto. [Ragionare in analogia con la prova del fatto che tutte le basi di Φ sono coniugate tramite W.]

Esercizio 4. i) Sia Φ un sistema di radici irriducibile. Mostrare che Φ e $\Phi^\vee$ sono isomorfi a meno che Φ non sia di tipo B o di tipo C.

ii) Mostrare che il duale di un sistema di radici di tipo B_n è di tipo C_n, e viceversa.

Esercizio 5. Mostrare che un sistema di radici è irriducibile se e solo se il diagramma di Dynkin associato a una sua base è connesso.

Esercizio 6. Relativamente alle realizzazioni dei sistemi di radici classici e delle loro basi viste in classe e richiamate qua sotto, mostrare che i pesi fondamentali sono descritti come segue:

(A_{n-1})

$$\Phi = \{\varepsilon_i - \varepsilon_j \mid 1 \leq i \neq j \leq n\}$$

$$\alpha_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}, \qquad \omega_i = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i - \tfrac{i}{n}(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n) \qquad \text{se } i \leq n-1$$

(B_n)

$$\Phi = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

$$\alpha_i = \begin{cases} \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} & \text{se } i \leq n-1 \\ \varepsilon_n & \text{se } i = n \end{cases}, \qquad \omega_i = \begin{cases} \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i & \text{se } i \leq n-1 \\ \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n) & \text{se } i = n \end{cases}$$

(C_n)

$$\Phi = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\} \cup \{\pm 2\varepsilon_i \mid 1 \leq i \leq n\}$$

$$\alpha_i = \begin{cases} \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} & \text{se } i \leq n-1 \\ 2\varepsilon_n & \text{se } i = n \end{cases}, \qquad \omega_i = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i \quad \text{se } i \leq n$$

(D_n)

$$\Phi = \{\pm\varepsilon_i \pm \varepsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n\}$$

$$\alpha_i = \begin{cases} \varepsilon_i - \varepsilon_{i+1} & \text{se } i < n \\ \varepsilon_{n-1} + \varepsilon_n & \text{se } i = n \end{cases}, \qquad \omega_i = \begin{cases} \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_i & \text{se } i \leq n-2 \\ \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) & \text{se } i = n-1 \\ \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n) & \text{se } i = n \end{cases}$$

Esercizio 7. Sia L un'algebra di Lie semisemplice, sia $H \subset L$ una sottoalgebra torale massimale sistema di radici associato $\Phi \subset H^*$ e sia $\Delta \subset \Phi$ una base. Definiamo

$$B_\Delta = H \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} L_\alpha, \qquad N_\Delta = \bigoplus_{\alpha \in \Phi^+} L_\alpha$$

i) Mostrare che B_Δ è una sottoalgebra risolubile massimale di L, la cui sottoalgebra derivata coincide con N_Δ.

ii) Sia V un L-modulo, e sia $v \in V$ un autovettore comune per B_Δ. Mostrare che $x.v = 0$ per ogni $x \in N_\Delta$.

Esercizio 8. Sia $L = \mathfrak{sl}(n, \Bbbk)$. Fissiamo la sottoalgebra torale massimale H delle matrici diagonali e la sottoalgebra di Borel B delle matrici triangolari superiori. Mostrare che i vettori massimali della rappresentazione standard di L su $\Bbbk^n$ sono tutti proporzionali, e calcolarne il peso associato.