Corso di Laurea Magistrale in Matematica

TEORIA DELLE RAPPRESENTAZIONI
Jacopo Gandini

Foglio di esercizi 8

6 maggio 2022

Quando non diversamente specificato, tutti i campi considerati saranno algebricamente chiusi e di caratteristica zero, mentre tutte le algebre di Lie e tutti gli spazi vettoriali considerati avranno dimensione finita.

Esercizio 1. i) Mostrare che, per ogni insieme I, esiste (unica a meno di isomorfismo unico) l'algebra di Lie L libera su I.

ii) Sia L un'algebra di Lie libera su un insieme I. Mostrare che l'applicazione associata $I \to L$ è iniettiva, e che l'immagine di tale applicazione è un insieme di vettori linearmente indipendenti che genera L come algebra.

[Detto V uno spazio vettoriale con base I, considerare la sottoalgebra di Lie generata da V nell'algebra tensoriale $\mathcal{T}(V)$.]

Esercizio 2. Sia L un'algebra di Lie libera su un insieme I. Sia $I \to L$ l'applicazione associata, e sia $V_I \subset L$ il sottospazio generato dall'immagine di I. Mostrare che l'algebra universale inviluppante $\mathcal{A}(L)$ è isomorfa all'algebra tensoriale $\mathcal{T}(V_I)$.

Esercizio 3. Descrivere l'algebra di Lie libera su un insieme costituito da un solo elemento.

Esercizio 4. Sia L un'algebra di Lie semisemplice con base $\{x_1, \dots, x_n\}$, e sia $\{y_1, \dots, y_n\}$ la base duale di L rispetto alla forma di Killing. Nell'algebra inviluppante $\mathfrak{A}(L)$, definiamo l'*elemento di Casimir universale* $c_L = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

i) Mostrare che c_L è indipendente dalla scelta della base di L.

ii) Mostrare che c_L è nel centro di $\mathfrak{A}(L)$.

iii) Mostrare che c_L agisce scalarmente su ogni rappresentazione irriducibile di L.

iv) Sia $\varphi : L \to \mathfrak{gl}(V)$ una rappresentazione, estesa a un omomorfismo di algebre associative unitarie $\varphi : \mathfrak{A}(L) \to \mathrm{End}(V)$. Mostrare che, se L è semplice, allora $\varphi(c_L)$ è un multiplo non nullo dell'elemento di Casimir c_φ associato alla rappresentazione.

[Ripercorrere le analoghe proprietà viste per l'elemento di Casimir associato a una rappresentazione di L]

Esercizio 5. Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\Bbbk$ di caratteristica 0, e sia $x \in \mathrm{End}(V)$ un endomorfismo localmente nilpotente (vale a dire: per ogni $v \in V$ esiste $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tale che $x^n v = 0$). Definiamo

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Mostrare che $\exp(x)$ definisce un'isomorfismo di V in se' stesso, con inverso $\exp(-x)$.

Esercizio 6. Sia A un'algebra su un campo $\Bbbk$ di caratteristica 0, e sia $\delta \in \mathrm{Der}(A)$ una derivazione localmente nilpotente. Mostrare che $\exp(\delta) \in \mathrm{Aut}(A)$, con inverso $\exp(-\delta)$.

Esercizio 7. Sia $L \subset \mathfrak{gl}(V)$ una sottoalgebra di Lie, e sia $x \in L$ un elemento nilpotente in $\mathrm{End}(V)$. Mostrare che $\exp(\mathrm{ad}(x)) \in \mathrm{Aut}(L)$ coincide con il coniugio per $\exp(x) \in \mathrm{GL}(V)$.