Corso di Laurea Magistrale in Matematica

TEORIA DELLE RAPPRESENTAZIONI
Jacopo Gandini

Foglio di esercizi 9

13 maggio 2022

Tutti i campi considerati saranno algebricamente chiusi e di caratteristica zero, mentre tutte le algebre di Lie e tutti gli spazi vettoriali considerati avranno dimensione finita. Denoteremo con L un'algebra di Lie semisemplice con una fissata sottoalgebra torale massimale H, il cui sistema di radici associato è indicato con Φ. Indicheremo con W il gruppo di Weyl di Φ e con Λ l'associato reticolo dei pesi integrali. Con $\Delta \subset \Phi$ indicheremo una base fissata, e con $\Lambda^+ \subset \Lambda$ il semigruppo dei pesi integrali dominanti. Dato $\lambda \in \Lambda^+$ denotiamo

$$\Pi(\lambda) := \{w\mu \mid w \in W, \mu \in \Lambda^+ \text{ t.c. } \mu \preceq \lambda\} = \Pi(V(\lambda))$$

Esercizio 1. Sia $L = \mathfrak{so}(5)$, con pesi fondamentali ω_1 e ω_2. Disegnare l'insieme di pesi $\Pi(\omega_1 + \omega_2)$, evidenziando le stringhe definite dalle radici attraverso i vari pesi.

Esercizio 2. Sia $\lambda \in \Lambda^+$. Mostrare che $0 \in \Pi(\lambda)$ se e solo se λ è nel reticolo delle radici.

Esercizio 3. Dato $\lambda \in \Lambda^+$, sia $\lambda^* \in \Lambda^+$ tale che $V(\lambda)^* \simeq V(\lambda^*)$ come L-moduli.
i) Mostrare che $\Pi(\lambda^*) = -\Pi(\lambda)$,
ii) Mostrare che $\lambda^* = -w_0\lambda$, dove $w_0 \in W$ è l'unico elemento che manda Δ in $-\Delta$.

Esercizio 4. Siano $\lambda, \mu \in \Lambda^+$ e poniamo $V = V(\lambda)$, $W = V(\mu)$. Mostrare che

$$\Pi(V \otimes W) = \{\nu + \nu' \mid \nu \in \Pi(\lambda), \nu' \in \Pi(\mu)\},$$

e che per $\nu \in \Pi(\lambda), \nu' \in \Pi(\mu)$ vale la formula

$$\dim(V \otimes W)_{\nu+\nu'} = \sum_{\pi+\pi'=\nu+\nu'} \dim V_\pi \cdot \dim W_{\pi'}$$

Esercizio 5. Siano $\lambda, \mu \in \Lambda^+$, mostrare che $V(\lambda + \mu)$ compare sempre nella decomposizione in irriducibili del prodotto tensoriale $V(\lambda) \otimes V(\mu)$, con molteplicità 1.

Esercizio 6. Siano $\omega_1, \ldots, \omega_n$ i pesi fondamentali di Φ, e sia $\lambda \in \Lambda^+$. Mostrare che esistono interi non negativi $a_1, \ldots, a_n$ tali che $V(\lambda)$ compare nella decomposizione in L-moduli irriducibili di

$$V(\omega_1)^{\otimes a_1} \otimes \ldots \otimes V(\omega_n)^{\otimes a_n}$$