Verifica della preparazione di Analisi Matematica I

1. Numeri reali e complessi. Successioni. Funzioni elementari

(1) Sia $A \subset \mathbb{R}$, non vuoto, superiormente limitato e privo di massimo. Dimostrare che

$$\lambda := \sup A.$$

è un punto di accumulazione di A

(2) Determinare tutte le radici dell'equazione

$$(z+1)^3 \; = \; i, \quad z \in \mathbb{C}$$

(3) Risolvere le equazioni

$$2\,z^3 \; = \; i\,|z|^2, \qquad z^2 \; = \; \bar{z}$$

(4) Siano $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$ le radici $n-$esime dell'unità. Dimostrare che

$$z_0 + z_1 + \cdots + z_{n-1} = 0.$$

(5) Sia $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dimostrare che esiste una successione (z_n) in $\mathbb{C}$ tale che

$$(z_n)^n \; = \; \alpha \;\; \forall n \; \in \; \mathbb{N}, \quad z_n \to -1 \;\text{ per }\; n \; \to \; +\infty.$$

(6) Risolvere la disuguaglianza

$$\Re\,(z) \;\; > \;\; \Im\,(z^2)$$

(7) Siano x, y numeri reali strettamente positivi con $x \; < \; y$. Dimostrare che

$$x \; < \sqrt{x\,y} \; < \; \frac{x\,+\,y}{2} \; < \; y.$$

(8) Siano a, b numeri reali positivi. Dimostrare che esiste

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a^n \, + \, b^n}$$

e lo si calcoli.

(9) Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1! + 2! + \cdots + n!}{n!}.$$

(10) L'insieme

$$\{\sin(n) \; / \; n \; \in \; \mathbb{N}\}$$

ha estremo superiore in $\mathbb{R}$?

(11) La successione
$$\left(\frac{n\,\sin(n)}{2\;+\;\cos(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$
ha sottosuccessioni monotone?

(12) Calcolare il minimo limite e il massimo limite della successione
$$(n\;+\;(-1)^n\,n)_{n\in\mathbb{N}}$$

(13) Sia (a_n) una successione in $\mathbb{R}$, limitata. Sia poi (a_{k_n}) una sottosuccessione di (a_n) convergente a $l\in\mathbb{R}$. Dimostrare che
$$\liminf_{n\to+\infty} a_n\;\le\;l\;\le\;\limsup_{n\to+\infty} a_n$$

(14) Sia (a_n) una successione in $\mathbb{R}$ tale che
$$a_{2n}\;\to\;l,\qquad a_{2n+1}\;\to\;l,$$
ove $l\;\in\;\mathbb{R}$. Dimostrare che $a_n\;\to\;l$.

(15) Sia (a_n) una successione in $\mathbb{R}$ tale che (a_{2n}) e (a_{2n+1}) siano, rispettivamente, monotona crescente e monotona decrescente. Dimostrare che (a_n) ha limite se e solo se
$$a_{2n}\;\le\;a_{2n+1}\;\;\forall\,n\;\in\mathbb{N},\quad\text{e}\quad a_{2n+1}\;-\;a_{2n}\;\to 0\quad\text{per } n\;\to\;+\infty.$$

(16) E' vera la disuguaglianza
$$2^{\sqrt{2}}\;\le\;(\sqrt{2})^2\;?$$
Più in generale: esistono dei numeri reali $a>0$ per i quali risulta
$$a^{\sqrt{a}}\;\le\;(\sqrt{a})^a\;?$$

(17) Le equazioni
$$\pi^x\;=\;\sqrt{7},\qquad x^\pi\;=\;\sqrt{7},$$
hanno soluzione nell'intervallo $]0,1[$?

(18) Esiste $t\;\in\;]0,2\,\pi[$ tale che
$$\cos t\;=\;\frac{1}{\sqrt{3}},\qquad \sin t\;=\;\sqrt{\frac{2}{3}}\;?$$
Più in generale. Sia $a\;\in\;\mathbb{R},\;\;a\;>\;1$. Esiste $t\;\in\;]0,2\,\pi[$ tale che
$$\cos t\;=\;\frac{1}{\sqrt{a}},\qquad \sin t\;=\;\sqrt{\frac{a-1}{a}}\;?$$

(19) Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $0 < a < b$, Siano poi (x_n) e (y_n) due successioni in $\mathbb{R}$ defìnte per ricorrenza nel modo seguente.

$$x_1 = a, \qquad y_1 = b,$$
$$x_{n+1} = \sqrt{x_n\, y_n}, \qquad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

Dimostrare
(i) $x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$
(ii) (x_n) e (y_n) sono entrambe convergenti ed hanno lo stesso limite.

(20) Siano a e b due numeri naturali maggiori strettamente di 1 e primi fra loro. Dimostrare che

$$\log_a b$$

non è razionale

(21) Verificare che il numero reale $x = \frac{2}{3}$ ha le seguenti rappresentazioni

$$x = 0,\overline{6} \quad \text{in base } 10,$$
$$x = 0,\overline{10} \quad \text{in base } 2.$$