Università degli Studi di Bologna

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Dipartimento di Matematica

Dottorato di Ricerca in Matematica
IX ciclo

Caos quantistico cinematico

Tesi di Dottorato

di

Marco Lenci

Tutore:
Prof. **Sandro Graffi**

Coordinatore:
Prof. **Ermanno Lanconelli**

Anno Accademico 1997/98

A Mamma

Indice

Ringraziamenti **v**

I Introduzione **1**

I.1 Il problema del caos quantistico . . . 2

I.2 L'approccio semiclassico . . . 5

I.3 Sistemi dinamici C^* . . . 7

I.4 Caos cinematico . . . 9

II La catena armonica classica **13**

II.1 Evoluzione temporale . . . 14

II.2 Misure d'equilibrio . . . 17

II.3 Il limite per infiniti oscillatori . . . 19

II.4 Sottospazi gaussiani generanti . . . 21

II.5 Proprietà ergodiche . . . 26

III La catena armonica quantistica **29**

III.1 Notazioni ed ipotesi preliminari . . . 31

III.2 L'ergodicità quantistica . . . 33

III.3 Il mixing quantistico . . . 35

III.4 Dimostrazione dell'ergodicità quantistica . . . 40

III.5 L'esempio degli stati coerenti . . . 45

IV Il gas ideale classico **49**

IV.1 Il modello di Volkovyski-Sinai . . . 50

IV.2 Sistemi di Poisson . . . 54

V Il gas ideale quantistico **57**
V.1 La quantizzazione sul toro 58
V.2 Proprietà ergodiche 62
V.3 La misura quantistica 66
V.4 Dimostrazioni 69

VI Appendice **79**
VI.1 Dimostrazione del Lemma III.6 79
VI.2 Gli stati coerenti per il cilindro 80
VI.3 Dimostrazione del Lemma V.5 82
VI.4 Convoluzioni su tori e su spazi euclidei 83
VI.5 Dimostrazione del Lemma V.7 84

Bibliografia **87**

Ringraziamenti

Sono tante le persone che devo ringraziare per questa tesi e so già che non sarò soddisfatto da ciò che riuscirò a scrivere in queste righe. D'altra parte è bene che la faccia corta, ché non voglio vedere un editor per i prossimi sei mesi!

In primo luogo, ho un enorme debito nei confronti di Sandro Graffi. Non capita a tutti la fortuna di avere come relatore un maestro del suo calibro: uno che insegna a capire la matematica, prima che a fare i conti. A lui devo la mia passione per la fisica matematica, e ai suoi continui insegnamenti quel poco che ne ho capito. Non credo di riuscire ad esprimere la sua generosità: dal tanto tempo speso per me al continuo interessamento alle mie vicende.

La buona sorte non mi ha abbandonato nei miei anni a Princeton. Studiare sotto la guida di Yakov Sinai non solo mi ha dato il privilegio di imparare da uno dei più grandi matematici del mondo, ma, ancora di più, mi ha permesso di lavorare con una persona che ha davvero a cuore la sorte dei suoi allievi e che sa come incoraggiarli ed aiutarli.

Tante altre persone, in vari modi, mi hanno aiutato a preparare questa tesi: fra queste vorrei ricordare con gratitudine Daniele Morbidelli e Alberto Parmeggiani. Ringrazio inoltre il Prof. Jona-Lasinio.

Certamente affrontare questi anni del Dottorato, così speciali per me, non sarebbe stato possibile senza l'affetto (e l'aiuto pratico!) della mia famiglia e delle altre persone accanto a me. Voglio ringraziare mio padre e mio fratello, per tutto quello che hanno fatto per me; Barbara, per aver fatto degli Stati Uniti un posto dove sentirmi a casa; e tutti gli amici che mi sono stati vicini, in Italia e in America. Un pensiero speciale va a Beatrice.

Capitolo I

Introduzione

Lo studio del cosiddetto *caos quantistico* si prefigge di trasferire alla meccanica quantistica le nozioni della teoria ergodica classica (vedi ad esempio [Arn-Ave], [Mañé], [Cor-Fom-Sin], [Walters]) che si sono rivelate estremamente utili per la comprensione di molti sistemi di grande interesse fisico, ed in particolare delle loro caratteristiche caotiche.

Senza entrare troppo nel merito di una buona definizione di *caos*, diciamo semplicemente che con questo termine si intende, a grandi linee, l'impossibilità di predire l'evoluzione di un certo sistema. Talvolta si usa l'espressione *caos deterministico* per sottolineare che, almeno a livello teorico, tale predizione sarebbe possibile, se si avesse un'informazione infinitamente accurata riguardo al sistema; ma siccome ciò non è dato nel mondo reale, anche la più piccola discrepanza fra lo stato effettivo del sistema e la conoscenza che ne ha l'osservatore, dà luogo ad una enorme incertezza riguardo allo stato futuro, anche per tempi molto brevi.[1]

Il voler ritrovare questi concetti nell'ambito quantistico non ha solo un'evidente interesse teorico, ma si coniuga con le recenti possibilità tecnologiche di studiare sistemi che non sono né completamente macroscopici (sui quali la meccanica classica

[1] Questo concetto, matematicamente, va sotto il nome di *mixing* (vedi più avanti). In effetti, sembra prendere sempre più piede l'identificazione dell'aggettivo "caotico" col concetto di mixing. Se poi si parla di un sistema su una varietà differenziale, si intende di solito una dinamica dotata di alcuni esponenti di Lyapunov positivi (cfr. [Arn-Ave]).

funziona molto bene), né totalmente microscopici (descritti dalla meccanica quantistica, per i quali è difficile anche porsi le domande proprie della teoria ergodica).[2] Riguardo a questo tipo di fenomeni, che vengono recentemente chiamati *mesoscopici*, si vorrebbe elaborare una teoria che ne spieghi il comportamento caotico a partire dalle leggi della fisica quantistica. Una rassegna di alcuni esperimenti che sono stati effettuati è presente in [Gutzwiller]. Ulteriori motivazioni si trovano nel più recente [Hurt].

I.1 Il problema del caos quantistico

Il programma non è banale, come l'enorme letteratura dimostra.[3] Il fatto, per tenerci semplici, è che l'equazione di Schrödinger è lineare. Non che questo sia un paradosso:[4] in fondo, la meccanica quantistica rinuncia in partenza a descrivere un sistema deterministico e non è sorprendente che un'ampiezza di probabilità possa evolvere linearmente e ciononostante descrivere fenomeni complessi. D'altra parte è vero che praticamente tutte le tecniche che vengono usate nell'ambito del caos deterministico[5] hanno a che vedere con la non-linearità delle equazioni del moto. Quindi la consistente mole di risultati classici non può essere usata *tout court* in fisica quantistica.

Questo è quello che si vede se si prova a tradurre ingenuamente certe definizioni classiche. Mostriamo questo punto riprendendo le definizioni di Von Neumann di ergodicità quantistica, contenute in [Von Neumann 29]. Maggiori dettagli su quel lavoro e, in generale, sui problemi connessi alla ricerca di una buona definizione di ergodicità quantistica, si possono trovare in [Lenci Tesi].

Ricordiamo che un sistema dinamico, definito da un flusso ϕ_t su uno spazio di fase M, è ergodico rispetto alla misura di probabilità μ se, per ogni osservabile f,

[2] Si pensi al principio di indeterminazione di Heisenberg, o al collasso della funzione d'onda.

[3] Gli ottimi libri di Gutzwiller e di Hurt, sopra citati, offrono una vasta panoramica.

[4] Ricordo che, quando ero laureando in fisica, alcuni studenti e professori mi ripetevano che "la meccanica quantistica è lineare" con un'enfasi che mi lasciava un po' perplesso.

[5] A parte due eccezioni notevoli che sono proprio l'argomento di questa tesi.

si ha

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(\phi_t(x))\,dt = \int_M f(x)\,d\mu(x), \tag{I.1}$$

per quasi ogni $x \in M$, nel senso della misura μ.

Ora consideriamo un sistema quantistico, costituito da uno spazio di Hilbert $\mathcal{F}$ e da un'operatore di Schrödinger (o semplicemente hamiltoniana) H. In praticamente tutti i casi interessanti, quando i gradi di libertà sono in numero finito, lo spettro di H è discreto e l'hamiltoniana è diagonalizzabile. Assumiamo che questo accada, e chiamiamo $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ la base degli autovettori di H. Gli autovalori sono indicati con E_n. Un qualsiasi stato iniziale $\psi = \sum_n a_n e_n$, evolve, secondo l'equazione di Schrödinger, come

$$\psi(t) = \sum_n a_n\, e^{-iE_n t/\hbar}\, e_n. \tag{I.2}$$

Se consideriamo le $|a_n|$ come costanti *intrinseche* del moto, possiamo pensare l'evoluzione (I.2) come un flusso di Kronecker su un toro infinito dimensionale. Prendendo la misura di Haar, questo sistema è ergodico se, e solo se, le frequenze $\omega_n = E_n/\hbar$ sono razionalmente indipendenti fra loro.[6] Questa è la prima definizione di Von Neumann. Essa è abbastanza insoddisfacente visto che, ad esempio, classifica alcuni sistemi monodimensionali (ad esempio, l'oscillatore armonico) come non ergodici, ed altri (la maggior parte, in un certo senso) come ergodici. Viceversa si vorrebbe che in una dimensione tutti i sistemi fossero considerati alla stessa stregua.

L'altra definizione (alle volte indicata come *la* definizione di Von Neumann) viene dall'osservazione che in meccanica quantistica ciò che è veramente osservato sono i valori di aspettazione di un operatore, diciamo A, sullo stato $\psi(t)$. Quindi si potrebbe chiedere che sia la media temporale di questa quantità a perdere dipendenza dalle condizioni iniziali.[7] Cioè

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \langle \psi(t), A\,\psi(t)\rangle = \sum_n |a_n|^2 \langle e_n, A\, e_n\rangle. \tag{I.3}$$

Questo accade se, e solo se, lo spettro di H è semplice. Allo stesso risultato si arriva se si prova ingenuamente a quantizzare la (I.1). In effetti ci sarebbero dei

[6] Modulo una costante additiva: vedi [Von Neumann 29] o [Lenci Tesi].

[7] "Dimenticanza delle condizioni iniziali" è un modo enfatico di esprimere l'ergodicità.

buoni motivi per assumere quest'ultima come definizione di ergodicità quantistica. Però una definizione del genere continua ad essere inadeguata. Prendiamo come esempio l'oscillatore armonico bidimensionale di frequenze fondamentali (ω_1, ω_2): gli autovalori dell'energia sono $E_{n_1,n_2} = (n_1\omega_1 + n_2\omega_2)\hbar$. Se $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{Q}$ lo spettro ha delle molteplicità e quindi il sistema sarebbe da considerarsi non ergodico, mentre sarebbe ergodico altrimenti. Si vorrebbe invece che tutti i sistemi bidimensionali integrabili fossero non ergodici (sulla varietà di livello dell'energia).[8]

Un discorso analogo può essere fatto per il mixing: usando la stessa notazione di prima, ricordiamo che il flusso ϕ_t è mixing per la misura μ se, per ogni coppia di osservabili a, b,

$$\lim_{t\to+\infty} \mu((a \circ \phi_t)b) = \mu(a)\,\mu(b). \tag{I.4}$$

Se si vuole scrivere una condizione simile in meccanica quantistica, si può ragionare che gli osservabili in quel caso sono operatori (formalmente) autoaggiunti sullo spazio di Hilbert $\mathcal{F}$. L'oggetto matematico che rimpiazza una misura di probabilità classica è uno stato (vedi, ad esempio, [Ruelle], Sez. 1.4), cioè un funzionale ω, positivo e normalizzato, definito su una certa algebra di operatori. Positivo significa che $\omega(A) \geq 0$, ogni qualvolta che A è semidefinito positivo; normalizzato significa che $\omega(\mathbf{1}) = 1$. La forma più generale per un funzionale del genere è $\omega(A) := \mathrm{Tr}(A\rho)$, se $\mathrm{Tr}\rho = 1$. Ricordando l'evoluzione di Heisenberg di un certo operatore, una buona definizione di mixing quantistico potrebbe essere:

$$\lim_{t\to+\infty} \omega(e^{iHt/\hbar} A e^{-iHt/\hbar}\, B) = \omega(A)\,\omega(B), \tag{I.5}$$

per ogni A, B nel dominio di ω. Se lo spettro di H è discreto, tuttavia, è facile constatare che la (I.5) non può mai essere verificata, *quale che sia la dinamica* generata da H!

Questa è la situazione. Ci sono diversi modi di affrontare questa *empasse*: uno è quello di dire che il caos quantistico non esiste, affermazione che ha sicuramente

[8] Come si diceva prima, questa definizione non è poi così assurda: in effetti, sull'oscillatore armonico bidimensionale, essa riproduce il comportamento del sistema classico sui tori invarianti. Se le due frequenze sono razionalmente indipendenti il sistema è ergodico su ciascuno di questi tori, altrimenti no. Non è sorprendente che ciò accada, visto che la definizione di Von Neumann tiene conto di *tutte* le costanti del moto (le $|a_n|$). Classicamente fissare tutte le costanti del moto significa fissare tutte le azioni, cioè restringersi ad un toro (cfr. [Lenci Tesi]).

le sue basi logiche. Un altro è quello di abbandonare completamente l'approccio precedente, e cominciare a studiare una serie di esempi per vedere se c'è un modo di trovare in un sistema quantizzato delle traccie rivelatrici della caoticità del corrispondente sistema classico; chiamiamo questo l'*approccio semiclassico*. Un altro ancora, quello a cui fa riferimento questa tesi, è quello di mantenere le definizioni date sopre come valide e di vedere se ci sono dei casi in cui siano verificate, magari andando a cercare in una classe di sistemi non considerata in precedenza. Vedremo in seguito che questo porta all'introduzione dei cosiddetti *sistemi dinamici su* C^**-algebre*.

I.2 L'approccio semiclassico

Prima di parlare specificatamente degli argomenti di questa tesi, accenniamo brevemente a quanto è stato fatto nell'ambito dell'approccio semiclassico, anche perché, generalmente, a ciò ci si riferisce quando si parla di caos quantistico. C'è un'enorme letteratura nel campo, come testimoniano ad esempio, [Gutzwiller], [Gia-Vor-Zin], ed il più recente [Hurt]. A mo' di manifesto di questo indirizzo di ricerca, riportiamo le parole di Voros dall'introduzione di [Gia-Vor-Zin]:

> Se il comportamento classicamente caotico si manifesta attraverso la complessità crescente del moto, espressa attraverso una struttura sempre più fine del flusso di fase, allora non si avrà presenza di caos, poiché nessuna struttura classica, secondo le regole della teoria dei quanti, ha senso all'interno di una cella di fase.
>
> [...]
>
> Questo ci porta alla domanda fondamentale che affronteremo: su che osservabili e con quali mezzi si può in generale scoprire che al limite classico un sistema dinamico gode di certe proprietà? (Per esempio, siccome l'evoluzione temporale dello stato è quasi-periodica, il comportamento asintotico per tempi lunghi, di per sé, non accoppiato a qualche processo di limite, non è uno strumento utile per scoprire il comportamento caotico.)

Sostanzialmente due sono i filoni seguiti in questo campo. Il primo consiste nel rendersi conto che la formula di Von Neumann (I.3) riprodurrebbe la definizione classica di Boltzmann se si avesse che, per ogni n, $\langle e_n, A\, e_n \rangle = \int_M a d\mu$, dove a è l'osservabile classico corrispondente ad A. Se è vero che ciò non accade in generale, è pur vero che possiamo aspettarci di verificarlo al *limite semiclassico*. Questa considerazione, che risale almeno a [Schnirelman 74], può essere meglio formulata come segue: se mandiamo n, il numero quantico, all'infinito e $\hbar$ a zero in maniera tale che $E_n(\hbar) \to E$,[9] costante fissata, allora vogliamo che:

$$\langle e_n(\hbar), \mathrm{Op}_\hbar(a)\, e_n(\hbar) \rangle \longrightarrow \int_M a(x)\, d\mu(x), \tag{I.6}$$

ove $\mathrm{Op}_\hbar$ è una certa applicazione di quantizzazione (vedi Capitolo III) ed a appartiene ad una determinata famiglia di osservabili classici (simboli). La (I.6) è stata verificata in molte circostanze (vedi [Colin de V. 85], [Deg-Gra-Iso 95], [Hel-Mar-Rob 87], [Zelditch 87], [Zelditch 92], solo per citarne alcuni) e molti (cfr. [Sarnak], [Zelditch 92]) la prendono come la giusta definizione di ergodicità quantistica (se il limite viene fatto su successioni di densità 1 di numeri quantici).

L'altro filone di ricerca semiclassico viene dalla constatazione (nella maggior parte dei casi numerica) che la distribuzione dello *spacing* dei livelli energetici, cioè la distanza fra un autovalore ed il suo successivo, sembra avere a che fare con la caoticità del corrispondente sistema classico. In particolare, se il sistema classico è integrabile, tale distribuzione è di Poisson (cfr. [Ber-Tab 77]) o simile ([Kos-Min-Sin 93]), mentre se esso è caotico, allora la distribuzione assomiglia molto alla distribuzione di Wigner della teoria delle matrici random (vedi [Boh-Gia-Sch 84], ad esempio). Che lo spacing dei livelli di energia sia importante in questo contesto, è visibile nella (I.3) stessa.[10]

Queste considerazioni hanno a che vedere con l'approssimazione semiclassica in quanto, per parlare di distribuzione, dobbiamo considerare un numero illimitato di autovalori dell'energia. E il limite per alte energie è moralmente il limite semiclassico. Per maggiori informazioni su quanto detto sopra rimandiamo a [Gutzwiller] o a [Hurt].

[9] Qui e più avanti esplicitiamo la dipendenza da $\hbar$ in tutte le quantità definite in precedenza.

[10] Qualche ulteriore commento su questo si trova in [Lenci Tesi].

I.3 Sistemi dinamici C^*

Il secondo approccio di cui si parlava al termine della Sezione I.1 fa riferimento ai sistemi dinamici su C^*-algebre. Il contenuto di questa tesi, sebbene formalizzato in maniera diversa, può essere riletto in quella chiave. Accenniamo qui velocemente alle nozioni di base di questa teoria, referenze per la quale sono [Bra-Rob], [Ruelle], il recente [Benatti], e tanti articoli nella letteratura (un posto di primo piano meritano certamente i lavori di Thirring e Narnhofer, alcuni dei quali vengono citati più avanti).

Un sistema dinamico C^* è una tripla $(\mathcal{A}, \tau_t, \omega)$, dove $\mathcal{A}$ è una C^*- o W^*-algebra,[11] τ_t è un omomorfismo del gruppo additivo $\mathbb{R}$ nell'algebra, ed ω è uno stato positivo di norma unitaria, invariante per l'azione di τ_t. Se $\mathcal{A}$ è commutativa, questa definizione diventa equivalente alla definizione di sistema dinamico classico.

A questo punto si può pensare di chiamare questa *tripla dinamica* ergodica se, per ogni $A, B \in \mathcal{A}$,

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \omega(\tau_t(A)\, B) = \omega(A)\, \omega(B). \tag{I.7}$$

Nel caso commutativo, questa è un'altra maniera di affermare la (I.1) (vedi [Walters]). In effetti, questa definizione diventa interessante se il sistema è *asintoticamente abeliano*.[12] In questo caso si può provare una serie di equivalenze, una delle quali, ad esempio, è che ω è uno stato estremale nell'insieme convesso degli stati positivi normalizzati.

La definizione di mixing va ora da sé:

$$\lim_{t\to+\infty} \omega(\tau_t(A)\, B) = \omega(A)\, \omega(B), \tag{I.8}$$

[11]Sostanzialmente una C^*-algebra è un'algebra normata completa dotata di una involuzione. Una W^*-algebra, o algebra di Von Neumann, è una C^*-algebra con certe restrizioni sull'algebra dei commutatori. Questa restrizione è a volte necessaria per dimostrare teoremi riguardanti stati KMS (vedi più avanti). Una veloce carrellata di definizioni e risultati concernenti queste algebre si trova nell'appendice di [Ruelle].

[12]Non diamo qui anche questa definizione, visto che il concetto è essenzialmente spiegato dal nome stesso. Rimandiamo a [Benatti], Pag. 110.

con A e B come sopra; il sistema è assunto asintoticamente abeliano.

Certo questa struttura matematica non può eliminare i problemi di cui parlavamo nella Sezione I.1: se $\mathcal{A}$ è l'algebra degli operatori limitati su uno spazio di Hilbert e τ è l'evoluzione di Heisenberg, $\tau_t(A) = e^{iHt}Ae^{-iHt}$, non riusciremo a provare nulla finché lo spettro di H rimane discreto. Di qui l'idea di considerare sistemi ad infiniti gradi di libertà[13] (vedi [Chirikov 86], [Jon-Pre-Cap 92]).

In effetti, per questi, parecchio è stato fatto: ad esempio, si è dimostrato che l'algebra di Weyl è mixing, rispetto al corrispondente stato KMS (vedi più avanti). Lo stesso è stato verificato per il gas ideale di fermioni e di bosoni (cfr. [Bra-Rob]).[14] Una incompletissima selezione di articoli interessanti in questo campo comprende inoltre [Nar-Thi 89], [Nar-Thi 93], [Zelditch 96].

Concludiamo questa sezione dando la definizione di stato KMS (da Kubo-Martin-Schwinger), visto che questo concetto è stato citato qui e farà capolino anche nei Capitoli III e V. L'idea è quella di trovare un buon sostituto per la "misura canonica classica", cioè lo stato

$$\omega_\beta(A) := \frac{\mathrm{Tr}(A\, e^{-\beta H})}{\mathrm{Tr}\, e^{-\beta H}}, \tag{I.9}$$

che si può scrivere senza problemi formali in dimensione finita, data un'hamiltoniana H. Se τ_t è definito come sopra, si vede che, per ogni coppia A, B, vale l'identità formale:

$$\omega_\beta(\tau_t(A)\, B) = \omega_\beta(B\, \tau_{t+i\beta}(A)). \tag{I.10}$$

Allora, per un generico sistema dinamico C^*, diciamo che si ha uno stato KMS di

[13] Idea che giustifica, in verità, l'introduzione di quei concetti algebrici astratti: quando il numero di gradi di libertà di un sistema quantistico è infinito, non è sempre facile scrivere formalmente un'algebra di operatori ed un'hamiltoniana. Un'algebra ed un omomorfismo definiti astrattamente possono alle volte migliorare la situazione. Vedi più avanti, riguardo agli stati KMS.

[14] Consultando [Benatti], Esempio 4.34 e Pag. 113, si vede che questi risultati implicano il mixing quantistico della catena armonica (ridimostrato con altri metodi in [Gra-Mar 96] e qui enunciato nel Capitolo III), però non la sua ergodicità quantistica nel senso descritto più avanti. Per quello che riguarda il gas ideale, non c'è sovrapposizione fra questi e i risultati del Capitolo V, in quanto qui si parla di particelle che seguono la statistica di Maxwell-Boltzmann.

parametro β se, $\forall A, B \in \mathcal{A}$, la funzione $t \mapsto \omega_\beta(B\,\tau_t(A))$ è analitica nella striscia $0 < \mathrm{Im}\tau < \beta$, continua in $0 \leq \mathrm{Im}\tau \leq \beta$, e vale la condizione al contorno (I.10).

I.4 Caos cinematico

I sistemi di cui ci occuperemo in questa tesi sono la catena armonica ed il gas ideale nella formulazione di Volkovyski e Sinai ([Vol-Sin 71]). Questi due sistemi sono specialissimi esempi di *caos cinematico*.

Con l'espressione caos cinematico intendiamo il meccanismo fisico di un sistema infinito-dimensionale per cui la caoticità non è causata dalla dinamica, ma piuttosto dalla stocasticità delle condizioni iniziali. Siccome dobbiamo a Jona-Lasinio sia l'aver valorizzato questo concetto, sia l'avergli dato un nome, è certamente una buona idea riportare un passo di un suo articolo con Presilla, [Jon-Pre 96], per spiegare di cosa si tratta:

> [...] Consideriamo il caso di una catena monodimensionale di oscillatori armonici, accoppiati in maniera tale che il sistema possa essere considerato come la discretizzazione dell'equazione delle onde in una dimensione (spaziale). Come è noto, le soluzioni di questa equazione dipendono dalla combinazione $x \pm t$, dove x e t sono le coordinate di spazio e di tempo, rispettivamente. Di conseguenza, se la condizione iniziale è una realizzazione di un processo stocastico mixing nello spazio, essa viene trasformata dalla dinamica in uno processo stocastico mixing nel tempo. Se il sistema è in equilibrio a qualche temperatura T, le condizioni iniziali che si devono considerare sono le realizzazioni tipiche del processo casuale che corrisponde alla misura d'equilibrio di Gibbs.

A detta dello stesso Jona-Lasino,[15] non ci sono dubbi che il concetto sia esistito nella letteratura per parecchio tempo (come esempio di prenda la trattazione del gas ideale in [Cor-Fom-Sin]). Tuttavia l'idea non era mai stata molto valorizzata: a riprova di questo, riportiamo le parole di Szasz da [Szasz 96], che risalgono ad una

[15] Comunicazione privata.

conferenza commemorativa di Boltzmann, a Vienna, nel 1994. Szasz sta parlando dell'articolo [Vol-Sin 71] sul gas ideale:

> La dimostrazione rivela un meccanismo di ergodicità apparentemente nuovo: il mixing, inteso naturalmente nel tempo, è il risultato del mixing iniziale nello spazio. [...] Mentre il tempo scorre, osservando una scatola fissata, appaiono particelle da intervalli sempre più distanti e i numeri [di particelle in questi intervalli] sono più o meno indipendenti. Si può dimostrare che questo fenomeno genera il mixing nel tempo.
>
> La stessa osservazione è stata usata, con ragionamenti più delicati, per provare che...

Di seguito Szasz cita, fra gli altri, [Gol-Leb-Rav 82], [BPPSS 85] e [Sinai 79].

Le proprietà ergodiche della catena armonica classica sono state studiate in [Lan-Leb 74] e vengono qui riportate nel Capitolo II; mentre quelle del gas ideale, che risalgono a [Vol-Sin 71], si trovano al Capitolo IV. Le versioni quantizzate di questi sistemi sono state recentemente riprese in [Gra-Mar 96] e [Lenci 96]: in questi lavori si provano l'ergodicità ed il mixing quantistici, nello spirito della Sezione I.3. Tali risultati costituiscono il contenuto dei Capitoli III e V.

Limitandoci al solo mixing, per fissare le idee, quello che si dimostra è qualcosa del genere:[16]

$$\lim_{t\to+\infty} \lim_{\substack{N,V\to\infty \\ N/V\to\rho}} \omega(e^{iHt/\hbar} A e^{-iHt/\hbar} B) = \lim_{\substack{N,V\to\infty \\ N/V\to\rho}} \omega(A) \lim_{\substack{N,V\to\infty \\ N/V\to\rho}} \omega(B); \tag{I.11}$$

dove tutte le quantità coinvolte dipendono in realtà da N, il numero di particelle, e da V, il volume del sistema.[17] In particolare, ciò vale per A e B, gli operatori definiti su $L^2(V^N)$, che quantizzano certi osservabili fissati a e b; ω è l'opportuno stato KMS, a temperatura fissata, sull'algebra finito-dimensionale.

Questi risultati non sono esattamente formulati come nella (I.8), per via del limite termodinamico che compare nella (I.11). In effetti, evitiamo completamente

[16] Vedi il Teorema III.3 e la formula (V.30).

[17] Nel caso della catena armonica il limite sul volume è intrinseco nel limite sul numero di siti, che va ad infinito.

la questione tecnica di definire dei sistemi dinamici C^* ad infiniti gradi di libertà, cosa che renderebbe la (I.11) davvero equivalente alla (I.8). L'approccio che adottiamo è di tipo più analitico, visto che lavoriamo con simboli ed operatori pseudo-differenziali. In parte ciò è dovuto al fatto che per questi modelli è possibile ricondurre la dimostrazione di certi asserti quantistici ai corrispondenti risultati classici; e il calcolo pseudo-differenziale consente di fare questo con relativa facilità (vedi prossimo paragrafo). Per di più, in questa maniera, le medie sugli stati quantistici, come ad esempio il membro sinistro della (I.8), possono essere espresse in termini di medie su misure classiche.

Per finire, due parole sull'ingrediente principale delle dimostrazioni. Abbiamo detto sopra che i nostri due sistemi sono specialissimi: infatti per entrambi il flusso temporale è lineare! Per questo tipo di sistemi vale il *Teorema di Egorov esatto.* Se $\mathcal{H}$ è un simbolo pseudo-differenziale, che viene assunto come hamiltoniana; ϕ_t il corrispondente flusso (lineare); $H := \mathrm{Op}_\hbar^W(\mathcal{H})$ l'operatore di Schrödinger, prodotto dalla quantizzazione di Weyl, allora vale la seguente relazione:

$$e^{itH/\hbar}\mathrm{Op}_\hbar^W(a)\, e^{-itH/\hbar} = \mathrm{Op}_\hbar^W(a \circ \phi_t), \tag{I.12}$$

per una certa classe di simboli a. Questa uguaglianza è valida solo per la quantizzazione di Weyl; ad essa viene dato il nome succitato perché ricorda il Teorema di Egorov per le trasformazioni canoniche, ma non contiene correzioni quantistiche (riguardo a questi concetti, si veda [Robert], in particolare la Sezione 5.4).

Appare abbastanza chiaro che la (I.12) ci permette di scrivere l'evoluzione temporale quantistica in termini di quella classica. Allora (a parte il problema tecnico di aggiustare la non commutatività degli osservabili) nelle dimostrazioni delle proprietà ergodiche quantistiche si possono usare direttamente i corrispondenti teoremi classici. Questo prova che il meccanismo di base che garantisce la caoticità è ancora l'effetto cinematico. Perciò la catena armonica quantistica ed il gas ideale quantistico di Maxwell-Boltzmann sono esempi di *caos quantistico cinematico.*

Capitolo II

La catena armonica classica

I prossimi due capitoli vertono sul sistema di infiniti oscillatori armonici accoppiati e sulle sue proprietà ergodiche. Manchiamo, per ovvie ragioni di convenienza, di sottolineare l'importanza di questo tipo di sistemi in fisica matematica e le varie applicazioni che se ne possono trarre, essendo noi più che altro interessati a trovare un'esempio del tutto teorico di caos quantistico. Ad ogni modo, un'utile fonte sui sistemi armonici su reticoli è [Mar-Mon-Wei]; un'altro lavoro che può essere interessante leggere, in relazione ai risultati di seguito esposti, è [Lebowitz 72].

Nel presente capitolo riportiamo il lavoro di Lanford e Lebowitz del '74 [Lan-Leb 74], che si occupa del sistema classico, mentre nel Capitolo III parleremo di ciò che interessa più da vicino questa tesi, vale a dire il sistema armonico quantizzato, esponendo i recenti risultati di Graffi e Martinez [Gra-Mar 96].

Sebbene il Capitolo III ed il Capitolo II possano essere letti indipendentemente, è nelle intenzioni di chi scrive collegare le due parti attraverso una serie di paralleli. Questo per mostrare, come si diceva già nell'Introduzione, che il meccanismo che genera il caos nei due sistemi è sempre lo stesso: cioè la scelta di "condizioni iniziali caotiche" dovuta all'infinito numero di gradi di libertà, fatto puramente cinematico; mentre la dinamica, nella sua semplicità, non dà contributo in tal senso.

Nonostante si sia cercato di inserire almeno le idee alla base di ogni dimostrazione, è certamente opportuno rimandare a [Lan-Leb 74] per una descrizione precisa dei risultati di questo capitolo. Ciò, ci auguriamo, non dovrebbe creare al lettore particolari problemi di coerenza di notazioni. Prima di entrare in dettaglio si osservi che, nonostante Lanford e Lebowitz enuncino i loro risultati per una famiglia di oscillatori armonici posti su un generico reticolo d-dimensionale (anche con possibili impurità), non è restrittivo fissare un esempio una volta per tutte (come fanno d'altronde anche Graffi e Martinez). Scegliamo un reticolo monodimensionale: questo chiarisce perché al sistema che andiamo a descrivere viene dato il nome di *catena armonica*.

Sia data una famiglia di siti, identificabile con $\mathbb{Z}$, su ciascuno dei quali è posto un oscillatore monodimensionale. In genere si pensa a tale sistema come una serie di particelle identiche su una retta le cui "posizioni di equilibrio" sono poste nelle coordinate intere della retta stessa.

Se chiamiamo q_i la distanza dell'oscillatore i-esimo dalla posizione d'equilibrio e p_i il suo momento, in qualche maniera più o meno formale, le equazioni del moto sono date, $\forall i \in \mathbb{Z}$, da:

$$\begin{cases} \dfrac{dq_i}{dt} = p_i; \\[2ex] \dfrac{dp_i}{dt} = -\displaystyle\sum_{j \in \mathbb{Z}} V_{ij}\, q_j; \end{cases} \tag{II.1}$$

ove $V := \{V_{ij}\}_{i,j \in \mathbb{Z}}$ è la matrice (infinita) di accoppiamento. Un esempio è il caso di identiche interazioni fra primi vicini in cui tale matrice è data da $V_{ii} = 2\gamma$, $V_{i\,i\pm1} = -\gamma$ e $V_{ij} = 0$ negli altri casi. Questa corrisponde all'energia potenziale $(\gamma/2)\sum_i (q_{i+1} - q_i)^2$.

II.1 Evoluzione temporale

Cerchiamo ora di rendere rigoroso il nostro formalismo, cioè vediamo di indentificare uno spazio di fase per questo sistema ad infiniti gradi di libertà in cui le (II.1) abbiano un preciso significato matematico. Si chiami $x := \{(q_i, p_i)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ una successione di coordinate hamiltoniane. Per ciascuno di questi "punti di fase" si definisca la norma

$$\|x\|_k := \sup_i \frac{\max\{q_i, p_i\}}{(1 + i^2)^{k/2}}, \tag{II.2}$$

con k intero positivo. Introduciamo inoltre l'insieme

$$Y_k := \left\{ x := \{(q_i, p_i)\} \mid \lim_{|i|\to\infty} \frac{\max\{q_i, p_i\}}{(1+i^2)^{k/2}} = 0 \right\}. \tag{II.3}$$

Si noti immediatamente che $Y_k \neq \{x \mid \|x\|_k < \infty\}$. D'altra parte, Y_k è uno spazio di Banach, con la norma $\|\cdot\|_k$, e $\|x\|_k < \infty$ implica $x \in Y_{k+1}$. Le (II.1) possono essere riscritte come

$$\frac{dx}{dt} = Ax, \tag{II.4}$$

dove $(Ax)_i := (p_i, -\sum_j V_{ij} q_j)$. Si assuma ora la seguente proprietà di V:

(A1) $$\forall k > 0, \quad \sup_i \sum_j |V_{ij}| \, (1 + (i-j)^2)^{k/2} < \infty.$$

È semplice dimostrare il seguente risultato:

Proposizione II.1 *Per ogni k intero positivo, A è un operatore limitato $Y_k \longrightarrow Y_k$. Perciò, ivi fissata una condizione iniziale $x(0) = x_0$, esiste una ed una sola soluzione (globale) della* (II.4) *in Y_k. Essa è data da*

$$x(t) = e^{tA} x_0 =: \phi_\infty[t](x_0),$$

che definisce il flusso del sistema infinito su ogni Y_k.

Dimostrazione. Dobbiamo provare i seguenti due asserti:

$$\lim_{|i|\to\infty} \frac{\max\{q_i, p_i\}}{(1+i^2)^{k/2}} = 0 \implies \lim_{|i|\to\infty} \frac{\max\{p_i, \sum_j V_{ij} q_j\}}{(1+i^2)^{k/2}} = 0; \tag{II.5}$$

$$\sup_i \frac{\max\{p_i, \sum_j V_{ij} q_j\}}{(1+i^2)^{k/2}} \leq \text{ Cost. } \sup_i \frac{\max\{q_i, p_i\}}{(1+i^2)^{k/2}}. \tag{II.6}$$

Ovviamente le stime riguardo a p_i, sia nella (II.5) che nella (II.6), sono scontate. Ci dobbiamo occupare, allora, del secondo termine. Per prima cosa notiamo che:

$$\frac{1+j^2}{1+(i-j)^2} \leq C(1+i^2), \tag{II.7}$$

che può essere dimostrata trovando il massimo dell'espressione al primo membro, considerata come funzione di j a i fissato. Iniziamo col dimostrare la (II.6):

$$\frac{\left|\sum_j V_{ij} q_j\right|}{(1+i^2)^{k/2}} \leq \frac{\sum_j |V_{ij}| \, \|x\|_k \, (1+j^2)^{k/2}}{(1+i^2)^{k/2}} \leq$$

$$\leq C' \, \|x\|_k \sum_j |V_{ij}| (1+(i-j)^2)^{k/2} = C'' \, \|x\|_k, \tag{II.8}$$

ove abbiamo usato la (II.7) e la (A1). Nella stessa maniera otteniamo anche la (II.5):

$$\frac{\left|\sum_j V_{ij} q_j\right|}{(1+i^2)^{k/2}} \leq C' \frac{\sum_j |V_{ij}| (1+(i-j)^2)^{k/2} |q_j|}{(1+j^2)^{k/2}} \leq$$

$$\leq \varepsilon + C'' \sum_{|j| \leq R} |V_{ij}| (1+(i-j)^2)^{k/2}, \tag{II.9}$$

avendo usato (A1) nell'ultimo passaggio. Inoltre è ovvio che $R = R(\varepsilon)$. Il secondo termine di questa espressione è una somma finita di termini ugnuno dei quali va a zero sempre a causa della (A1) (usata con $k+1$ al posto di k, per esempio). C.V.D.

Osservazione. L'unicità nel precedente enunciato non è un'affermazione così forte come può sembrare. Il fatto è che non c'è altra soluzione delle equazioni del moto tale che

$$\lim_{\delta t \to 0} \left\| \frac{x(t+\delta t) - x(t)}{\delta t} - A x(t) \right\|_k = 0; \tag{II.10}$$

cioè per nessun'altra soluzione la convergenza dei rapporti incrementali alle derivate ha il giusto grado di uniformità in i, l'indice che specifica le componenti.

Nonostante si sia scelto qui di lavorare direttamente sul sistema infinito, è interessante (e sarà fondamentale nel Capitolo III) considerare sottosistemi *troncati* e vedere che, in un certo preciso senso, il loro limite è il sistema che abbiamo poc'anzi descritto. Si definisca lo spazio di fase finito per $2m+1$ ($m > 0$) particelle come $\Lambda_m := (\mathbb{R}^{2m+1})^2 = \{(q_i, p_i)\}_{i \leq |m|}$, e si definisca l'operatore di proiezione $\Pi_m : Y_k \longrightarrow \Lambda_m$ ovviamente come quello che dimentica le coordinate canoniche degli oscillatori di indice $|i| > m$. Nello spazio di fase troncato si ha allora che

$$\frac{dx_m}{dt} = \Pi_m A \Pi_m x_m. \tag{II.11}$$

Quindi, preso $x_0 \in \bigcup_k Y_k$, $x_m(t) = \exp(t\Pi_m A)\,\Pi_m x_0 =: \phi_m[t](\Pi_m x_0)$. Ora, $\Pi_m \to \mathbf{1}$ fortemente su ogni Y_k. Confrontando questo con l'enunciato della Proposizione II.1, si ha che, per ogni t e ogni $x_0 \in \bigcup_k Y_k$,

$$\lim_{m\to\infty} \phi_m[t](\Pi_m x_0) = \phi_\infty[t](x_0). \tag{II.12}$$

Concludiamo questa sezione scegliendo dei nomi per i vari spazi di successioni su cui lavoreremo nel resto del capitolo. Sia $\{\xi_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ una successione a valori reali o complessi. Denotiamo:

$$\begin{aligned}
s(\mathbb{Z}) &:= \left\{ \{\xi_i\} \mid \sup_i |\xi_i|(1+i^2)^{k/2} < \infty,\ \forall k \right\}; && \text{(II.13)}\\
s'(\mathbb{Z}) &:= \left\{ \{\xi_i\} \mid \sup_i \frac{|\xi_i|}{(1+i^2)^{k/2}} < \infty,\ \text{per qualche } k > 1 \right\} = \\
&= \Lambda_\infty = \bigcup_{k>1} Y_k; && \text{(II.14)}\\
d(\mathbb{Z}) &:= \left\{ \{\xi_i\} \mid \xi_i \neq 0 \text{ per un numero finito di } i \right\}. && \text{(II.15)}
\end{aligned}$$

II.2 Misure d'equilibrio

Per proseguire e studiare le proprietà ergodiche del nostro sistema certamente dobbiamo definire una misura. La nostra scelta sarà l'ensemble canonico. Iniziamo col supporre che:

(A2) La matrice infinita $\{V_{ij}\}$ definisce un operatore strettamente positivo su tutto $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Definiamo ora $V_m := \{V_{ij}\}_{i,j\le|m|}$ e[1]

$$\mathcal{H}_m(q,p) := \frac{1}{2}\left[\sum_{i=-m}^{m} p_i^2 + \sum_{i,j=-m}^{m} V_{ij} q_i q_j\right]. \tag{II.16}$$

[1]Con (q,p) intendiamo ovviamente qui $(q_{-m},\ldots,q_m,p_{-m},\ldots,p_m)$. D'altra parte, nel resto di questa tesi cercheremo di aumentare la scorrevolezza del testo chiamando, senza ulteriori specificazioni, (q,p) un elemento di $\mathbb{R}^2$, o di Λ_m, o anche di Λ_∞.

Sia ha quindi, tramite (A2), che $\mathcal{H}_m$ è un'hamiltoniana definita positiva, cosa che dobbiamo certamente ipotizzare se vogliamo descrivere un cristallo. Fissata una temperatura β^{-1}, questo permette di definire su Λ_m l'ensemble d'equilibrio canonico $d\mu_{\beta,m}(q,p) := e^{-\beta\mathcal{H}_m} dqdp$, che si vede essere la misura gaussiana (centrata) con covarianze:

$$\mathbb{E}_m(p_i p_j) = \beta^{-1}\delta_{ij}; \quad \mathbb{E}_m(q_i p_j) = 0; \quad \mathbb{E}_m(q_i q_j) = \beta^{-1}\left(V_m^{-1}\right)_{ij}. \tag{II.17}$$

Ricaviamo altre conseguenze della (A2): V, essendo simmetrico e definito su $\ell^2(\mathbb{Z})$, è autoaggiunto e, per il teorema del grafico chiuso, limitato. Inoltre, a causa della positività, è iniettivo e $R(V)$ è denso. Questo prova che V^{-1} è un operatore autoaggiunto densamente definito. Ovviamente $(V_m)^{-1} \neq (V^{-1})_m$ e quindi ci poniamo il problema di trovare il limite (almeno formale) della misura di Gibbs, per $m \to \infty$. Per far questo dobbiamo fare una ulteriore ipotesi.

Da quanto scritto sopra ha senso parlare di $V^{-1/2}$. Si chiami quindi $\{e_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ la base canonica di $\ell^2(\mathbb{Z})$. Si assume che:

(A3) Per ogni intero i, $e_i \in D(V^{-1/2})$ e la successione $\{V^{-1/2}e_i\}$ è maggiorata da un polinomio in i.

In analogia con la (II.17), viene naturale definire l'ensemble canonico μ_β per la catena infinita come la misura gaussiana (centrata) con covarianze:

$$\mathbb{E}(p_i p_j) = \beta^{-1}\delta_{ij}; \quad \mathbb{E}(q_i p_j) = 0; \quad \mathbb{E}(q_i q_j) = \beta^{-1}\langle V^{-1/2}e_i, V^{-1/2}e_j\rangle. \tag{II.18}$$

Mentre sarà compito della prossima sezione mostrare in che senso la (II.18) sia il limite della (II.17), quando il numero delle particelle va ad infinito, possiamo subito verificare che la misura appena definita gode della proprietà fondamentale che ci si aspetta: l'invarianza per evoluzione temporale.

Proposizione II.2 *La misura di Gibbs infinita μ_β è invariante per il flusso $\phi_\infty[t]$.*

DIMOSTRAZIONE. Il flusso di cui all'enunciato genera un'evoluzione temporale che può essere espressa come

$$\begin{cases} q_i(t) = \sum_j K_{ij}^{(1)}(t)q_j + \sum_j K_{ij}^{(2)}(t)p_j, \\ p_i(t) = \sum_j K_{ij}^{(3)}(t)q_j + \sum_j K_{ij}^{(4)}(t)p_j, \end{cases} \tag{II.19}$$

ove i nuclei $K_{ij}^{(n)}(t)$ sono a decrescita rapida in j, fissati i e t.[2] Per cui le variabili $q_i(t)$ e $p_i(t)$ sono ancora gaussiane e a media nulla. L'evoluzione di μ_β, allora, è completamente determinata dalle covarianze $\mathbb{E}(q_i(t)\, q_j(t))$, ecc. Se dimostriamo che

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}(q_i(t)\, q_j(t)) = 0, \text{ ecc.} \tag{II.20}$$

otteniamo la costanza delle covarianze e quindi, in definitiva, la Proposizione II.2. Siccome le equazioni del moto sono lineari ed autonome, è sufficiente considerare tali derivate al solo tempo $t = 0$:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\,\mathbb{E}(q_i(t)\, q_j(t))\big|_{t=0} &= \mathbb{E}(p_i q_j) + \mathbb{E}(q_i p_j) = 0; \\
\frac{d}{dt}\,\mathbb{E}(p_i(t)\, p_j(t))\big|_{t=0} &= \mathbb{E}(-\sum_k V_{ik} q_k p_j) + \mathbb{E}(-\sum_k V_{jk} p_i q_k) = 0; \\
\frac{d}{dt}\,\mathbb{E}(q_i(t)\, p_j(t))\big|_{t=0} &= \mathbb{E}(p_i p_j) - \sum_k V_{jk}\, \mathbb{E}(q_i q_k) = \\
&= \beta^{-1}\left(\delta_{ij} - \sum_k V_{jk} \langle V^{-1/2} e_i, V^{-1/2} e_k \rangle\right).
\end{aligned} \tag{II.21}$$

Rimane da dimostrare che anche la terza delle (II.21) è nulla. A causa della decrescita rapida di V_{ij} in j, e dell'assunzione (A3), $\sum_k V_{jk} V^{-1/2}\, e_k$ converge in $\ell^2(\mathbb{Z})$, così come $\sum_k V_{jk} e_k = V e_j$. Quindi, essendo $V^{-1/2}$ un operatore chiuso,

$$\sum_k V_{jk} \langle V^{-1/2} e_i, V^{-1/2} e_k \rangle = \langle V^{-1/2} e_i, V^{-1/2}\, V e_j \rangle = \delta_{ij}, \tag{II.22}$$

il che completa la dimostrazione. C.V.D.

II.3 Il limite per infiniti oscillatori

Tramite la prossima proposizione descriveremo in che senso la misura invariante μ_β è il limite delle $\mu_{\beta,m}$, quando m va all'infinito.

[2] Anche questo fatto, così come la dimostrazione della Proposizione II.1, è una semplice conseguenza dell'ipotesi (A1).

Proposizione II.3 *Si assumano le* (A1)-(A3). *Quando $m \to \infty$, la distribuzione congiunta di ogni insieme finito di q_i e p_i, secondo l'ensemble canonico $\mu_{\beta,m}$ in Λ_m, converge alla corrispondente distribuzione congiunta secondo μ_β in Λ_∞.*

Cenni di dimostrazione. Siccome le distribuzioni di cui stiamo trattando sono tutte gaussiane a media nulla, è sufficiente valutare la convergenza della matrice (finita) di covarianza relativa alle variabili in questione. Ovviamente non abbiamo alcuna difficoltà con i seguenti termini:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_m(q_i p_j) = &\quad 0 &= \mathbb{E}(q_i p_j), \\ \mathbb{E}_m(p_i p_j) = &\quad \delta_{ij} &= \mathbb{E}(p_i p_j). \end{aligned} \tag{II.23}$$

Confrontando la (II.17) con la (II.18), si vede che il vero nodo della dimostrazione sta nel verificare che

$$\lim_{m\to\infty} (V_m)^{-1}_{ij} = \langle V^{-1/2} e_i, V^{-1/2} e_j \rangle, \tag{II.24}$$

per ogni scelta di $i, j \in \mathbb{Z}$; oppure, ciò che è lo stesso, che

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{ij} (V_m)^{-1}_{ij}\, \xi_i \xi_j = \| V^{-1/2} \xi \|^2_{\ell^2}, \tag{II.25}$$

per ogni $\xi \in d(\mathbb{Z})$ (vedi (II.15)). Fissiamo ora una successione ξ e consideriamo m grandi a sufficienza affinché $\xi_i = 0$ quando $|i| > m$. Il teorema spettrale, alcuni fatti basilari di teoria degli operatori, e una certa dose di pazienza, permettono di dimostrare i seguenti fatti (cfr. [Lan-Leb 74], Prop. 3.1):

(a) Se $m \le m_1$, allora $\langle V_m^{-1} \xi, \xi \rangle \le \langle V_{m_1}^{-1} \xi, \xi \rangle$.

(b) Preso $r > 0$, $\langle (V_m + r\mathbf{1}_m)^{-1} \xi, \xi \rangle \nearrow \langle (V + r\mathbf{1})^{-1} \xi, \xi \rangle$ per $m \nearrow \infty$.

(c) $\langle (V + r\mathbf{1})^{-1} \xi, \xi \rangle \nearrow \| V^{-1/2} \xi \|^2$ per $r \searrow 0$.

(d) $\langle (V_m + r\mathbf{1}_m)^{-1} \xi, \xi \rangle \nearrow \langle V_m^{-1} \xi, \xi \rangle$ per $r \searrow 0$.

Quando $m \to \infty$, la matrice identità su Λ_m, che abbiamo denotato con $\mathbf{1}_m$, tende fortemente a $\mathbf{1}$, la matrice identità su Λ_∞. Usando questi quattro enunciati, dimostriamo ora la (II.25).

Combinando (b) e (c) otteniamo

$$\forall r, m \quad \langle (V_m + r\mathbf{1}_m)^{-1}\xi, \xi\rangle \le \|V^{-1/2}\xi\|^2, \tag{II.26}$$

da cui, usando (d),

$$\forall m \quad \langle V_m^{-1}\xi, \xi\rangle \le \|V^{-1/2}\xi\|^2. \tag{II.27}$$

Questa stima ed (a) provano che il limite del membro sinistro della (II.27) esiste ed è minore o uguale al membro destro della stessa. Viceversa, si fissi $\varepsilon > 0$ e si scelga, sfruttando (c), un $r > 0$ tale che

$$\langle (V + r\mathbf{1})^{-1}\xi, \xi\rangle \ge \|V^{-1/2}\xi\|^2 - \varepsilon/2. \tag{II.28}$$

Questa disuguaglianza, unita a (d) e (b), mostra che per m grande abbastanza

$$\langle V_m^{-1}\xi, \xi\rangle \ge \langle (V_m + r\mathbf{1}_m)^{-1}\xi, \xi\rangle \ge \|V^{-1/2}\xi\|^2 - \varepsilon, \tag{II.29}$$

che garantisce la veridicità della (II.25). C.V.D.

II.4 Sottospazi gaussiani generanti

Ora che la Proposizione II.3 ci ha mostrato che il nostro sistema ha senso come limite termodinamico, ci si può chiedere delle proprietà ergodiche della tripla dinamica $(\Lambda_\infty, \phi_\infty[t], \mu_\beta)$.[3] A tale scopo, introduciamo il seguente concetto:

Definizione II.4 *Dato uno spazio di probabilità* $(X, \mathcal{A}, P)$*, si dice* sottospazio gaussiano generante *un sottospazio* h_1 *di* $L^2(P)$ *(su* $\mathbb{C}$*), chiuso e tale che:*

(a) ogni $\psi \in h_1$ *è una variabile random centrata con distribuzione gaussiana;*

(b) come sottoinsieme di $\mathcal{A}$*,* h_1 *genera l'intera* σ*-algebra.*

---

[3] In realtà, per definire un sistema dinamico, dovremmo specificare un quarto elemento: e cioè la σ-algebra delle funzioni misurabili. In questo caso è in qualche maniera ovvio che si scelga l'algebra prodotto della Borel su $\mathbb{R}^2$.

Come prima cosa, notiamo che questa definizione si attaglia al nostro caso. Sia h_1 definito come la chiusura, in $L^2(\Lambda_\infty, \mu_\beta)$, dello spazio delle combinazioni lineari complesse finite delle q_i e p_j. È immediato rendersi conto che questo sottospazio soddisfa gli assiomi della Definizione II.4. A causa della decrescita rapida dei nuclei $K_{ij}^{(n)}(t)$ nella (II.19) e della chiusura di h_1, vediamo anche che h_1 è lasciato invariante dall'operatore lineare di flusso che, con un leggero abuso di notazione, continuiamo a chiamare e^{tA}. Questo è un gruppo di operatori unitari sul sottospazio gaussiano generante e la presente sezione ci spiegherà come le proprietà ergodiche del nostro sistema dinamico si riducano alle proprietà spettrali di tale gruppo unitario che agisce su h_1.

Proposizione II.5 *Siano* $(X, \mathcal{A}, P)$ *e* $(\widehat{X}, \widehat{\mathcal{A}}, \widehat{P})$ *due spazi di probabilità, dotati rispettivamente di sottospazi gaussiani generanti* h_1 *e* $\widehat{h}_1$*. Per ogni isomorfismo (di spazi di Hilbert)* $U : h_1 \longrightarrow \widehat{h}_1$*, esiste un unico isomorfismo (di spazi di probabilità)* $T : (X, \mathcal{A}, P) \longrightarrow (\widehat{X}, \widehat{\mathcal{A}}, \widehat{P})$*, tale che* $U\psi = \psi \circ T$ *per ogni* $\psi \in h_1$*.*

Cenni di dimostrazione. Supponiamo per il momento che $\dim h_1 = \dim \widehat{h}_1 = n$. Data una qualsasi base in h_1, per mezzo di una diagonalizzazione e un riscalamento della matrice di covarianza, si può trovare una nuova base $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ tale che $\mathbb{E}(\psi_i \psi_j) = \delta_{ij}$. Allora anche le $\widehat{\psi}_i := U\psi_i$ godranno della stessa proprietà: $\widehat{\mathbb{E}}(\widehat{\psi}_i \widehat{\psi}_j) = \delta_{ij}$.

Questa costruzione assicura che le ψ_i (e le $\widehat{\psi}_i$) sono variabili indipendenti (perché scorrelate e gaussiane: si veda ogni libro di teoria delle probabilità, e.g., [Shiryayev]). Ovviamente la matrice cambio di base usata per costruire $\{\psi_i\}$ è non singolare e questo prova che $\mathcal{A} = \sigma(\psi_1, \ldots, \psi_n)$, e ovviamente $\widehat{\mathcal{A}} = \sigma(\widehat{\psi}_1, \ldots, \widehat{\psi}_n)$.[4]

Costruiamo ora l'isomorfismo di algebre nella seguente maniera:

$$U(\psi_1^{\alpha_1} \psi_2^{\alpha_2} \ldots \psi_n^{\alpha_n}) := \widehat{\psi}_1^{\alpha_1} \widehat{\psi}_2^{\alpha_2} \ldots \widehat{\psi}_n^{\alpha_n}, \tag{II.30}$$

con $0 \le \alpha_i < \infty$. Questo isomorfismo preserva la misura:

$$\begin{aligned} & P(\psi_1^{\alpha_1} \cdots \psi_n^{\alpha_n}) = \mathbb{E}(\psi_1^{\alpha_1}) \cdots \mathbb{E}(\psi_n^{\alpha_n}) = \\ = \; & \widehat{\mathbb{E}}(\widehat{\psi}_1^{\alpha_1}) \cdots \widehat{\mathbb{E}}(\widehat{\psi}_n^{\alpha_n}) = \widehat{P}(\widehat{\psi}_1^{\alpha_1} \cdots \widehat{\psi}_n^{\alpha_n}), \end{aligned} \tag{II.31}$$

[4]Scriviamo $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{B})$ quando la σ-algebra $\mathcal{A}$ è generata dal suo sottoinsieme $\mathcal{B}$.

la quale formula viene dall'indipendenza delle variabili coinvolte nonché dal fatto che per variabili gaussiane l'uguaglianza della varianza implica l'uguaglianza di tutti i momenti di ordine superiore.

Una volta costruito questo (unico) isomorfismo di algebre è piuttosto ragionevole credere che esso possa essere generato da una (unica) applicazione T (biiettiva q.d.) come nell'enunciato della proposizione. Per spiegarlo in poche parole, si costruisca su $(X, \mathcal{A}, P)$ una variabile f positiva la cui varianza, che chiamiamo ε, sia sufficientemente vicina a zero che f possa essere pensata come una delta attorno ad un punto $x \in X$. Questa variabile sarà una funzione delle ψ_i del tipo

$$f = \sum_\alpha C_\alpha \psi_1^{\alpha_1} \psi_2^{\alpha_2} \dots \psi_n^{\alpha_n} \tag{II.32}$$

per cui

$$Uf = \sum_\alpha C_\alpha \widehat{\psi}_1^{\alpha_1} \widehat{\psi}_2^{\alpha_2} \dots \widehat{\psi}_n^{\alpha_n}. \tag{II.33}$$

Siccome U è un isomorfismo di algebre che preserva la misura, Uf sarà più o meno una delta attorno ad un punto $\widehat{x} \in \widehat{X}$, con una varianza uguale ad ε. Definiamo perciò $Tx := \widehat{x}$.

Questo conclude la dimostazione nel caso che i sottospazi gaussiani generanti abbiano dimensione finita. Ma il caso infinito-dimensionale è giusto una semplice estensione di questo risultato: scrivendo $h_i = \bigcup_i k_i$, dove i k_i sono sottospazi a dimensione finita annidati in senso crescente, si possono trovare isomorfismi $U_i : \sigma(k_i) \to \sigma(U_i k_i)$. Per l'unicità, U_{i+1} è un'estensione di U_i, e, per l'esaustività dei k_i, ogni elemento di $(X, \mathcal{A}, P)$ appartiene al dominio di qualche U_i. Questo permette di costruire l'isomorfismo U fra i due spazi di probabilità, e quindi anche T, cosa che completa la dimostrazione nel caso generale. C.V.D.

Al risultato appena studiato segue il prossimo importante corollario.

Corollario II.6 *Sia $(X, \mathcal{A}, P)$ uno spazio di probabilità dotato di sottospazio gaussiano generante h_1. Le trasformazioni ortogonali di h_1 in se stesso sono in corrispondenza biunivoca con gli automorfismi di $(X, \mathcal{A}, P)$ che lasciano invariante h_1.*

In particolare, ritornando alla catena armonica, possiamo dire che $\phi_\infty[t] : \Lambda_\infty \longrightarrow \Lambda_\infty$, il flusso dell'evoluzione temporale, è in corrispondenza biunivoca con un gruppo ortogonale $U(t)$ su h_1, che nello specifico è il sottospazio introdotto dopo la Definizione II.4. Tramite i prossimi enunciati saremo in grado di conoscere le proprietà ergodiche del nostro sistema, a partire dall'analisi spettrale di $U(t)$.

Proposizione II.7 *Notazione come al Corollario* II.6. *Esiste un isomorfismo fra* $L^2(P)$ *e* $\bigoplus_{n=0}^\infty h_1^{\otimes_s n}$ *tale che, se* U *è una trasformazione ortogonale su* h_1 *e* T *l'automorfismo indotto su* $(X, \mathcal{A}, P)$*, l'azione di* T *su* $L^2(P)$ *corrisponde a*

$$\bigoplus_{n=0}^{\infty} \underbrace{U \otimes_s \ldots \otimes_s U}_{n \ volte} \quad su \quad \bigoplus_{n=0}^{\infty} h_1^{\otimes_s n}$$

La dimostrazione di questa proposizione viene omessa perché molto simile alla precedente dimostrazione, anche se un po' più complicata in quanto gli argomenti usati non assumono nemmeno all'inizio che la dimensione di h_1 sia finita. La referenza, in ogni caso, è sempre [Lan-Leb 74], Prop. 4.1.

Proposizione II.8 *Notazione come sopra. Si ha che*

(a) T *è ergodico se, e solo se,* U*, che agisce su* $(h_1)_\mathbb{C}$ *(il complessificato di* h_1*), non ha autovalori.*

(b) T *è mixing se, e solo se,* $\text{w-lim}_{|n|\to\infty} U^n = 0$*.*

(c) T *ha spettro di Lebesgue se, e solo se,* U*, su* $(h_1)_\mathbb{C}$*, ha spettro di Lebesgue.*

Dimostrazione. Usando rudimenti di teoria spettrale dei sistemi dinamici,[5] si vede che la (b) e la (c) sono conseguenze della Proposizione II.7. Proviamo quindi la (a). Per primo, si supponga che

$$U\psi = \lambda\psi, \tag{II.34}$$

[5] Vedi, ad esempio, [Arn-Ave].

con un λ di modulo unitario ed una $\psi \in (h_1)_{\mathbb{C}} \subset L^2(P)_{\mathbb{C}}$; ψ può essere considerata una combinazione lineare complessa di elementi di h_1. Ricordando come si scrive U in termini di T per la Proposizione II.5, (II.34) implica che $|\psi|$ è una funzione invariante in $L^2(P)_{\mathbb{C}}$. Ma certamente essa non può essere costante perché la parte reale e la parte immaginaria di ψ sono variabili gaussiane non degeneri. Ciò mostra che T non è ergodico.

D'altra parte, se U non ha autovalori allora, usando il teorema spettrale, nemmeno il prodotto tensoriale simmetrico di n operatori U, per $n > 0$, può avere autovalori. La Proposizione II.7 mostra quindi come solo lo spazio etichettato con $n = 0$, quello delle costanti, possa contenere autofunzioni. C.V.D.

Corollario II.9 *T è debolmente mixing se, e solo se, è ergodico.*

Proposizione II.10 *T è un automorfismo di Bernoulli*[6] *se, e solo se, U ha spettro di Lebesgue.*

Cenni di dimostrazione. Siccome un automorfismo di Kolmogorov ha spettro di Lebesgue numerabile, dobbiamo dimostrare solo una delle due implicazioni. Una buona referenza per questo tipo di argomenti può essere [Mañé].

Supponiamo dapprima che U abbia spettro di Lebesgue di molteplicità uniforme sul cerchio unitario. Possiamo allora scrivere che

$$h_1 = \bigoplus_{m=-\infty}^{+\infty} g_m, \tag{II.35}$$

ove i g_m sono ortogonali e tali che $U g_m = g_{m+1}$. Si chiami F_m la σ-algebra generata da g_m. La (II.35) ed il fatto che h_1 genera l'intera σ-algebra $\mathcal{A}$ (vedi Def. II.4) dimostrano che

$$\overline{\bigvee_{m=-\infty}^{\infty} F_m} = \mathcal{A}. \tag{II.36}$$

[6]Per evitare possibili confusioni, specifichiamo che qui si adotta la definizione di automorfismo di Bernoulli data, ad esempio, in [Mañé], in cui non si assume che la partizione generante sia finita. Alcuni, magari sulla scorta di [Arn-Ave], chiamano questo un *automorfismo di Bernoulli generalizzato*.

Ora, procede dalla definizione di F_m che $F_{m+1} = T\, F_m$. Inoltre l'ortogonalità dei g_m implica l'indipendenza delle $F_m = T^m\, F_0$, in quanto variabili gaussiane ortogonali sono indipendenti. Risultati standard di teoria ergodica (cfr. [Mañé], Esercizio 12.9) implicano che F_0 è l'algebra generante (non-atomica, nel nostro caso) di un sistema di Bernoulli.

Argomenti di carattere algebrico, riportati comunque in [Lan-Leb 74], completano la dimostrazione nel caso generale. C.V.D.

II.5 Proprietà ergodiche

Il complesso di definizioni e risultati sviluppata nella Sezione II.4 andrà ora applicata al nostro caso. Riprenderemo le notazioni ricordate immediatamente dopo il Corollario II.6. Come prima osservazione si noti che la norma

$$\|\psi\|_{-1/2} := \|V^{-1/2}\,\psi\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} \tag{II.37}$$

rende $D(V^{-1/2})$ uno spazio di Hilbert. Infatti, abbiamo già concluso in precedenza che V è limitato, perciò $\|V^{-1/2}\psi\| \gg \|\psi\|$, da cui

$$\|\psi\|^2_{-1/2} \approx \|\psi\|^2_{\ell^2} + \|V^{-1/2}\,\psi\|^2_{\ell^2}, \tag{II.38}$$

che è la norma del grafico di $V^{-1/2}$.

Ricordando la definizione (II.15), si costruisca la seguente mappa fra $d(\mathbb{Z}) \oplus d(\mathbb{Z})$ e h_1:

$$\xi \oplus \eta \mapsto \sum_i (\xi_i q_i + \eta_i p_i). \tag{II.39}$$

Usando la norma gaussiana definita dalle (II.18) è immediato rendersi conto che[7]

$$\|\sum_i (\xi_i q_i + \eta_i p_i)\|^2 = \|\xi\|^2_{-1/2} + \|\eta\|^2; \tag{II.40}$$

la quale rende la mappa definita nella (II.39) una isometria fra un sottospazio di $D(V^{-1/2}) \oplus \ell^2(\mathbb{Z})$ e h_1. Con il prossimo risultato si mostrerà che tale isometria è in realtà una trasformazione unitaria:

[7] Ove non meglio specificate da un deponente, tutte le norme si intenderanno, d'ora in poi, norme ℓ^2.

Lemma II.11 *$d(\mathbb{Z})$ è denso in $D(V^{-1/2})$.*

DIMOSTRAZIONE. Per assurdo: esiste $\psi \in D(V^{-1/2})$, non nullo, tale che, per ogni $\xi \in d(\mathbb{Z})$,

$$\langle V^{-1/2}\psi, V^{-1/2}\xi\rangle = 0. \tag{II.41}$$

Per costruzione, ξ ha solo un numero finito di componenti non nulle; sfruttando la (A3) ed il fatto che $V^{-1/2}$ è chiuso (come ricordato poco prima della (A3) stessa), si evince che la (II.41) è valida al limite anche quando $\xi \in s(\mathbb{Z})$.[8] Ora, (A1) implica che V porta $d(\mathbb{Z})$ in $s(\mathbb{Z})$. Per cui la (II.41) ci permette di scrivere che, per ogni $\xi' \in d(\mathbb{Z})$,

$$\langle V^{-1/2}\psi, V^{-1/2}\, V\xi'\rangle = \langle \psi, \xi'\rangle = 0, \tag{II.42}$$

il che è assurdo. C.V.D.

Consideriamo ora $U(t)$, la restrizione ad h_1 del gruppo unitario di evoluzione in $L^2(\Lambda_\infty, \mu_\beta)$. Il generatore ne è dato da:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_i (\xi_i q_i(t) + \eta_i p_i(t))\right]\Bigg|_{t=0} = \sum_i \xi_i p_i - \sum_{ij} \eta_i V_{ij} q_j. \tag{II.43}$$

L'isomorfismo unitario garantito dal precedente lemma ci permette di identificare, a tutti gli effetti, h_1 con $D(V^{-1/2}) \oplus \ell^2(\mathbb{Z})$. In particolare, in quest'ultimo, possiamo scrivere la matrice rappresentativa del generatore (II.43):

$$\begin{pmatrix} 0 & -V \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{II.44}$$

Si applichi ora l'isomorfismo $V^{-1/2} : D(V^{-1/2}) \longrightarrow \ell^2$ come cambio di coordinate (si noti che l'immagine di questo operatore è $R(V^{-1/2}) = D(V^{1/2}) = \ell^2$ perché, per la (A2), V è definito ovunque). In questa maniera $h_1 \simeq \ell^2 \oplus \ell^2$ e la matrice del generatore si riscrive come

$$\begin{pmatrix} V^{-1/2} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -V \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -V^{1/2} \\ V^{1/2} & 0 \end{pmatrix}. \tag{II.45}$$

[8] Si veda la definizione (II.13).

Finora abbiamo lavorato solamente su spazio di Hilbert reali, ma sappiamo dalle Proposizioni II.8 e II.10 che è più naturale usare le complessificazioni di questi spazi. Quindi è certamente lecito fare un ulteriore cambio di variabili, questa volta complesso:

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & i\mathbf{1} \\ i\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -V^{1/2} \\ V^{1/2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & -i\mathbf{1} \\ -i\mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iV^{1/2} & 0 \\ 0 & -iV^{1/2} \end{pmatrix}. \quad \text{(II.46)}$$

Questo risultato, unito alle Proposizioni II.8 e II.10, chiude la partita per quanto riguarda le proprietà ergodiche classiche della catena armonica in funzione del potenziale V. Diamo ad esso la formulazione di teorema.

Teorema II.12 *Il sistema dinamico* $(\Lambda_\infty, \phi_\infty[t], \mu_\beta)$*, che rappresenta una catena armonica con potenziale* V *dotata di misura di Gibbs a temperatura inversa* β*, è*

(a) ergodico (e debolmente mixing) se, e solo se, V *non ha autovalori;*

(b) di Bernoulli se, e solo se, V *ha spettro di Lebesgue.*

Capitolo III

La catena armonica quantistica

In questo capitolo trattiamo della catena armonica quantistica, seguendo [Gra-Mar 96]. In particolare, vedremo che senso dare alle varie nozioni di proprietà ergodiche in questo contesto; ferma restando la discussione fatta nell'Introduzione sui possibili significati di caos quantistico. Si osserverà per esempio, come avevamo già annunciato, che il concetto di *mixing quantistico* nel senso dei sistemi dinamici su C^*-algebre (cfr. [Bra-Rob], [Benatti]) è totalmente analogo a quello usato qui e poi nel Capitolo V (anche se la presentazione è data in termini di operatori pseudo-differenziali e alla specificazione delle algebre in gioco non viene dato eccessivo peso).

Come già all'inizio del Capitolo II, ammettiamo la non completezza di quanto segue: del lavoro originale di Graffi e Martinez non verrano riportate, ad esempio, le parti troppo tecniche né i continui confronti fra i risultati di quell'articolo e le nozioni ergodiche per le C^*-algebre. Per quanto concerne quest'ultimo punto, l'augurio è che la discussione del Capitolo I sia stata abbastanza soddisfacente.

Entriamo ora nel dettaglio definendo l'ambiente di lavoro. In completa analogia con la (II.16), introduciamo l'operatore di Schrödinger

$$H_m := \frac{1}{2}\left[\sum_{i=-m}^{m} P_i^2 + \sum_{i,j=-m}^{m} V_{ij} Q_i Q_j\right], \tag{III.1}$$

che agisce su $L^2(\mathbb{R}^{2m+1})$; $P_i := -i\partial/\partial q_i$, l'operatore di derivazione simmetrica e Q_i è l'operatore di moltiplicazione per la variabile q_i. Così facendo abbiamo posto $\hbar = 1$, fissato una volta per tutte per quello che riguarda il Capitolo III. L'evoluzione del sistema è data ovviamente dall' equazione di Schrödinger, che scriviamo per completezza: $\psi(t) = \psi(q;t) \in L^2_q(\mathbb{R}^{2m+1})$ è la funzione d'onda del sistema quando vale

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = H_m \psi. \tag{III.2}$$

A questo punto dobbiamo definire l'operazione di quantizzazione, cioè l'applicazione che associa ad una funzione reale (sufficientemente regolare) sullo spazio di fase $\Lambda_m = (\mathbb{R}^{2m+1})^2$ un operatore (formalmente) autoaggiunto in $L^2(\mathbb{R}^{2m+1})$. La scelta cade sulla quantizzazione di Weyl.[1] All'uopo scegliamo dapprima la classe di osservabili che saranno suscettibili di quantizzazione. Chiamiamo queste funzioni *simboli pseudo-differenziali* ([Shubin], [Folland]).

Definizione III.1 *Una funzione $a \in C^\infty(\Lambda_m)$ si dice simbolo pseudo-differenziale di ordine n su Λ_m quando, per ogni K, compatto di $\mathbb{R}^{2m+1}$, e per ogni coppia di multi-indici $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, esiste una costante $C = C(K, \alpha, \beta)$ tale che*

$$\left| \frac{\partial^\alpha}{\partial q^\alpha} \frac{\partial^\beta}{\partial p^\beta} a(q,p) \right| \le C\,(1+|p|^2)^{(n-|\beta|)/2}$$

per ogni $q \in K$. Denotiamo la classe dei simboli pseudo-differenziali di ordine n su Λ_m con $S^n(\Lambda_m)$.

Come è ben noto a tutti coloro che si siano occupati di analisi microlocale, questa definizione non è certamente la più generale che si possa dare (vedi, ad esempio [Folland], Pag. 88). D'altra parte, qui siamo interessati non già a dare risultati molto raffinati, ma piuttosto a fare affermazioni di carattere "dimostrativo", e certamente la famiglia S^n contiene tutti gli osservabili interessanti da un punto di vista fisico.

Dato un simbolo a di un certo ordine, il *quantizzato* di a è l'operatore

$$(\mathrm{Op}^W(a)u)(x) := (2\pi)^{-(2m+1)} \int_{\Lambda_m} a\Big(\frac{x+y}{2}, p\Big)\; e^{i(x-y)\cdot p}\, u(y)\, dy\, dp. \tag{III.3}$$

[1] Detta anche quantizzazione simmetrica poiché fa corrispondere ad un monomio nelle q e p la sua versione simmetrizzata. Ad esempio, $\mathrm{Op}^W(qp) = (QP+PQ)/2$. Ciò è facilmente ricavabile dalla (III.3).

Questo integrale oscillante è definito per $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2m+1})$, grazie alle proprietà di $a \in S^n$. L'operatore è poi opportunamente esteso ad insiemi più grandi a seconda dei casi.

È facile vedere che se $a = a(q)$, cioè è una funzione delle sole variabili di posizione, allora $\mathrm{Op}(a) = a(Q)$ [2] nel senso della teoria spettrale. Lo stesso discorso può essere fatto a proposito delle variabili di momento. Allora, confrontando la (III.1) con la (II.16), si vede che $H_m = \mathrm{Op}(\mathcal{H}_m)$.

III.1 Notazioni ed ipotesi preliminari

Per enunciare i risultati di questa sezione abbiamo bisogno di un certo numero di ipotesi, alcune delle quali vengono dal caso classico ed altre sono specifiche per il caso quantistico. Per comodità, così come in [Gra-Mar 96], le enunceremo indipendentemente da quelle del Capitolo II.[3]

(I1) Uniformemente in i e j
$$|V_{ij}| = \mathcal{O}(|i-j|^{-\infty}),$$
per $|i-j| \to +\infty$. Inoltre $\exists\, 0 < \varepsilon < M < \infty$ tale che $\forall m \geq 0$, $\sigma(V_m) \subset [\varepsilon, M]$.

Alcuni commenti sono necessari a questo punto. L'ipotesi sulla decrescita dei $|V_{ij}|$ non è altro che la (A1) riscritta in maniera più coincisa. Ricordando che V_m è la troncata della matrice infinita V [4] si vede che la seconda parte della (I1) è strettamente più forte delle (A2)-(A3). Infatti essa implica che sia V che V^{-1} sono operatori definiti su tutto $\ell^2(\mathbb{Z})$ e continui.

Ri-enunciamo ora la condizione che garantisce l'ergodicità classica (vedi Teorema II.12):[5]

---

[2]D'ora in poi scriveremo per semplicità Op al posto di Op^W.

[3]Dovrebbe essere chiaro che il simbolo σ indica qui, e più avanti, lo spettro di un operatore e non una σ-algebra.

[4]La definizione di V_m viene data dopo la (A2) nel Capitolo II.

[5]Si noti però che la (I2) (o la *(a)* del Teorema II.12, che è lo stesso) implica l'ergodicità di $(\Lambda_\infty, \phi_\infty[t], \mu_\beta)$ e non di $(\Lambda_\infty, \phi_\infty[t], \widehat{\mu}_\beta)$, come invece si vuole provare (vedi Teorema III.2). Vedremo nella Sezione III.4 che effettivamente la differenza non è rilevante.

(I2) L'operatore $V : \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ non ha autovalori.

Un esempio di matrice infinita che soddisfa (I1)-(I2) è dato dalla seguente $V = W$: dato $\alpha \in \mathbb{R}$, $|\alpha| < 1/2$, si pone

$$W_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{per } j = i, \\ \alpha & \text{per } j = i+1 \text{ o } j = i-1, \\ 0 & \text{per } |i-j| \geq 2. \end{cases} \tag{III.4}$$

Le (I1)-(I2) sono dimostrate, ad esempio, in [Sjöstrand 92].

Passiamo ora a formulare le ipotesi che sono direttamente collegate all'aspetto quantistico. Per far questo abbiamo bisogno di alcune notazioni che riprendiamo da [Folland]. Dati due vettori $f, g \in L^2(\mathbb{R}^{2m+1})$, si definisce l'associata *funzione di Wigner* $W_{f,g} = W_{f,g}(q,p)$ come il nucleo integrale dell'applicazione $b \mapsto \langle f, \mathrm{Op}(b) g \rangle$. Esplicitamente, si ricava l'integrale oscillante:

$$W_{f,g}(p,q) := (2\pi)^{-(2m+1)} \int_{\mathbb{R}^{2m+1}} e^{-ip\cdot z}\, \overline{f(q - z/2)}\, g(q + z/2)\, dz. \tag{III.5}$$

Quando $f = g$ scriviamo $w_f(q,p) := W_{f,f}(q,p)$ continuando a chiamare quest'ultima, con un leggero abuso di terminologia, funzione di Wigner.

Si consideri ora un'insieme di stati che giocheranno il ruolo di sostituti dei punti dello spazio di fase classico. Per tutti gli $m \in \mathbb{N}$, si prenda una spazio di probabilità (X_m, θ_m) e una famiglia $\{f_\lambda\}_{\lambda \in X_m}$ di funzioni in $L^2(\mathbb{R}^{2m+1})$ tali che

(I3) Per quasi ogni $(q,p) \in \Lambda_m$, nel senso di $dqdp$, l'applicazione $X_m \ni \lambda \mapsto w_{f_\lambda}(q,p)$ appartiene a $L^1(X_m, d\theta_m)$ e prende valori reali non negativi. Inoltre, la funzione
$$(q,p) \mapsto \int_{X_m} w_{f_\lambda}(q,p)\, d\theta_m(\lambda)$$
è q. d. costante (rispetto alla $dqdp$).

Con un po' di manipolazioni algebriche a partire dalla definizione di funzione di Wigner, si può vedere che la (I3), almeno formalmente, equivale alla proprietà

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Cost.} \int \langle A f_\lambda, f_\lambda \rangle\, d\theta_m(\lambda) \tag{III.6}$$

per ogni operatore A di tipo traccia. Questo integrale rimpiazza l'integrale di un osservabile classico nello spazio delle fasi e spiega come mai gli f_λ sono considerati surrogati dei punti classici.[6] Nella Sezione III.5 descriveremo in maggior dettaglio gli *stati coerenti*[7] relativi a questo caso, i quali sono il principale esempio di funzioni che soddisfano la (I3).

Ad ogni modo, vale sempre che $\int w_f(q,p)dqdp = \|f\|^2$. Come si vedrà nella Sezione III.4, la (I3) implica in particolare che

$$\int_{X_m} \|e^{-\beta H_m/2} f_\lambda\|^2 \, d\theta_m(\lambda) < +\infty \tag{III.7}$$

per cui ha senso definire la seguente misura di probabilità su X_m:

$$d\nu_m(\lambda) = \frac{\|e^{-\beta H_m/2} f_\lambda\|^2 d\theta_m(\lambda)}{\int_{X_m} \|e^{-\beta H_m/2} f_\lambda\|^2 d\theta_m(\lambda)}. \tag{III.8}$$

Ora si ponga[8]

$$W_\beta = 2V^{-1/2} \tanh \frac{\beta V^{1/2}}{2} \tag{III.9}$$

che, in virtù dell'ipotesi (I1), è ben definito su $\ell^2(\mathbb{Z})$.[9] Per ogni $\beta > 0$, si denoti con $\widehat{\mu}_\beta$ la misura di gaussiana su Λ_∞ centrata con covarianze:

$$\mathbb{E}(p_i p_j) = \langle W_\beta^{-1} e_i, e_j \rangle; \quad \mathbb{E}(q_i p_j) = 0; \quad \mathbb{E}(q_i q_j) = \langle (V W_\beta)^{-1} e_i, e_j \rangle. \tag{III.10}$$

In analogia con la (II.18), questa sarà chiamata la misura di Gibbs quantistica.

III.2 L'ergodicità quantistica

Il senso che diamo alla definizione di ergodicità quantistica è esplicitato dal

[6] A questo proposito può essere interessante osservare il parallelo con il calcolo delle funzioni di partizione: in meccanica classica attraverso un'integale e in meccanica quantistica attraverso una traccia che, sotto certi limiti, può ancora essere approssimata da un'integrale.

[7] Rimandiamo senz'altro a [Perelomov] per tutte le informazioni riguardo a definizioni e proprietà generali degli stati coerenti.

[8] L'apparente incongruenza fra la (III.9) e la (II.14) in [Gra-Mar 96] è spiegata dalla diversa definizione dell'operatore hamiltoniano: la nostra definizione (III.1) differisce dalla (II.2) di [Gra-Mar 96] per un fattore 1/2 al potenziale.

[9] Questo spiega come mai l'ipotesi (I1) sia stata scelta più restrittiva delle (A1)-(A3) del Capitolo II.

prossimo teorema, prima del quale definiamo

$$g_{m,\beta,\lambda} := \frac{e^{-\beta H_m/2} f_\lambda}{\|e^{-\beta H_m/2} f_\lambda\|}. \tag{III.11}$$

Questa operazione normalizza la famiglia di "punti quantistici" $\{f_\lambda\}_{\lambda \in X_m}$ secondo la misura di Gibbs.

Teorema III.2 *Si assumano le* (I1)-(I3). *Allora, per ogni $\beta > 0$, il sistema dinamico $(\Lambda_\infty, \phi_\infty[t], \widehat{\mu}_\beta)$ è ergodico.*

Inoltre, fissato un $m_1 \in \mathbb{N}$ e un simbolo pseudo-differenziale a di ordine 0 su Λ_{m_1} [10] *si denoti:*

$$A(m,n,T,\lambda) := \frac{1}{T}\int_0^T \left\langle e^{itH_n} \mathrm{Op}(a \circ \Pi_{m_1}) e^{-itH_n} g_{m,\beta,\lambda} \, , \, g_{m,\beta,\lambda} \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2m+1})} dt.$$

Si ha quindi

$$\lim_{T\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \limsup_{m\to\infty} \int_{X_m} |A(m,n,T,\lambda) - \widehat{\mu}_\beta(a \circ \Pi_{m_1})| d\nu_m(\lambda) = 0.$$

Osservazione. Si noti che $A(m,n,T,\lambda)$ è ben definito in quanto l'azione di $e^{itH_n}\mathrm{Op}(a \circ \Pi_{m_1})e^{-itH_n}$ su $g_{m,\beta,\lambda} \in L^2(\mathbb{R}^{2m+1})$ è evidentemente ben definita, per $m > n > m_1$.

Mentre rimandiamo la dimostrazione del Teorema III.2 alla Sezione III.4, facciamo qualche breve commento.

Il teorema ci dice che $A(m,n,T,\lambda)$ può essere preso arbitrariamente vicino a $\widehat{\mu}_\beta(a \circ \Pi_{m_1})$ in $L^1(X_m, d\nu_m(\lambda))$ scegliendo dapprima T, poi $n = n(T)$, ed infine $m = m(n,T)$ sufficientemente grandi. La convergenza puntuale di $A(m,n,T,\lambda)$ può essere dimostrata sotto certe restrizioni a patto che si scelgano come f_λ gli stati coerenti a cui si accennava prima (vedi Proposizione III.8).

Si veda che $W_\beta = \beta\mathbf{1} + \mathcal{O}(\beta^3)$, per $\beta \to 0$. Perciò la matrice di covarianza di $\widehat{\mu}_\beta$ tende a quella della corrispondente misura classica μ_β (con un errore solamente

[10]Graffi e Martinez enunciano questo teorema, così come il Teorema III.3, per una classe leggermente più ampia di osservabili a. Qui abbiamo $S^0(\Lambda_{m_1})$ per pura comodità di termini.

del terzo ordine in β). Questo ci permette di dire che ad alte temperature $\widehat{\mu}_\beta$ e μ_β sono asintoticamente uguali; il che certamente non è una sorpresa. In effetti, ad un'analisi più attenta, si può osservare che $\widehat{\mu}_\beta$ è il limite, per $m \to +\infty$, della misura di probabilità su Λ_∞ ottenuta normalizzando $e^{-\mathcal{H}_{\beta,m}(q,p)}dqdp$, dove

$$\mathcal{H}_{\beta,m}(q,p) := \mathcal{H}_m(W_{\beta,m}^{1/2}\, q, W_{\beta,m}^{1/2}\, p) \tag{III.12}$$

e, analogamente alla (III.9),

$$W_{\beta,m} = 2V_m^{-1/2} \tanh \frac{\beta V_m^{1/2}}{2}. \tag{III.13}$$

Infatti il teorema spettrale e la (I1) implicano che, per ogni funzione continua su $\mathbb{R}$, $\langle f(V_m)e_i, e_j\rangle$ tende a $\langle f(V)e_i, e_j\rangle$ quando $m \to +\infty$.

Questa relazione fra la misura classica e quella quantistica riflette la relazione fra $e^{-\beta H_m}$ (la matrice densità, non normalizzata, dell'ensemble canonico quantistico) e la quantizzazione di Weyl di $e^{-\beta\mathcal{H}_m}$ (la densità di probabilità dell'ensemble canonico classico). In formula:

$$e^{-\beta H_m} = C_{\beta,m}\, \mathrm{Op}(e^{-\mathcal{H}_{\beta,m}}), \tag{III.14}$$

ove $C_{\beta,m}$ è una certa costante (vedi il Lemma III.5 nella Sezione III.4). In particolare, se indichiamo con $a \sharp b$ la *composizione di Weyl* dei simboli a e b (cioè l'unico simbolo tale che $\mathrm{Op}(a \sharp b) = \mathrm{Op}(a)\mathrm{Op}(b)$)[11] otteniamo

$$e^{-\mathcal{H}_{\beta,m}} \sharp\, e^{-\mathcal{H}_{\beta,m}} = C'_{\beta,m}\, e^{-\mathcal{H}_{2\beta,m}}. \tag{III.15}$$

Di nuovo $C'_{\beta,m}$ è una costante al momento ininfluente. Confontando tra loro le (III.12)-(III.15), si capisce come mai $\widehat{\mu}_\beta$ appaia nell'enunciato del precedente teorema, una volta fissata la scelta delle $g_{m,\beta,\lambda}$ tramite la (III.11).

III.3 Il mixing quantistico

Per enunciare il mixing quantistico, dobbiamo postulare due proprietà aggiuntive:

[11] Vedi [Folland], Sez. 2.1 per maggiori dettagli. La formula esplicita di $a \sharp b$ si può trovare più avanti col numero (III.37).

(I4) Lo spettro di V è assolutamente continuo.

(I5) La matrice $W_{\beta,m}$ definita in (III.13) soddisfa

$$|(W_{\beta,m})_{ij}| = \mathcal{O}(|i-j|^{-\infty}),$$

uniformemente in $m,\ i$ e j, per $|i-j| \to \infty$.

Si noti l'ovvia relazione fra la (I4) e la parte *(b)* del Teorema II.12; di nuovo assumiamo che il mixing classico avvenga.[12] Per quello che riguarda la (I5), si può vedere che un'esempio di potenziale che la soddisfa è $V = \mathbf{1} + \alpha J$ dove J ammette solamente un numero finito di diagonali non nulle, ed α è piccolo abbastanza. In particolare, l'esempio descritto nella (III.4) soddisfa le (I1), (I4), (I5) per $|\alpha|$ sufficientemente piccolo.

Ora, dato $m_1 \in \mathbb{N}$ e $a \in S^n(\Lambda_{m_1})$, la trasformata di Fourier $\widehat{a} \in \mathcal{S}'(\Lambda_{m_1})$ è formalmente data dall'integrale:

$$\widehat{a}(\xi,\eta) = \int_{\Lambda_{m_1}} e^{-i(\xi\cdot q+\eta\cdot p)} a(q,p)\, dqdp. \qquad \text{(III.16)}$$

Il risultato concernente il mixing quantistico è allora:

Teorema III.3 *Si assumano le* (I1), (I4), (I5) *e si fissi un* $\beta > 0$. *Preso* $m_1 \in \mathbb{N}$ *ed* a, b *due simboli pseudo-differenziali di ordine 0 su* Λ_{m_1}, *si denoti, per ogni* $n \geq m_1$,

$$\begin{aligned} A &:= \mathrm{Op}(a \circ \Pi_{m_1}); \\ A_n(t) &:= e^{itH_n} A\, e^{-itH_n} = \mathrm{Op}(a \circ \Pi_{m_1} \circ \phi_n[t]); \\ B &:= \mathrm{Op}(b \circ \Pi_{m_1}). \end{aligned}$$

Si ha allora che

$$\omega_\beta(A) := \lim_{m\to\infty} \frac{\mathrm{Tr}(A\, e^{-\beta H_m})}{\mathrm{Tr}(e^{-\beta H_m})} = \widehat{\mu}_\beta(a \circ \Pi_{m_1})$$

e, se $\widehat{a}$ *e* $\widehat{b}$ *sono misure limitate su* Λ_{m_1},

$$\lim_{t\to\infty} \lim_{n\to\infty} \omega_\beta(A_n(t)\, B) = \omega_\beta(A)\, \omega_\beta(B).$$

[12] Per il sistema $(\Lambda_\infty, \phi_\infty[t], \mu_\beta)$: vedi la nota 5 di questo capitolo.

Osservazioni.

1. La relazione $e^{itH_n} A\, e^{-itH_n} = Op^W(a \circ \Pi_{m_1} \circ \phi_n[t])$ è la relazione di commutazione fra l'evoluzione temporale e l'operazione di quantizzazione. Detta talvolta *Teorema di Egorov esatto*,[13] essa è certamente fondamentale, come anticipato nell'Introduzione, perché rende i gruppi d'evoluzione temporale (agenti sugli osservabili classici e quantistici) isomorfi. In parole povere, si possono usare i teoremi classici di [Lan-Leb 74] per provare risultati quantistici. Tale importante risultato vale ovviamente[14] solo per flussi lineari. Inoltre la quantizzazione scelta deve essere quella di Weyl.

2. Sebbene questa nozione di mixing quantistico corrisponda a quella già esistente nel contesto dei sistemi dinamici su C^*- (o W^*-)algebre (vedi [Benatti], Pag. 111), il metodo qui adottato permette di evitare completamente la questione della realizzazione di un'algebra di operatori su uno spazio infinito-dimensionale. Inoltre, tramite il primo asserto del precedente teorema (vedi anche il Teorema III.2), si vede come le medie quantistiche possano essere riscritte in termini di una misura classica (vicina a quella di Gibbs). Questo fatto sarà ancora più evidente nel caso del gas ideale dove le due medie coincidono.

Se si fanno delle ulteriori restrizioni su V si può ottenere una formulazione dei risultati dei Teoremi III.2 e III.3 che elimina la fastidiosa necessità di un doppio limite. L'ipotesi aggiuntiva è la seguente:

(I6) Per tutti gli m positivi, esiste una matrice $(2m+1) \times (2m+1)$ $\widetilde{V}_m$, reale e simmetrica, che soddisfa l'ipotesi analoga alla (I1) per V_m, e tale che:

(i) $\forall i, j \in \mathbb{Z}$, $\langle \widetilde{V}_m^{-1} e_i, e_j \rangle \to \langle V^{-1} e_i, e_j \rangle_{\ell^2}$ per $m \to +\infty$;

[13] Cfr. [Robert], Sez. 5.4 e [Ber-Shu], Sez. 5.2.

[14] Non è fuori luogo dire "ovviamente" qui: essendo l'applicazione Op$(\cdot)$ lineare non possiamo avere problemi se il flusso è lineare; d'altronde è conoscenza acquisita dai libri di meccanica quantistica elementare che non appena si moltiplicano q e p, i generatori dell'algebra degli osservabili, si hanno ambiguità dovute al loro commutatore non nullo.

(ii) $\forall m \in \mathbb{Z}$, l'operatore $\Pi_m \widetilde{V}_n^{1/2} \Pi_n$ diventa indipendente da n, per n sufficientemente grande.

(iii) Quando $m \to +\infty$, l'operatore $\widetilde{V}_m^{-1/2} \Pi_m \widetilde{V}_n^{1/2} \Pi_n$ converge fortemente all'identità su ogni Y_k, $k \in \mathbb{N}$ (vedi definizione (II.14)).

È possibile vedere che un esempio di V che soddisfa la (I6), oltre alle (I1)-(I2), è fornito da $V := W^2$, ove, di nuovo, la W è la matrice infinita definita dalla (III.4): in questo caso si può prendere $\widetilde{V}_m := (W_m)^2$ dove W_m è la W troncata a $2m+1$ righe e $2m+1$ colonne.

Assumendo la (I6), definiamo, per $0 < \beta < (2M)^{-1/2}$ (M è introdotto nella (I1)),

$$\widetilde{\mathcal{H}}_{\beta,m}(q,p) := (F_{\beta,m}\, p) \cdot p + (G_{\beta,m}\, q) \cdot q \tag{III.17}$$

dove, essendo $\mathbf{1}_m$ l'identità su $\mathbb{R}^{2m+1}$,

$$F_{\beta,m} := \frac{1}{2\beta} \widetilde{V}_m^{-1} \left(\mathbf{1}_m - (\mathbf{1}_m - 2\beta^2\, \widetilde{V}_m)^{1/2} \right) \tag{III.18}$$

$$G_{\beta,m} := \widetilde{V}_m F_{\beta,m}. \tag{III.19}$$

Proseguendo, consideriamo la seguente misura di probabilità su X_m:

$$d\widetilde{\nu}_m(\lambda) := \frac{\|\mathrm{Op}(e^{-\widetilde{\mathcal{H}}_{\beta,m}}) f_\lambda\|^2\, d\theta_m(\lambda)}{\int_{X_m} \|\mathrm{Op}(e^{-\widetilde{\mathcal{H}}_{\beta,m}}) f_{\lambda'}\|^2\, d\theta_m(\lambda')}. \tag{III.20}$$

Tutto questo conduce al prossimo teorema:

Teorema III.4 *Si assumano le* (I1)-(I3) *e la* (I6). *Fissati* $m_1 \in \mathbb{N}$, $a \in S^0(\Lambda_{m_1})$ *e* $0 < \beta < (2M)^{-1/2}$, *si denoti*

$$\widetilde{g}_{m,\beta,\lambda} := \frac{\mathrm{Op}(e^{-\widetilde{\mathcal{H}}_{\beta/2,m}}) f_\lambda}{\|\mathrm{Op}(e^{-\widetilde{\mathcal{H}}_{\beta/2,m}}) f_\lambda\|}$$

e

$$\widetilde{A}(m,T,\lambda) := \frac{1}{T} \int_0^T \left\langle e^{itH_n} \mathrm{Op}(a \circ \Pi_{m_1}) e^{-itH_n} \widetilde{g}_{m,\beta,\lambda}\, ,\, \widetilde{g}_{m,\beta,\lambda} \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^{2m+1})} dt.$$

Si ha che

$$\lim_{T\to\infty} \limsup_{m\to\infty} \int_{X_m} |A(m,T,\lambda) - \mu_\beta(a \circ \Pi_{m_1})| d\widetilde{\nu}_m(\lambda) = 0.$$

Si assuma inoltre la (I4) *e sia* $b \in S^0(\Lambda_{m_1})$. *Allora le proposizioni del Teorema III.3 diventano rispettivamente*

$$\widetilde{\omega}_\beta(A) := \lim_{m\to\infty} \frac{\mathrm{Tr}(A\,\mathrm{Op}(e^{-\beta\mathcal{H}_m}))}{\mathrm{Tr}(\mathrm{Op}(e^{-\beta\mathcal{H}_m}))} = \mu_\beta(a \circ \Pi_{m_1})$$

e

$$\lim_{t\to\infty}\lim_{m\to\infty} \widetilde{\omega}_\beta(A_m(t)\,B) = \widetilde{\omega}_\beta(A)\,\widetilde{\omega}_\beta(B),$$

se $\widehat{a}$ *e* $\widehat{b}$ *sono misure limitate su* Λ_{m_1}.

Osservazioni.

1. La scelta della forma quadratica $\widetilde{\mathcal{H}}_{\beta,m}$ è dettata dal fatto che si ha, per una certa costante $C''_{\beta,m}$,
$$e^{-\widetilde{\mathcal{H}}_{\beta,m}} \,\sharp\, e^{-\widetilde{\mathcal{H}}_{\beta,m}} = C''_{\beta,m}\, e^{-2\beta\widetilde{\mathcal{H}}_m} \tag{III.21}$$
ove
$$\widetilde{\mathcal{H}}_m(q,p) := \frac{1}{2}\left[|p|^2 + (\widetilde{V}_m\, q)\cdot q\right]. \tag{III.22}$$
Se si osserva la (I6)(i), la precedente equazione spiega come mai al limite $m \to +\infty$, nel Teorema III.4, si ottiene la misura di Gibbs classica μ_β. Si può anche notare che
$$F_{\beta,m} = \frac{\beta}{2}\mathbf{1}_m + \mathcal{O}(\beta^3); \quad G_{\beta,m} = \frac{\beta}{2}V_m + \mathcal{O}(\beta^3), \tag{III.23}$$
per cui $\mathcal{H}_{\beta,m}$ diventa, ad alte temperature ($\beta \to 0$), asintoticamente uguale a $\beta\mathcal{H}_m$.

2. Alla luce della precedente osservazione, è possibile andare a confrontare $\mathrm{Op}(e^{-\mathcal{H}_{\beta,m}})$ con $e^{-\widetilde{H}_m}$, dove $\widetilde{H}_m := (1/2)\,[|P|^2 + (\widetilde{V}_m\,Q)\cdot Q]$ (vedi la (III.22) e la (III.1)). Infatti, mentre quest'ultimo è l'operatore di Schrödinger che determina l'evoluzione del sistema, $\mathrm{Op}(e^{-\mathcal{H}_{\beta,m}})$ è la matrice di densità nel canonico. Il risultato è esprimibile in termini di un "operatore errore", che qui non riportiamo (vedi [Gra-Mar 96], seconda osservazione dopo il Teorema II.3).

III.4 Dimostrazione dell'ergodicità quantistica

Di tutti gli enunciati nelle sezioni precedenti daremo solo la dimostrazione del Teorema III.2. Questa difatti contiene già le idee fondamentali che stanno alla base di [Gra-Mar 96], ed ha il pregio di essere più leggibile della dimostrazione del Teorema III.3. Ad ogni modo, il risultato sul mixing quantistico della catena armonica è fortemente analogo al corrispondente risultato per il gas ideale, formulato nel Teorema V.2, la cui dimostrazione si trova nel Capitolo V. Il Teorema III.4, d'altro canto, è strettamente tecnico. È ovvio comunque che la miglior fonte per coloro che fossero interessati a leggere tutte le dimostrazioni è [Gra-Mar 96]!

Per dimostrare il Teorema III.2, dobbiamo per prima cosa far vedere che il sistema $(\Lambda_\infty, \phi_\infty[t], \widehat{\mu}_\beta)$ è ergodico: come già ricordato nella nota 5, questo non fa esattamente parte dei risultati del Capitolo II, ma in effetti le stesse tecniche posso essere applicate, come qui di seguito. L'idea di base è che, attraverso la trasformazione $(q,p) \mapsto (W_\beta^{1/2} q, W_\beta^{1/2} p)$, la misura $\widehat{\mu}_\beta$, definita dalle (III.10), diventa μ_β, come nelle (II.18). D'altronde non si incontrano problemi di sorta perché W_β (cfr. (III.9)) commuta con V.

Comunque, per andare un po' più in dettaglio, vediamo che, a causa della commutatività appena citata, la Proposizione II.2 si applica anche alla misura $\widehat{\mu}_\beta$, che è perciò invariante per l'evoluzione temporale. Con riferimento alla Sezione II.4, si definisce come sottospazio gaussiano generante $\widehat{h}_1$ la chiusura in $L^2(\Lambda_\infty, \widehat{\mu}_\beta)$ delle combinazioni lineari finite delle q_i e p_j. Poi si mostra che $\widehat{h}_1 \simeq D((VW_\beta)^{-1/2}) \oplus D(W_\beta^{-1/2})$ ed infine si identifica $D((VW_\beta)^{-1/2}) \oplus D(W_\beta^{-1/2})$ con $\ell^2(\mathbb{Z}) \oplus \ell^2(\mathbb{Z})$. Con un ulteriore cambio (complesso) di variabili, $\widehat{U}(t)$, la restrizione ad $\widehat{h}_1$ del gruppo unitario di evoluzione in $L^2(\Lambda_\infty, \widehat{\mu}_\beta)$, è rappresentato dalla matrice

$$\begin{pmatrix} iV^{1/2} & 0 \\ 0 & -iV^{1/2} \end{pmatrix} \tag{III.24}$$

come nella (II.46). A questo punto si utilizza l'argomento della Proposizione II.8, *(a)*.

Per mostrare la seconda parte dell'enunciato del teorema, abbiamo bisogno del seguente lemma:

Lemma III.5 *Esiste una costante $C_{\beta,m}$ tale che*

$$e^{-\beta H_m} = C_{\beta,m}\,\mathrm{Op}(e^{-\mathcal{H}_{\beta,m}})$$

DIMOSTRAZIONE. Siano $\lambda_{-m}, \cdots, \lambda_m$ gli autovalori di V_m, e siano $y = (y_{-m}, \cdots, y_m)$ le coordinate in $\mathbb{R}^{2m+1}$ che diagonalizzano V_m. In questo nuovo sistema H_m diventa:

$$H'_m = -\frac{1}{2}\left[\Delta_y + \sum_j \lambda_j y_j^2\right] \tag{III.25}$$

mentre l'operatore $K_m := \mathrm{Op}(e^{-\mathcal{H}_{\beta,m}})$ viene trasformato in:

$$K'_m = \bigotimes_{j=-m}^{m} \mathrm{Op}\left(\exp\left[-\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_j}}\tanh\left(\beta\sqrt{\frac{\lambda_j}{4}}\right)\eta_j^2 + \sqrt{\lambda_j}\tanh\left(\beta\sqrt{\frac{\lambda_j}{4}}\right)y_j^2\right)\right]\right). \tag{III.26}$$

Qui η è la variabile duale di y definita da $p = ({}^tM)^{-1}\eta = M\eta$, dove M è la matrice ortogonale che dà $q = My$. Se applichiamo l'ulteriore cambio di variabili

$$y_j \mapsto z_j = \lambda_j^{1/4} y_j, \tag{III.27}$$

H'_m diventa[15]

$$H''_m = \sum_j \sqrt{\frac{\lambda_j}{4}}\,(D_{z_j}^2 + z_j^2) \tag{III.28}$$

mentre K'_m va in

$$K''_m = \bigotimes_{j=-m}^{m} \mathrm{Op}\left(\exp\left[-\tanh\left(\beta\sqrt{\frac{\lambda_j}{4}}\right)(\zeta_j^2 + z_j^2)\right]\right). \tag{III.29}$$

Ora si consideri la seguente identità in una dimensione, la quale vale per ogni $0 < a < 1$:

$$\mathrm{Op}(e^{-a(x^2+\xi^2)}) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\exp\left(-\frac{a}{2}x^2\right)\exp\left(-\frac{a}{1-a^2}D_x^2\right)\exp\left(-\frac{a}{2}x^2\right). \tag{III.30}$$

[15] Il lettore si sarà accorto che qui stiamo adottando la notazione dell'analisi microlocale: perciò è più "naturale" scrivere $D_{z_j} = P_{z_j}$ per indicare l'operatore di derivazione simmetrica $-i\partial/\partial z_i$.

Questa relazione può essere dimostrata, ad esempio, calcolando esplicitamente il simbolo di Weyl del membro destro attraverso la formula di composizione (vedi [Folland], Sez. 2.1). La prossima formula, invece, si può trovare in [Helffer 94]:

$$e^{-\frac{x^2}{2}}e^{-tD_x^2}e^{-\frac{x^2}{2}} = \exp\left[-\frac{\ln(z+\sqrt{z^2-1})}{4k\sqrt{z^2-1}}\left(D_x^2+4k^2(z^2-1)x^2\right)\right]; \tag{III.31}$$

qui $k = 1/(4t)$, $z = 2t+1$ $(t > 0)$. In particolare, per $0 < a < 1$, otteniamo

$$\mathrm{Op}(e^{-a(x^2+\xi^2)}) = \frac{1}{\sqrt{1-a^2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1+a}{1-a}\right)(D_x^2+x^2)\right]. \tag{III.32}$$

Scegliendo $a = \tanh(\beta\sqrt{\lambda_j/4})$, il lemma segue da (III.28)-(III.32). C.V.D.

Come già ricordato, il fatto principale che viene usato in queste dimostrazioni è il Teorema di Egorov esatto, cioè la relazione

$$e^{itH_n}\mathrm{Op}(a)e^{-itH_n} = \mathrm{Op}(a\circ\phi_n[t]), \tag{III.33}$$

dove $\phi_n[t]$ è il flusso su Λ_n generato dall'hamiltoniana $\mathcal{H}_n$ e a è un simbolo pseudo-differenziale preso in una certa classe.

Per $n \le m$ e $(q,p) \in \Lambda_m$, si denoti

$$\rho(m,\lambda) := \|e^{-\beta H_m/2}f_\lambda\|^2 \tag{III.34}$$

$$a_{n,T}(q,p) := \frac{1}{T}\int_0^T (a\circ\Pi_{m_1}\circ\phi_n[t]\circ\Pi_n)(q,p)\,dt. \tag{III.35}$$

Utilizzando il Lemma III.5, la (III.33) e la (III.5) con $f = g$, otteniamo:

$$A(m,n,T,\lambda) = \frac{C_{\beta,m}^2}{\rho(m,\lambda)}\int_{\Lambda_m}\left(e^{-\mathcal{H}_{\beta/2,m}}\sharp\, a_{n,T}\,\sharp\, e^{-\mathcal{H}_{\beta/2,m}}\right)(q,p)w_{f_\lambda}(q,p)dqdp \tag{III.36}$$

dove $\sharp$ è la composizione di Weyl su Λ_m (cfr. [Folland], Sez. 2.1), esplicitamente data da

$$(a\,\sharp\, b)(q,p) = \pi^{-2(2m+1)}\int_{\Lambda_m^2} a(q+y,p+\eta)b(q+z,p+\zeta)\,e^{2i(\zeta y - z\eta)}dyd\eta dzd\zeta. \tag{III.37}$$

L'ipotesi (I3) entra ora in gioco: da essa e dalla (III.36) ricaviamo:

$$\int_{X_m} A(m,n,T,\lambda)\rho(m,\lambda)d\theta_m(\lambda) = C_0\int_{\Lambda_m}\left(e^{-\mathcal{H}_{\beta/2,m}}\sharp\, a_{n,T}\,\sharp\, e^{-\mathcal{H}_{\beta/2,m}}\right)(q,p)dqdp; \tag{III.38}$$

$$\int_{X_m} |A(m,n,T,\lambda)|\rho(m,\lambda)d\theta_m(\lambda) \leq C_0 \int_{\Lambda_m} |\left(e^{-\mathcal{H}_{\beta/2,m}} \sharp\, a_{n,T} \sharp\, e^{-\mathcal{H}_{\beta/2,m}}\right)(q,p)|dqdp, \tag{III.39}$$

dove $C_0 = C_0(\beta, m)$ è una costante che può essere calcolata prendendo $a \equiv 1$ nella (III.38):

$$C_0 = \left(\int e^{-\mathcal{H}_{\beta/2,m}} \sharp\, e^{-\mathcal{H}_{\beta/2,m}} dqdp\right)^{-1} \int_{X_m} \rho(m,\lambda)d\theta_m(\lambda). \tag{III.40}$$

Fra l'altro, ciò prova la (III.7) di modo che, usando la notazione (III.8), possiamo riscrivere le (III.38)-(III.39) come:

$$\int_{X_m} A(m,n,T,\lambda)d\nu_m(\lambda) = C_1 \int_{\Lambda_m} \left(e^{-\mathcal{H}_{\beta/2,m}} \sharp\, a_{n,T} \sharp\, e^{-\mathcal{H}_{\beta/2,m}}\right)(q,p)dqdp; \tag{III.41}$$

$$\int_{X_m} |A(m,n,T,\lambda)|d\nu_m(\lambda) \leq C_1 \int_{\Lambda_m} |\left(e^{-\mathcal{H}_{\beta/2,m}} \sharp\, a_{n,T} \sharp\, e^{-\mathcal{H}_{\beta/2,m}}\right)(q,p)|dqdp. \tag{III.42}$$

con

$$C_1 = \left(\int \left(e^{-\mathcal{H}_{\beta/2,m}} \sharp\, e^{-\mathcal{H}_{\beta/2,m}}\right) dqdp\right)^{-1}. \tag{III.43}$$

Sfruttiamo ora le seguenti due proprietà della composizione di Weyl, valide ad esempio per $a, b, c \in \mathcal{S}(\Lambda_m)$:

$$\int_{\Lambda_m} (a \sharp b \sharp c)(q,p)dqdp = \int_{\Lambda_m} (b \sharp c \sharp a)(q,p)\, dqdp; \tag{III.44}$$

$$\int_{\Lambda_m} (a \sharp b)(q,p)dqdq = \int_{\Lambda_m} a(q,p)b(q,p)\, dqdp. \tag{III.45}$$

La prima di queste due uguaglianze è una diretta conseguenza della (III.6) e della ciclicità della traccia. La seconda, invece, si calcola direttamente dalla (III.37) e, insieme alla (III.6), prende il nome di *proprietà di traccia* (si veda anche la (V.10) al Capitolo V e [DeB-Gon 93]).

Il simbolo a qui non sta necessariamente in $\mathcal{S}(\Lambda_m)$, ma un semplice argomento di densità ci permette di usare le (III.44)-(III.45), insieme alla (III.15), sulla (III.41), al fine di ottenere:

$$\int_{X_m} A(m,n,T,\lambda)d\nu_m(\lambda) = \int_{\Lambda_m} a_{n,T}(q,p) \left[e^{-\mathcal{H}_{\beta,m}(q,p)} dqdp\right]_N, \tag{III.46}$$

dove si è introdotta la notazione

$$\int_E f\,[d\mu]_N = \frac{1}{\mu(E)}\int_E f d\mu \tag{III.47}$$

per ogni misura finita positiva μ su un insieme misurabile E.

Il problema che si pone ora è di riscrivere anche la (III.42) in questa maniera, nonostante il valore assoluto che vi compare. Arriveremo a questo risultato usando il lemma seguente.

Lemma III.6 *Su Λ_m^2 esiste una forma quadratica $Q_{\beta,m}(q,p,y,\eta)$, definita positiva, e tale che per ogni simbolo pseudo-differenziale a,*

$$e^{-\mathcal{H}_{\beta,m}}\,\sharp\, a\,\sharp\, e^{-\mathcal{H}_{\beta,m}} = C'_{\beta,m}\,\widetilde{a}\, e^{-\mathcal{H}_{2\beta,m}},$$

dove $C'_{\beta,m}$ è esattamente la costante che appare nella (III.15)*, e*

$$\widetilde{a}(q,p) = \int_{\Lambda_m} a(y,\eta)\left[e^{-Q_{\beta,m}(q,p,y,\eta)}dyd\eta\right]_N.$$

Dimostrazione. Vedi Capitolo VI, Sezione VI.1.

In particolare da questo lemma deduciamo che esiste una funzione positiva $\gamma(q,p)$, in $C^\infty(\Lambda_m)$, tale che per ogni $a \in S^0(\Lambda_m)$:

$$\int_{\Lambda_m}\left(e^{-\mathcal{H}_{\beta/2,m}}\,\sharp\, a\,\sharp\, e^{-\mathcal{H}_{\beta/2,m}}\right)dqdp = \int_{\Lambda_m} a(q,p)\gamma(q,p)dqdp; \tag{III.48}$$

$$\int_{\Lambda_m}\left|e^{-\mathcal{H}_{\beta/2,m}}\,\sharp\, a\,\sharp\, e^{-\mathcal{H}_{\beta/2,m}}\right|dqdp = \int_{\Lambda_m} |a(q,p)|\gamma(q,p)dqdp. \tag{III.49}$$

Dalle (III.41), (III.46) e (III.48) vediamo che γ è uguale a $e^{-\mathcal{H}_{\beta,m}}$, a parte fattori moltiplicativi. Tramite la (III.42) e la (III.49) si deduce che:

$$\int_{X_m}|A(m,n,T,\lambda)|\,d\nu_m(\lambda) \le \int_{\Lambda_m}|a_{n,T}(q,p)|\left[e^{-\mathcal{H}_{\beta,m}(q,p)}dqdp\right]_N. \tag{III.50}$$

Senza perdere di generalità, possiamo assumere da questo momento in poi che $\widehat{\mu}_\beta(a\circ\Pi_{m_1}) = 0$, in maniera tale che ci rimane solo da stimare il membro destro della disuguaglianza (III.50). Siccome $a_{n,T}(q,p)$ dipende unicamente da $\Pi_n(q,p)$, possiamo mandare m all'infinito nella (III.50) per avere:

$$\limsup_{m\to\infty} \int_{X_m} |A(m,n,T,\lambda)|\, d\nu_m(\lambda) \leq \widehat{\mu}_\beta(|a_{n,T}|). \tag{III.51}$$

A questo punto ci ricordiamo della (II.12) e lasciamo andare n all'infinito nella (III.51). Per il teorema della convergenza dominata, troviamo che

$$\limsup_{n\to\infty} \limsup_{m\to\infty} \int_{X_m} |A(m,n,T,\lambda)|\, d\nu_m(\lambda) \leq \widehat{\mu}_\beta \left(\left| \frac{1}{T} \int_0^T (a \circ \Pi_{m_1} \circ \phi_\infty[t]) dt \right| \right). \tag{III.52}$$

Infine si calcola il limite della media temporale, usando l'ergodicità, dimostrata in precedenza:

$$\frac{1}{T} \int_0^T (a \circ \Pi_{m_1} \circ \phi_\infty[t])(q,p)\, dt \longrightarrow \widehat{\mu}_\beta(a \circ \Pi_{m_1}) = 0 \tag{III.53}$$

per quasi ogni (q,p) in Λ_∞ nel senso di $\widehat{\mu}_\beta$. Di nuovo applichiamo il teorema della convergenza dominata, questa volta su (III.52):

$$\lim_{T\to+\infty} \limsup_{n\to\infty} \limsup_{m\to\infty} \int_{X_m} |A(m,n,T,\lambda)| d\nu_m(\lambda) \leq 0. \tag{III.54}$$

Questo completa la dimostrazione del Teorema III.2. C.V.D.

III.5 L'esempio degli stati coerenti

Lo scopo di questa sezione è di fornire un (importante) esempio di stati $\{f_\lambda\}_{\lambda\in X_m}$, introdotti nella Sezione III.1. Si è già detto che intuitivamente questi stati possono essere considerati come dei sostituti dei punti di fase classici. Perciò non è sorprendente scegliere come esempio principale gli stati coerenti, che sono, a parte fattori di fase, delle funzioni gaussiane sia nella rappresentazione delle posizioni, sia in quella dei momenti: ognuna di queste gaussiane è centrata in un punto (q,p) ed è tanto piccata quanto il principio d'indeterminazione di Heisenberg consente, fissata la costante di Planck h.

Scendendo nel dettaglio, prendiamo $X_m = \Lambda_m$, i cui elementi denotiamo con $\lambda = (\lambda_q, \lambda_p)$; la misura di probabilità è $d\theta_m(\lambda) = d\lambda$. Gli stati coerenti sono definiti da[16]

$$f_\lambda(q) = (\pi h)^{-m/4}\, e^{iq\lambda_p/h-(q-\lambda_q)^2/2h}. \qquad \text{(III.55)}$$

Un modo di costruire queste funzioni è partire dalla guassiana standard f_0 (cioè (III.55) con $\lambda = (0, 0)$) e lasciar agire il gruppo di Heisenberg:

$$f_{(\lambda_q,\lambda_p)} = e^{i(\lambda_p\cdot Q-\lambda_q\cdot P)}\, f_0. \qquad \text{(III.56)}$$

Per una generica f_0 questa è la maniera in cui [Perelomov], ad esempio, definisce i cosiddetti *stati coerenti generalizzati* (vedi anche la Sezione VI.2 nell'Appendice). A partire dalla (III.55), si può calcolare la funzione di Wigner (con $\hbar = 1$):

$$w_{f_\lambda}(q, p) = 2^{2m+1}\, \pi^{m+1/2}\, e^{-(p-\lambda_p)^2-(q-\lambda_q)^2}, \qquad \text{(III.57)}$$

che soddisfa evidentemente la (I3). Allora gli enunciati dei Teoremi III.2 e III.4, ad esempio, valgono per questa famiglia di stati, quando V soddisfa le (I1)-(I2), oppure le (I1)-(I3), (I6).

D'altra parte, un grande vantaggio degli stati coerenti è che essi permettono di dare una migliore formulazione dell'ergodicità quantistica, come vedremo qui di seguito. Ciò è conseguenza del prossimo lemma, che si applica al caso in questione.

Lemma III.7 *Per stati f_λ come nella* (III.55)*, le due misure $d\nu_m(\lambda)$ e $d\widetilde{\nu}_m(\lambda)$, definite rispettivamente dalle* (III.8) *e* (III.20)*, sono misure di probabilità gaussiane su $X_m = \Lambda_m$.*

Dimostrazione. In ciascuno dei due casi la misura è della forma $C\|\mathrm{Op}(e^{-u})f_\lambda\|^2 d\lambda$, dove C è una costante e u una forma quadratica su Λ_m, definita positiva. Con ragionamenti analoghi a quelli che portano alla (III.36), per esempio, si può ricavare:

$$\|\mathrm{Op}(e^{-u})f_\lambda\|^2 = C' \int_{\Lambda_m} (e^{-u} \sharp\, e^{-u})(q, p) w_{f_\lambda}(q, p) dq dp, \qquad \text{(III.58)}$$

[16] Si noti che nel nostro caso h è stato fissato una volta per tutte uguale a 2π ($\hbar = 1$, come specificato all'inizio del capitolo). Nella (III.55) abbiamo lasciato tale costante indicata per mostrare che gli stati coerenti si piccano quando $h \to 0^+$.

essendo C' un'altra costante. Siccome $e^{-u} \sharp e^{-u} = C'' e^{-u'}$, per una certa forma quadratica u' e una certa costante C'', allora il lemma segue da (III.57). C.V.D.

Denotiamo ora con L_m e $\widetilde{L}_m$ le due matrici $(4m+2) \times (4m+2)$, reali, simmetriche e definite positive, che si ricavano dal precedente lemma, se scriviamo

$$d\nu_m(\lambda) = \left[e^{-\langle L_m \lambda, \lambda\rangle} d\lambda\right]_N; \qquad \text{(III.59)}$$

$$d\widetilde{\nu}_m(\lambda) = \left[e^{-\langle \widetilde{L}_m \lambda, \lambda\rangle} d\lambda\right]_N. \qquad \text{(III.60)}$$

Allora, per ogni funzione limitata $A(\lambda)$ su Λ_m, abbiamo:

$$\int_{\Lambda_m} A(\lambda)\, d\nu_m(\lambda) = \int_{\Lambda_m} A(L_m^{-1/2}\lambda) \left[e^{-\|\lambda\|^2} d\lambda\right]_N \qquad \text{(III.61)}$$

e perciò, tramite argomenti standard sui limiti di misure gaussiane (vedi, per es., [Lan-Leb 74]) e per il fatto che A dipende solo da un numero finito di variabili,

$$\int_{\Lambda_m} A(\lambda)\, d\nu_m(\lambda) = \nu(A \circ L_m^{-1/2} \circ \Pi_m), \qquad \text{(III.62)}$$

dove ν è la misura infinito-dimensionale su Λ_∞ ottenuta come limite delle $[e^{-\|\lambda\|^2} d\lambda]_N$ su Λ_n, quando $n \to +\infty$. Una formula analoga alla (III.62) vale ovviamente anche quando c'è $\widetilde{\nu}_m$ al membro sinistro. I risultati dei Teoremi III.2 e III.4 si leggono in questo caso come:

$$\lim_{T\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \limsup_{m\to\infty} \int_{\Lambda_\infty} \left| A(m,n,T,L_m^{-1/2}\Pi_m\lambda) - \int_{\Lambda_\infty} (a \circ \Pi_{m_1}) d\widehat{\mu}_\beta \right| d\nu(\lambda) = 0, \qquad \text{(III.63)}$$

$$\lim_{T\to\infty} \limsup_{m\to\infty} \int_{\Lambda_\infty} \left| \widetilde{A}(m,n,T,\widetilde{L}_m^{-1/2}\Pi_m\lambda) - \int_{\Lambda_\infty} (a \circ \Pi_{m_1}) d\mu_\beta \right| d\nu(\lambda) = 0. \qquad \text{(III.64)}$$

Il vantaggio qui è che la $d\nu$ non dipende da m! Allora, tramite risultati standard di teoria della misura, possiamo dedurre dalle (III.63)-(III.64) la seguente:

Proposizione III.8 *Si assumano le* (I1)-(I2) *e si scelga la famiglia di stati coerenti* (III.55). *Allora esistono delle successioni divergenti* $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ *tali che, per quasi ogni* $\lambda \in \Lambda_\infty$, *nel senso della misura* ν, *si ha*

$$\lim_{k\to+\infty} A(m_k, n_k, T_k, L_{m_k}^{-1/2}\Pi_{m_k}\lambda) = \widehat{\mu}_\beta(a \circ \Pi_{m_1}).$$

Se inoltre anche la (I3) *è verificata, allora esistono* $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, *successioni divergenti, tali che, per quasi ogni* $= \lambda \in \Lambda_\infty$, *nel senso della misura* ν, *si ottiene*

$$\lim_{k\to+\infty} \widetilde{A}(m_k, T_k, \widetilde{L}_{m_k}^{-1/2}\Pi_{m_k}\lambda) = \mu_\beta(a \circ \Pi_{m_1}).$$

Capitolo IV

Il gas ideale classico

I prossimi due capitoli riguardano il gas ideale monodimensionale, che è decisamente uno dei sistemi dinamici più banali che si possano scrivere. Nonostante ciò, una serie di osservazioni interessanti scaturisce quando si manda il numero di gradi di libertà all'infinito.

Per questo motivo, tale sistema ha attirato l'attenzione di Volkovyski e Sinai,[1] che ne hanno mostrato le varie proprietà ergodiche. Per le stesse ragioni (e anche per la linearità delle equazioni del moto), esso è stato ripreso recentemente in [Lenci 96], che ne studia la versione quantizzata.

Il modello che introduciamo è un sistema dinamico di particelle non interagenti su un cerchio, con gli osservabili ristretti alle sole funzione simmetriche per scambio di particelle; questo è un modo pratico di inserire l'indistinguibilità quantistica in un sistema dinamico classico.

Insieme alle molte analogie fra il gas ideale e la catena armonica, che cercheremo di sottolineare accuratamente di volta in volta, vi sono anche alcune importanti differenze: in particolare qui il meccanismo responsabile dell'impredicibilità del moto, il già citato effetto cinematico, è causato dalla simmetria degli osservabili. Questa restrizione viene imposta già sul sistema classico, e non ha nulla a che fare

[1] Nel '71, cioè in un periodo in cui la comunità dei fisici matematici appariva molto interessata allo studio di modelli di sistemi dinamici infinito-dimensionali.

con la maniera di quantizzare.[2] Daremo una spiegazione un po' più accurata di questo fenomeno nell'osservazione dopo il Teorema V.3, nel prossimo capitolo.

Qui di seguito riprendiamo l'esposizione di [Sinai], Lezione 8,[3] facendo richiami a [Gol-Leb-Aiz 74], dove le tecniche di [Vol-Sin 71] vengono spiegate con chiarezza, per essere poi applicate al gas ideale e ad altri sistemi infinito-dimensionali (i cosiddetti *sistemi di Poisson*).

I risultati che scaturiscono dalla quantizzazione del modello di Volkovyski-Sinai, invece, saranno presentati nel Capitolo V. Come di consueto, rimandiamo ai lavori originali per maggiori dettagli.

IV.1 Il modello di Volkovyski-Sinai

Si consideri un sistema di m particelle di massa unitaria non interagenti, vincolate a muoversi su un cerchio di circonferenza L. L'hamiltoniana di questo sistema è

$$\mathcal{H}_m(p,q) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} p_j^2 = p^2/2, \tag{IV.1}$$

definita sullo spazio di fase $\Lambda_L^m := \mathbb{R}^m \times (L\,S^1)^m$ il quale, in vista del limite $L \to \infty$ che studieremo più avanti, sarà identificato con $\mathbb{R}^m \times T_L^m$, $T_L^m := [-L/2, L/2)^m$. Intuitivamente, possiamo pensare di ingrandire il cerchio $L\,S^1$ sempre di più finché non somigli localmente ad un retta, cioè $\mathbb{R}$ (si veda la figura in [Sinai], Pag. 66).

Su Λ_L^m il moto è dato dal gruppo di diffeomorfismi $\phi_L^m[t](p,q) := (p, q + pt)$. Questo sistema dinamico è completamente integrabile e Λ_L^m si decompone in una famiglia non numerabile di tori invarianti su cui la dinamica è un flusso di Kronecker (cioè, quasi-periodico). Introducendo una qualsiasi "ragionevole" misura su Λ_L^m,[4] il sistema ovviamente non è nemmeno ergodico.

[2] Anzi, nel Capitolo V, invece di scegliere la statistica di Bose-Einstein o di Fermi-Dirac, adotteremo quella di Maxwell-Boltzmann, che, di per sé, non impone alcuna simmetria per lo scambio di particelle.

[3] Si veda anche [Cor-Fom-Sin], Capitolo 9.

[4] In [Sinai] si utilizza la misura microcanonica. Per motivi che saranno chiariti nel Capitolo V, la misura naturale da prendere in considerazione qui è quella canonica.

D'altra parte, un opportuno suo limite termodinamico potrebbe esserlo. La costruzione del sistema dinamico infinito è basata sull'idea che le particelle devono essere rese indistinguibili. Per la precisione, lo spazio di fase del sistema infinito è definito come segue:

$$\Lambda_\infty := \{(p,q);\ q \text{ sottoinsieme numerabile di } \mathbb{R},\ p : q \to \mathbb{R}\}. \tag{IV.2}$$

Questo significa che $q = \{x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots\}$ contiene le posizioni delle particelle, ora non più "numerate", e p è una funzione tale che $p(x_j)$ esprime la velocità della particelle che si trova in x_j. Può succedere che più di una particella, diciamo n, si trovi in x_j: in questo caso, con un abuso di notazione rispetto alla definizione (IV.2), $p(x_j)$ è una n-upla di velocità. Il flusso $\phi_\infty[t] : \Lambda_\infty \longrightarrow \Lambda_\infty$ è definito di conseguenza come $\phi_\infty[t](p,q) = (p', q')$, dove $q' := \{x + p(x)t;\ x \in q\}$ e $p' : q' \to \mathbb{R}$ è $p'(x + p(x)t) := p(x)$.

Ciò che abbiamo appena introdotto è l'insieme limite naturale degli spazi $\Lambda_L^m/\mathbb{S}^m$, se con $\mathbb{S}^m$ chiamiamo il gruppo delle permutazioni di m oggetti. Tali spazi sono definiti esplicitamente in [Sinai] in maniera completamente analoga alla (IV.2), cioè come la collezione di tutte le coppie ordinate (p,q), con $q \subset L\,S^1$, $\#q \le m$ e $p : q \to \mathbb{R}$ che prende m valori, nel senso specificato sopra. Questi oggetti possono essere considerati come appartenenti a Λ_∞, visto che $q \subset L\,S^1 \simeq [-L/2, L/2)$. Ciò spiega l'identificazione di cui parlavamo all'inizio del paragrafo.

Questa osservazione ci permette di considerare le funzioni definite su Λ_∞ come dotate di una restrizione naturale a $\Lambda_L^m/\mathbb{S}^m$. E una funzione f su $\Lambda_L^m/\mathbb{S}^m$ altro non è che una funzione su Λ_L^m totalmente simmetrica (per scambio di variabili). In formula: $f \circ \Pi_L^m$, dove Π_L^m è l'immersione naturale $\Lambda_L^m \longrightarrow \Lambda_\infty$:

$$\Pi_L^m(p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_m) := (p : q \to \mathbb{R}, q := \{q_1, \ldots, q_m\}), \tag{IV.3}$$

con p che assume i valori $p(q_1) = p_1, \ldots, p(q_m) = p_m$. Inoltre, sarà utile più avanti notare che

$$\phi_\infty[t] \circ \Pi_L^m = \Pi_L^m \circ \phi_L^m[t] \tag{IV.4}$$

Al fine di completare la definizione del nostro sistema dinamico, dobbiamo specificare le funzioni misurabili, cioè dobbiamo fissare una σ-algebra $\mathcal{A}$ e, a seguire, una misura di probabilità su di essa. In [Vol-Sin 71] la scelta cade su $\mathcal{A} :=$

$\sigma(\gamma(\Delta))_{\Delta\in\mathcal{B}(\mathbb{R})}$. Qui Δ rappresenta un boreliano di $\mathbb{R}$ e $\gamma(\Delta)$ è la σ-algebra di tutti i sottoinsiemi di Λ_∞ che dipendono solo dalle posizioni e dai momenti delle particelle in Δ, non numerate.[5] Per motivi di semplicità ci restringiamo alle sole funzioni reali.

Due esempi di funzioni misurabili sono i seguenti: $f_\Delta(p,q) := \#(q\cap\Delta)$, il numero di particelle della configurazione q localizzate in Δ; oppure $g_\Delta(p,q) := \sum_{x\in\Delta} p(x)$, la quantità di moto totale delle particelle in Δ

Dotiamo $\mathcal{A}$ di una misura che è definita dalle proprietà seguenti:

1. La distribuzione delle particelle nello spazio delle configurazioni è poissoniana di parametro ρ; ciò vuol dire che
$$P_{\rho,\beta}(\{(p,q);\ f_\Delta(p,q)=n\}) = e^{-\rho|\Delta|}\frac{(\rho|\Delta|)^n}{n!}; \tag{IV.5}$$
per ogni $\Delta\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Inoltre, le distribuzioni riguardanti due boreliani disgiunti Δ_1 e Δ_2, sono indipendenti.

2. I momenti sono variabili gaussiane centrate di varianza $1/\beta$. Ciò significa banalmente che, fissato $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ simmetrico[6] e un vettore $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, abbiamo
$$P_{\rho,\beta}(\{(p(x_1),\dots,p(x_n))\in A\}\mid\{\{x_1,\dots,x_n\}\subset q\}) = \int_A\left[e^{-\beta p^2/2}dp\right]_N \tag{IV.6}$$
(dove $[\cdots]_N$ rappresenta la misura normalizzata, così come introdotto nel Capitolo III). Questa è la distribuzione di Maxwell a temperatura inversa β.

Questa misura è stata scelta a bella posta per essere il limite delle misure canoniche sugli spazi di fase per finiti gradi di libertà.

Proposizione IV.1 *Si prenda $a\in\mathcal{A}$. Al limite termodinamico, cioè $m,L\to\infty; m/L\to\rho$,*
$$\int_{\Lambda_L^m}(a\circ\Pi_L^m)(p,q)\left[e^{-\beta p^2/2}dpdq\right]_N \longrightarrow P_{\rho,\beta}(a).$$

[5]Per essere più rigorosi, $\gamma(\Delta)$ è la σ-algebra tale che le funzioni misurabili sono tutte le f su Λ_∞ che dipendono solo dai parametri dinamici delle particelle in Δ *e* che sono misurabili se viste come funzioni su Λ_L^m: $f\circ\Pi_L^m$.

[6]Cioè tale che la sua funzione caratteristica, χ_A, è simmetrica.

DIMOSTRAZIONE. Vediamo prima come si distribuiscono le posizioni (cioè condizioniamo rispetto ai momenti). Siccome la misura $\mu_L^m := [e^{-\beta p^2/2} dpdq]_N$ rende indipendenti le coordinate, allora, per ogni boreliano Δ,

$$\mu_L^m(\{(p,q);\ f_\Delta(p,q) = n\}) = \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix} \left(\frac{|\Delta|}{L} \right)^n \left(1 - \frac{|\Delta|}{L} \right)^{m-n}, \tag{IV.7}$$

dove la f_Δ è quella definita in precedenza. Se $m, L \to \infty$, con $m/L \to \rho$, è piuttosto facile vedere che

$$\mu_L^m(\{(p,q);\ f_\Delta(p,q) = n\}) \longrightarrow e^{-\rho|\Delta|} \frac{(\rho|\Delta|)^n}{n!}. \tag{IV.8}$$

Siccome le $\{f_\Delta\}_{\Delta \in \mathcal{B}(\mathbb{R})}$ generano l'algebra delle funzioni dipendenti dalle sole q (si veda anche la Sezione IV.2), abbiamo verificato la prima condizione nella definizione di $P_{\rho,\beta}$ (l'indipendenza per insiemi disgiunti è banale).

Per quel che riguarda la distribuzione dei momenti, non c'è nulla da dimostrare, visto che già in partenza le μ_L^m sono maxwelliane nelle p, con temperatura inversa β. C.V.D.

Concludiamo questa sezione enunciandone il risultato principale:

Teorema IV.2 ([Vol-Sin 71]) *La misura $P_{\rho,\beta}$ è invariante per $\phi_\infty[t]$ e il sistema dinamico $(\Lambda_\infty, \mathcal{A}, P_{\rho,\beta}, \phi_\infty[t])$ è di Bernoulli.*

Daremo la dimostrazione di questo teorema nella prossima sezione: vedremo che il sistema in considerazione può essere pensato come generato tramite una procedura astratta, a partire da un sistema ad una particella. Questo rende la dimostrazione delle sue proprietà ergodiche piuttosto semplice ed elegante.

D'altra parte, l'approccio che abbiamo adottato in questa sezione (e al quale faremo riferimento nel prossimo capitolo) ha il vantaggio di arrivare al sistema di infinite particelle attraverso un limite termodinamico (vedi sopra; in particolare la Proposizione IV.1). Questo fatto sarà cruciale in seguito.

IV.2 Sistemi di Poisson

Seguendo [Gol-Leb-Aiz 74], il sistema di Poisson costruito su una certa quadrupla dinamica $(X^{(1)}, \mathcal{A}^{(1)}, P^{(1)}, \phi_t^{(1)})$ [7] è il sistema dinamico formato da un'infinità numerabile di copie del sistema dato, che evolvono non interagendo fra di loro, e dove gli osservabili non siano in grado di distinguere (cioè di numerare) le diverse copie.

Se $X^{(1)}$ è lo spazio di misura su cui è definito il sistema ad una particella,[8] $\mathcal{A}^{(1)}$ la sua σ-algebra, $P^{(1)}$ la sua misura di probabilità, e $\phi_t^{(1)}$ il flusso (cioè un gruppo di automorfismi modulo zero su $X^{(1)}$), allora definiamo il corrispondente *sistema di Poisson* come il sistema dinamico $(X, \mathcal{A}, P, \phi_t)$, dove X è l'insieme dei sottoinsiemi numerabili di $X^{(1)}$ (che chiamiamo configurazioni e denotiamo con x). $\mathcal{A}$ è la σ-algebra generata dalle funzioni

$$f_\Delta(x) := \#(x \cap \Delta), \tag{IV.9}$$

dove $\Delta \in \mathcal{A}^{(1)}$, e x è una generica configurazione di X. La misura P è la misura di Poisson su $P^{(1)}$ ed è definita come

$$P(\{x \in X \mid f_\Delta(x) = m\}) := e^{-P^{(1)}(\Delta)} \frac{\left[P^{(1)}(\Delta)\right]^m}{m!}. \tag{IV.10}$$

Analogamente alla sezione precedente, assumiamo l'indipendenza della misura su insiemi disgiunti. Per quanto riguarda il flusso, l'ovvia definizione è la seguente: se $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$, allora

$$\phi_t(x) := \{\phi_t^{(1)} x_1, \phi_t^{(1)} x_2, \ldots, \phi_t^{(1)} x_k, \ldots\}. \tag{IV.11}$$

È evidente che questa costruzione si attaglia al nostro caso, se si pongono:

$$X^{(1)} = \mathbb{R}^2;$$

[7] Per essere rigorosi dovremmo richiedere che $X^{(1)}$ sia uno spazio di misura non atomico e totalmente σ-finito.

[8] In vista del fatto che in questo contesto applichiamo la struttura di Poisson solo al caso del gas ideale, cominciamo fin da ora a chiamare $(X^{(1)}, \mathcal{A}^{(1)}, P^{(1)}, \phi_t^{(1)})$ il sistema ad una particella e $(X, \mathcal{A}, P, \phi_t)$ il sistema ad infinite particelle.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{(1)} &= \mathcal{B}(\mathbb{R}^2); & \text{(IV.12)} \\ dP^{(1)}(q,p) &= \rho\sqrt{\frac{\beta}{2\pi}}\, e^{-\beta p^2/2}\, dqdp; \\ \phi_t^{(1)}(q,p) &= (q+pt,p). & \text{(IV.13)} \end{aligned}$$

Non ci dilunghiamo a provare che il sistema appena costruito e quello introdotto nella Sezione IV.1 sono esattamente la stessa cosa. Quello che invece faremo sarà dare la dimostrazione del Teorema IV.2. Ricordiamo che, per definizione, il flusso $\phi_\infty[t]$ è di Kolmogorov se lo è la mappa $\phi_\infty[1]$, ad esempio.

Una *costruzione di Bernoulli* per un sistema di Poisson è la seguente struttura: per ogni $\Gamma \in \mathcal{A}^{(1)}$, si definisca $\mathcal{A}_\Gamma := \sigma\{f_\Delta \mid \Delta \subseteq \Gamma\}$, la σ-algebra infinita relativa a Γ. Supponiamo che si abbia una famiglia numerabile $\{\Gamma_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ di sottoinsiemi disgiunti di $X^{(1)}$, tali che $\bigcup_n \Gamma_n = X^{(1)}$ e $\phi_1^{(1)}\Gamma_n = \Gamma_{n+1}$. In questo caso è facile verificare che le $\mathcal{A}_{\Gamma_n}$ sono una famiglia numerabile di sotto-algebre *indipendenti*, che vengono trasportate l'una nell'altra dalla mappa, e che generano l'intera $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}_{\Gamma_0}$ è perciò l'algebra generante di un sistema di Bernoulli (generalizzato).[9]

Rimane allora da mostrare che una costruzione di Bernoulli è possibile, per il gas ideale. Poniamo:

$$\Gamma_0 := \{(q,p) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in [0,1) \text{ tale che } q+pt=0\} \tag{IV.14}$$

Se si dimentica l'insieme dei punti $(q,0)$, che è di misura nulla, si vede che la partizione di $X^{(1)}$, generata da un tale Γ_0, ha tutte le proprietà che cercavamo, per costruzione. Questo prova, a tutti gli effetti, il Teorema IV.2.

È interessante notare che il meccanismo che garantisce le proprietà caotiche del gas ideale è la "fuga dell'informazione all'infinito". In effetti una costruzione di Bernoulli è possibile solamente quando il sistema ad una particella è tutt'altro che caotico: in particolare non funziona se esso è ergodico, o solo se vale il principio di ricorrenza di Poincaré (vedi [Gol-Leb-Aiz 74], Pag. 122). In altre parole, il flusso ϕ_1 non deve "mischiare" l'informazione, ma disperderla. Ci sono sistemi di Poisson il cui flusso è di Kolmogorov, e il cui sistema di base è anch'esso di Kolmogorov: per esempio il gas di Lorentz. Per questi, la dimostrazione delle caoticità non

[9] Vedi la nota 6 del Capitolo II.

avviene tramite alcuna costruzione di Bernoulli, ma piuttosto tramite una procedura che implementa, nel sistema infinito, la "dissipazione locale dell'informazione" già presente nel sistema ad una particella.

Capitolo V

Il gas ideale quantistico

Presentiamo ora i risultati contenuti in [Lenci 96] a proposito del gas ideale di Volkovyski-Sinai quantizzato, allacciandoci all'esposizione del Capitolo IV.

Anche qui enunceremo (e poi dimostreremo) alcuni asserti che è lecito chiamare proprietà ergodiche quantistiche, in completa analogia col Capitolo III. Come già in quel caso, queste nozioni cadranno nell'ambito della teoria ergodica su C^*-algebre (di nuovo rimandiamo e [Bra-Rob] e [Benatti]), pur essendo formulate in maniera un po' diversa.

Elenchiamo a seguire alcune importanti differenze fra le versioni quantizzate del gas ideale e della catena armonica, confidando che le molte analogie appariranno chiare nel corso del testo:

1. La restrizione ai soli osservabili simmetrici, di cui si è già discusso all'inizio del precedente capitolo, ha anche una notevole conseguenza: lo scambio del limite di media temporale con il limite termodinamico (vedi il Teorema V.3, il Corollario V.4, e la relazione (V.31)).[1]

2. Lo spazio delle fasi del sistema ad m particelle ha struttura cilindrica (un toro nelle posizioni, ed uno spazio lineare nei momenti). Perciò la quantizzazione deve essere adattata a questa situazione. In particolare vedremo che è necessario considerare tutti gli spazi L^2 di funzioni di Bloch quasi-periodiche sul

[1] Rimandiamo all'osservazione dopo il Teorema V.3.

toro, per ricostruire l'intero $L^2(\mathbb{R}^m)$, dove la quantizzazione di Weyl è definita senza problemi (come nel Capitolo III). Fra l'altro anche gli stati coerenti devono essere adattati a questa situazione: di essi parleremo nell'Appendice, alla Sezione VI.2 (vedi inoltre [DeB-Gon 93]).

3. D'altra parte, in questo modello, la dinamica classica è semplicemente il moto libero. Ciò permette una semplificazione: il simbolo di Weyl della misura quantistica e^{-P^2} è banalmente e^{-p^2}, cioè la misura classica.[2] Ciò significa che abbiamo una perfetta corrispondenza tra le due (a differenza del sistema armonico dove apparivano μ_β e $\widehat{\mu}_\beta$, uguali solo asintoticamente per alte temperature). I risultati della Sezione V.2 sono quindi, in qualche maniera, più "puliti".

V.1 La quantizzazione sul toro

Gli spazi di Hilbert associati ad un sistema quantistico di m particelle su un cerchio di circonferenza L sono denotati da $L^2_{(k)}(T^m_L), k \in [0, 1/L)^m$. Ognuno di essi è definito come

$$L^2_{(k)}(T^m_L) := \{f \text{ su } \mathbb{R}^m | \forall j \in \mathbb{Z}^m, f(q + Lj) = e^{2\pi i Lk\cdot j} f(q), \int_{T^m_L} |f|^2 < \infty\}, \qquad \text{(V.1)}$$

che è lo spazio delle funzioni di Bloch di parametro k, a quadrato sommabile su un dato dominio fondamentale. A proposito di questa definizione, sottolineiamo che:

1. La famiglia di spazi di cui sopra è quella consueta nel caso di operatori di Schrödinger con potenziale periodico (vedi [Ree-Sim], Sez. XIII.16). Li si deve considerare tutti quanti (per ogni valore di $k \in [0, 1/L)^m$) altrimenti l'applicazione di quantizzazione[3] non avrebbe molto senso, visto che la rappresentazione di Schrödinger del gruppo di Heisenberg non sarebbe fedele: per esempio, in una dimensione, se scegliessimo solo $k = 0$, avremmo $T(L, 0) = T(0, 0) = \mathbf{1}$ (vedi più avanti).

[2] Costanti a parte; ricordiamo che $P = -i\partial/\partial q$ è l'operatore momento.

[3] Definita dalla (V.7) più avanti.

Comunque l'intero spazio di Hilbert $L^2(\mathbb{R}^m)$ è "ricostruito" attraverso la formula di decomposizione diretta (cfr. [Ree-Sim])

$$\int_{[0,1/L)^m}^{\oplus} L^2_{(k)}(T^m_L)dk \simeq L^2(\mathbb{R}^m). \tag{V.2}$$

Maggiori dettagli su questo vengono forniti nella Sezione VI.2 dell'Appendice e in [DeB-Gon 93]. Una base di $L^2_{(k)}(T^m_L)$ è ovviamente $e^{(k)}_\alpha := L^{-m/2}e^{2\pi i(\alpha+k)\cdot x}$, con $\alpha \in (\mathbb{Z}/L)^m$.

2. La scelta degli spazi di Hilbert della (V.1) corrisponde alla statistica di Maxwell-Boltzmann, dato che non si richiede alcuna simmetria delle funzioni d'onda rispetto allo scambio di particelle. Certamente si può pensare di quantizzare questo sistema secondo la statistica di Bose-Einstein o quella di Fermi-Dirac, però qui, per dare una spiegazione fisica, stiamo considerando particelle che sono in linea di principio numerate, ma i nostri osservabili non vedono questa numerazione. Tale approssimazione ha una sua ragion d'essere nel regime semiclassico.[4]

Prima di poter definire l'operazione di quantizzazione dobbiamo introdurre la trasformata e l'antitrasformata di Fourier in Λ^m_L. Per prima cosa, definiamo il duale dello spazio delle fasi: $(\Lambda^m_L)^* := \mathbb{R}^m \times (T^m_L)^*$ con $(T^m_L)^* := (\mathbb{Z}/L)^m$. Ora, se $b \in \mathcal{S}(\Lambda^m_L)$, che è la classe delle funzioni di Schwartz su Λ^m_L, allora per $(\eta, \xi) \in (\Lambda^m_L)^*$, la trasformata di Fourier di b è

$$\widehat{b}(\eta, \xi) := \int_{\mathbb{R}^m}\int_{T^m_L} b(p, q)\, e^{-2\pi i(\eta\cdot p+\xi\cdot q)}dqdp. \tag{V.3}$$

Di conseguenza, l'antitrasformata è data da

$$b(p, q) := \frac{1}{L^m}\sum_{\xi\in(T^m_L)^*}\int_{\mathbb{R}^m} \widehat{b}(\eta, \xi)\, e^{2\pi i(p\cdot\eta+q\cdot\xi)}d\eta. \tag{V.4}$$

Il gruppo di Heisenberg da adottare in questa situazione è il *sottogruppo cilindrico* naturalmente indotto dal gruppo di Heisenberg su $\mathbb{R}^{2m}\times\mathbb{R}$. In altre parole, $(\Lambda^m_L)^*\times\mathbb{R}$, dotato della legge di composizione

$$(\eta, \xi, \tau)(\eta', \xi', \tau') = (\eta + \eta, \xi + \xi', \tau + \tau' + \frac{1}{2}(\eta\cdot\xi' - \xi\cdot\eta')). \tag{V.5}$$

[4] D'altra parte, osserviamo che questa tesi non riguarda alcun tipo di limite semiclassico.

In accordo con questo,[5] la sua rappresentazione unitaria di Schrödinger su $L^2(\mathbb{R}^m)$ è definita come segue:

$$(T(\eta,\xi)f)(x) = e^{2\pi i\xi\cdot(\eta/2+x)}f(x+\eta) \tag{V.6}$$

Ciò può essere scritto formalmente come $T(\eta,\xi) = e^{2\pi i(\eta\cdot P+\xi\cdot Q)}$, dove, ovviamente, Q corrisponde all'operatore di moltiplicazione per q, e $P = (2\pi i)^{-1}\nabla_q$. Abbiamo quindi scelto ora $\hbar = (2\pi)^{-1}$. È evidente che $T(\eta,\xi)$ preserva $L^2_{(k)}(T^m_L)$: denotiamo con $T^{(k)}(\eta,\xi)$ la sua restrizione a quello spazio.

Possiamo ora definire l'applicazione di quantizzazione. Se b è un simbolo pseudo-differenziale di un certo ordine su Λ^m_L (si adatti banalmente la Definizione III.1 al nostro caso), allora

$$\mathrm{Op}(b) := \frac{1}{L^m}\sum_{\xi\in(T^m_L)^*}\int_{\mathbb{R}^m}\widehat{b}(\eta,\xi)\,T(\eta,\xi)\,d\eta, \tag{V.7}$$

dove $\widehat{b}$ è eventualmente interpretato nel senso delle distribuzioni.

La restrizione di questo operatore allo spazio invariante $L^2_{(k)}(T^m_L)$ è ancora chiamata $\mathrm{Op}(b)^{(k)}$. Questa definizione non è altro che l'usuale quantizzazione di Weyl indotta dal sottogruppo cilindrico di Heisenberg, e dipende dalla nostra scelta della antitrasformata di Fourier (V.4). In effetti, dopo semplici manipolazioni algebriche, si può giungere alla seguente formula esplicita: per $f^{(k)} \in L^2_{(k)}(T^m_L)$,

$$\left(\mathrm{Op}(b)^{(k)}f^{(k)}\right)(x) = \int_{\mathbb{R}^m}\int_{\mathbb{R}^m} b\left(\frac{x+y}{2},p\right)e^{2\pi ip\cdot(x-y)}f^{(k)}(y)dydp, \tag{V.8}$$

da confrontarsi con la (III.3). Notiamo che, essendo $f^{(k)} \notin \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2m})$, la relazione qui sopra non ha senso nemmeno come integrale oscillante. Di nuovo, essa va interpretata in senso distribuzionale, visto che si sa (vedi [Shubin]) che per simboli pseudo-differenziali $\mathrm{Op}(b) : \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$. Com'è ovvio (e già ricordato in precedenza), la (V.8) implica anche che se b dipende da una sola coordinata canonica, ad esempio la p, allora $\mathrm{Op}(b) = b(P)$ nel senso della teoria spettrale. In particolare, se l'hamiltoniana quantistica è $H_m := -(\frac{1}{8\pi^2})\Delta_q = \mathrm{Op}(\mathcal{H}_m)$, otteniamo $\mathrm{Op}(e^{-\beta\mathcal{H}_m}) = e^{-\beta H_m}$.

[5] Vedi [Folland].

A questo punto, possiamo calcolare la composizione di Weyl $a \sharp b$ di due simboli a e b (vedi Capitolo III). Facciamo il conto a partire dalla (V.7), ricordando che $T(\eta,\xi)$ obbedisce alla legge di moltiplicazione del gruppo di Heisenberg e che un simbolo è ottenuto dal corrispondente operatore sostituendo $e^{2\pi i(p\cdot\eta+q\cdot\xi)}$ a $T(\eta,\xi)$, quando l'operatore è nella forma (V.7): si confronti la (V.4) con la (V.7). Non sorprende che il risultato sia un'adattamento della (III.37), la formula corrispondente nel caso euclideo (vedi anche [Folland], Sez. 2.1):

$$\begin{aligned} &(a \sharp b)(p,q) = \qquad\qquad \text{(V.9)}\\ &= \frac{1}{L^{2m}}\sum_{\xi_1,\xi_2}\int \widehat{a}(\eta_1,\xi_1)\widehat{b}(\eta_2,\xi_2)e^{\pi i(\eta_1\cdot\xi_2-\xi_1\cdot\eta_2)}e^{2\pi i[(\eta_1+\eta_2)\cdot p+(\xi_1+\xi_2)\cdot q]}d\eta_1 d\eta_2 =\\ &= \frac{1}{L^{2m}}\sum_{\xi_1,\xi_2}\int a\left(p+\frac{\xi_1}{2},q+q_1\right) b\left(p+\frac{\xi_2}{2},q+q_2\right) e^{2\pi i(\xi_2\cdot q_1-\xi_1\cdot q_2)}dq_1 dq_2. \end{aligned}$$

Si noti che la somma è calcolata su $\xi_1,\xi_2 \in (T_L^m)^*$ e l'integrazione su $q_1,q_2 \in T_L^m$.

Dalla formula precedente si deduce che la composizione di Weyl ha una proprietà che ricorda molto da vicino la proprietà di traccia:

$$\int_{\Lambda_L^m}(a \sharp b)(p,q)\,dpdq = \int_{\Lambda_L^m} a(p,q)b(p,q)\,dpdq. \qquad \text{(V.10)}$$

Non possiamo però sperare di avere la vera proprietà di traccia per un qualche $L^2_{(k)}(T_L^m)$, che sarebbe la (V.10) con $\mathrm{Tr}_{L^2_{(k)}(T_L^m)}\mathrm{Op}(a)\mathrm{Op}(b)$ al membro sinistro: questo è ben spiegato in [DeB-Gon 93]. In effetti, come apparirà chiaro nella Sezione V.3, ciò che compare al membro sinistro dell'ultima relazione è qualcosa che moralmente rappresenta $\mathrm{Tr}_{L^2(\mathbb{R}^m)}$.

Dati $f^{(k)}, g^{(k)} \in L^2_{(k)}(T_L^m)$, definiamo la funzione di Fourier-Wigner relativa a quei due vettori come $V_{f^{(k)},g^{(k)}}(\eta,\xi) := \langle f^{(k)}, T(\eta,\xi)g^{(k)}\rangle$. Questa definizione è completamente analoga a quella di [Folland]. La funzione di Wigner $W_{f^{(k)},g^{(k)}}$ è definita come la trasformata di Fourier (magari distribuzionale) di $V_{f^{(k)},g^{(k)}}$ e quindi, dalla (V.7):

$$\langle f^{(k)}, \mathrm{Op}(b)g^{(k)}\rangle_{L^2_{(k)}(T_L^m)} = \int_{\Lambda_L^m} b(p,q)\,W_{f^{(k)},g^{(k)}}(p,q)\,dpdq; \qquad \text{(V.11)}$$

da interpretarsi come segue: $W_{f^{(k)},g^{(k)}}$ è il nucleo integrale (distribuzionale) di $b \mapsto \langle f^{(k)}, \mathrm{Op}(b)g^{(k)}\rangle$. La formula standard per questa "funzione", calcolata dalla (V.8) o dalla sua definizione, è:

$$W_{f^{(k)},g^{(k)}}(p,q) := \int_{\mathbb{R}^m} e^{-2\pi i p\cdot z}\,\overline{f^{(k)}(q-z/2)}\,g^{(k)}(q+z/2)\,dz, \tag{V.12}$$

da confrontarsi con la (III.5). Ancora una volta, vogliamo interpretare la (V.12) in senso distribuzionale.

V.2 Proprietà ergodiche

Si assuma che, $\forall L > 0; m \in \mathbb{Z}, m \geq 1$ esiste uno spazio di misura $(X_L^m, d\theta)$ [6] e una collezione di stati

$$\{f_\lambda\}_{\lambda \in X_L^m} \subset \bigcup_{k\in[0,1/L)^m} L^2_{(k)}(T_L^m) \tag{V.13}$$

contrassegnati dall'indice λ che spazia in X_L^m. Si chiami $w_\lambda(p,q) := W_{f_\lambda,f_\lambda}(p,q)$ la funzione di Wigner corrispondente a f_λ.

Ipotesi: Si supponga che

$$\int_{X_L^m} w_\lambda(p,q)d\theta(\lambda) \equiv 1, \tag{V.14}$$

come distribuzione su Λ_L^m.

Osservazione. Questa famiglia di stati rappresenta il sostituto quantistico dello spazio delle fasi classico, come già descrivevamo nella Sezione III.1 del Capitolo III. Anche qui una condizione come la (V.14) richiede che le $\{f_\lambda\}$ siano uniformemente distribuite, globalmente, su Λ_L^m. Che questi stati possano essere pensati come "punti quantistici" è per esempio chiaro nel caso degli stati coerenti, forse l'esempio più importante di stati che verificano la precedente ipotesi. Essi verranno introdotti nella Sezione VI.2 dell'Appendice. Ad ogni modo, la (V.14) può essere riformulata dicendo che si ha un insieme di stati completi su tutti gli $L^2_{(k)}(T_L^m)$, $k \in [0,1/L)^m$ (vedi Sezione V.3).

[6] Qui siamo volutamente un po' informali, allo scopo di mantenere la notazione leggibile. Un simbolo migliore per $d\theta$ sarebbe stato $d\theta_L^m$. Lo stesso dicasi di $d\nu$ introdotta più avanti.

Visto che $\|e^{-\beta H_m} f_\lambda\|^2 = \langle f_\lambda, e^{-2\beta H_m} f_\lambda\rangle$,[7] la (V.14) implica immediatamente:

$$\int_{X_L^m} \|e^{-\beta H_m} f_\lambda\|^2 d\theta(\lambda) = \int_{\Lambda_L^m} e^{-2\beta \mathcal{H}_m(p)}\, dpdq = L^m \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{m/2}. \tag{V.15}$$

Definiamo

$$d\nu(\lambda) := \frac{\|e^{-\beta H_m} f_\lambda\|^2 d\theta(\lambda)}{\int_{X_L^m} \|e^{-\beta H_m} f_{\lambda'}\|^2 d\theta(\lambda')}. \tag{V.16}$$

Inoltre

$$g_\lambda := \frac{e^{-\beta H_m} f_\lambda}{\|e^{-\beta H_m} f_\lambda\|} \tag{V.17}$$

sia l'immagine, attraverso la misura di Gibbs quantistica, di ciascuno dei nostri stati.

Definizione V.1 *$a \in \mathcal{A}$ è detto* simbolo asintotico *se $\exists m_0 \in \mathbb{N}, L_0 > 0$ tale che $\forall m \geq m_0, L \geq L_0$, $a \circ \Pi_L^m$ è un simbolo pseudo-differenziale su Λ_L^m.*

Osservazione. Si noti che, data una tale definizione, i simboli asintotici sono oggetti piuttosto rigidi. Infatti, fissato un $m \geq m_0$, si prenda $L_0 \leq L \leq L_1$. Ora $\mathrm{Im}(\Pi_L^m) \subseteq \mathrm{Im}(\Pi_{L_1}^m) \subseteq \Lambda_\infty$. Per cui, $(a \circ \Pi_L^m)$ è semplicemente la restrizione di $(a \circ \Pi_{L_1}^m)$ a Λ_L^m. Ma $(a \circ \Pi_L^m)$, per essere un simbolo, deve essere C^∞ e T_L^m-periodico. Questo vuol dire che, $\forall i = 1, \ldots, m$,

$$(a \circ \Pi_{L_1}^m)(\ldots, -L/2, \ldots) = (a \circ \Pi_{L_1}^m)(\ldots, +L/2, \ldots); \tag{V.18}$$

$$\frac{d}{dq_i}(a \circ \Pi_{L_1}^m)(\ldots, -L/2, \ldots) = \frac{d}{dq_i}(a \circ \Pi_{L_1}^m)(\ldots, +L/2, \ldots), \tag{V.19}$$

dove $(\ldots, \pm L/2, \ldots)$ sta per $(p_1, \ldots, p_m, q_1, \ldots, q_{i-1}, \pm L/2, q_{i+1}, \ldots, q_m)$. Perciò argomenti di parità implicano che, per ogni $|q_i| \geq L_0/2$

$$\frac{d}{dq_i}(a \circ \Pi_{L_1}^m)(\ldots, q_i, \ldots) = 0. \tag{V.20}$$

[7] Di nuovo un commento sulla notazione. Un simbolo più esatto per il prodotto scalare sarebbe $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2_{(k)}(T_L^m)}$ dove k è univocamente determinato in maniera tale che gli argomenti appartengano a $L^2_{(k)}(T_L^m)$. Siccome i prodotti scalari hanno la stessa struttura su tutti gli $L^2_{(k)}(T_L^m)$, tralasceremo quel deponente.

Quindi, per un m fissato, sufficientemente grande, $(a \circ \Pi_{L_1}^m)$ è una "continuazione costante" di $(a \circ \Pi_{L_0}^m)$, e la prima delle due funzioni è completamente determinata dalla seconda. Questo spiega come mai abbiamo dovuto considerare simboli *asintotici*: non si può richiedere che la proprietà precedente valga $\forall m \geq 0, L \geq 0$. Esempi di tali funzioni saranno gli elementi delle famiglie $\mathcal{B}^{(n)}$, definite dopo il Lemma V.6 nella Sezione V.4.

Siamo adesso pronti per enunciare i teoremi. Per ogni operatore A su $L^2(\mathbb{R}^m)$, si definisca:

$$\Theta^m[t]\,(A) \;:=\; e^{2\pi i t H_m} A e^{-2\pi i t H_m}; \tag{V.21}$$

$$\Xi^m[T]\,(A) \;:=\; \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} \Theta^m[t](A)\,dt. \tag{V.22}$$

Per quel che riguarda il mixing quantistico:

Teorema V.2 *Siano a, b due simboli asintotici in $L^2(\Lambda_\infty, P_{\rho,2\beta})$ e si denoti*

$$I(t, L, m) := \int_{X_L^m} \langle g_\lambda, \Theta^m[t](\mathrm{Op}(a \circ \Pi_L^m))\,\mathrm{Op}(b \circ \Pi_L^m)\, g_\lambda\rangle\, d\nu(\lambda).$$

Allora:

$$\lim_{|t|\to\infty} \lim_{\substack{m,L\to\infty \\ m/L\to\rho}} I(t, L, m) = P_{\rho,2\beta}(a) P_{\rho,2\beta}(b).$$

Per l'ergodicità quantistica, si ha invece:

Teorema V.3 *Sia a un simbolo asintotico in $L^2(\Lambda_\infty, P_{\rho,2\beta})$, e*

$$J(T, L, m) := \int_{X_L^m} \|(\Xi^m[T](\mathrm{Op}(a \circ \Pi_L^m)) - P_{\rho,2\beta}(a))\, g_\lambda\|^2\, d\nu(\lambda).$$

Allora, per ogni L, m, l'operatore

$$\Xi^m[\infty](\mathrm{Op}(a \circ \Pi_L^m)) := \lim_{T\to\infty} \Xi^m[T](\mathrm{Op}(a \circ \Pi_L^m))$$

esiste ed è definito sul dominio di $\mathrm{Op}(a \circ \Pi_L^m)$. *Inoltre*

$$\lim_{\substack{m,L\to\infty \\ m/L\to\rho}} J(\infty, L, m) = 0.$$

Per di più, se a è anche limitato, allora i due limiti possono essere scambiati:

$$\lim_{T\to\infty} \lim_{\substack{m,L\to\infty \\ m/L\to\rho}} J(T,L,m) = 0.$$

Osservazione. La commutatività del limite temporale col limite termodinamico, nel precedente teorema, è notevole. Il fatto che la media temporale possa essere valutata prima del limite termodinamico può essere descritto dicendo che il sistema ad un numero finito di particelle (quello "vero") è *quasi ergodico*, per L e m molto grandi; con questo intendiamo che la media temporale di una qualsiasi funzione *decente* è vicina, in misura, ad una costante. Questa è una caratteristica del gas ideale classico che non ha nulla a che vedere con la meccanica quantistica. È piuttosto una conseguenza del caos cinematico e della restrizione ai soli osservabili simmetrici, come anticipato in precedenza. Ciò può essere mostrato con facilità, dato che il moto è completamente integrabile: mediare nel tempo significa, quasi dappertutto, mediare su un toro. I tori invarianti, qui, sono gli insiemi $\{p\} \times T_L^m \in \Lambda_L^m$, e quindi la media temporale di $a(p,q)$ è semplicemente $\int a(p,q)dq$: le funzioni invarianti dipendono solo da p. Esse, però, devono essere simmetriche e perciò non possono essere concentrate attorno ad un toro se non lo sono anche attorno a tutti i corrispondenti "tori simmetrici". Un esempio può essere

$$a(p_1, \ldots, p_m) = \begin{cases} 1 & \text{se } p_i \in \Gamma \ \forall i = 1, \ldots, m; \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases} \tag{V.23}$$

dove Γ è un boreliano di $\mathbb{R}$. Ora entra in gioco l'effetto cinematico: al limite termodinamico la misura di questa funzione, che è la probabilità che tutte le particelle abbiano quantità di moto in Γ, è esponenzialmente piccola.

Possiamo paragonare quanto testè descritto con la situazione che si ha per la catena armonica: in quel caso non si ha nessuna condizione sulla simmetria degli osservabili. Il fatto che questi non si possano concentrare su dei tori invarianti è causato dalle ipotesi sulla matrice di accoppiamento, che ha l'effetto di "mischiare" i tori, al limite per infinite particelle.

Un motivo ancora più chiaro per chiamare ergodicità quantistica l'enunciato del Teorema V.3, viene dal seguente

Corollario V.4 *Sia a un simbolo asintotico limitato e, $\forall \epsilon > 0$, si definisca*

$$K(\epsilon, T, L, m) := \nu \left(\{ \lambda \in X_L^m \mid |\langle g_\lambda, \Xi^m[T](\mathrm{Op}(a \circ \Pi_L^m))\, g_\lambda \rangle - P_{\rho,2\beta}(a)| > \epsilon \} \right).$$

Allora

$$\lim_{T\to\infty} \lim_{\substack{m,L\to\infty \\ m/L\to\rho}} K(\epsilon, T, L, m) = \lim_{\substack{m,L\to\infty \\ m/L\to\rho}} \lim_{T\to\infty} K(\epsilon, T, L, m) = 0.$$

Questo corollario può essere descritto così: chiamiamo *stati iniziali* (T, ϵ)-*eccezionali* quegli stati g_λ per cui il valor medio quantistico al tempo T differisce dalla media di fase classica, per una quantità maggiore di ϵ. Allora l'asserto è che la misura degli stati iniziali (T, ϵ)-eccezionali si annulla quando si prende il limite termodinamico e il limite temporale, in qualsiasi ordine.

Dimostrazione del Corollario V.4. Semplice conseguenza del Teorema V.3, applicando una disuguaglianza di Cauchy-Schwartz. C.V.D.

V.3 La misura quantistica

Ai risultati appena formulati può essere data una forma compatta ed elegante, nell'ambito della teoria dei sistemi dinamici su C^*-algebre. Come già nel lavoro originale, non richiameremo nemmeno in questa sede le nozioni principali di quella teoria. Il lettore che non dovesse sentirsi soddisfatto dei pochi accenni fatti nell'Introduzione può trovarne una breve recensione in [Gra-Mar 96], Appendice 2. Informazioni più complete si trovano in [Benatti] e in [Bra-Rob].

Consideriamo $\mathcal{L}_L^m$, lo spazio degli operatori su $L^2(\mathbb{R}^m)$ che sono invarianti e limitati su tutte le fibre $L^2_{(k)}(T_L^m)$. Questa è una C^*-algebra, se viene dotata della norma standard degli operatori su spazi di Banach. Su di essa definiamo la dinamica di Heisenberg, data da $\Theta^m[t]\,(A)$ come nella (V.21); lo stato di Gibbs quantistico[8] è espresso da

$$\omega_{\beta,L}^m(A) := \frac{\int_{[0,1/L)^m} \mathrm{Tr}_{L,m,k} \left(A\, e^{-\beta H_m} \right) dk}{\int_{[0,1/L)^m} \mathrm{Tr}_{L,m,k} \left(e^{-\beta H_m} \right) dk}, \tag{V.24}$$

[8] O *misura canonica quantistica*, con linguaggio meno preciso ma più efficace.

dove $\mathrm{Tr}_{L,m,k}$ denota la traccia su $L^2_{(k)}(T^m_L)$. Questo funzionale è chiaramente normalizzato[9] e invariante per lo *-automorfismo $\Theta^m[t]$. In effetti si può vedere che esso è uno stato KMS di parametro β sul W^*-sistema dinamico $(\mathcal{L}^m_L, \Theta^m[t], \omega^m_{\beta,L})$.[10]

Ora consideriamo, per ogni valore di $k \in [0, 1/L)^m$, la base di Fourier canonica $\{e^{(k)}_\alpha\}$, come è stata definita nella Sezione IV.1. Di seguito, prendiamo la collezione di tutti questi vettori, indicizzati da $\lambda := (\alpha, k) \in X^m_L := (T^m_L)^* \times [0, 1/L)^m$, e dotiamo X^m_L della misura

$$d\theta(\alpha, k) := L^m \sum_{\xi \in (T^m_L)^*} \delta(\alpha - \xi)\, d\alpha\, dk. \tag{V.25}$$

Questa famiglia verifica l'ipotesi (V.14). Infatti, chiamando $w_{\alpha,k}$ la funzione di Wigner relativa a $e^{(k)}_\alpha$, un veloce calcolo fornisce

$$w_{\alpha,k}(p, q) = \frac{1}{L^m}\, \delta(p - (\alpha + k)). \tag{V.26}$$

Se si integra la precedente in $d\theta(\alpha, k)$, si ottiene la (V.14). Perciò definiamo, come mostrato all'inizio della Sezione V.2, $g_{\alpha,k} := e^{-\beta H_m} e^{(k)}_\alpha / \| e^{-\beta H_m} e^{(k)}_\alpha \|$. Usando la definizione (V.24), se $A \in \mathcal{L}^m_L$, otteniamo[11]

$$\begin{aligned} \omega^m_{2\beta,L}(A) &= \frac{\int dk \sum_\alpha \langle e^{-\beta H_m} e^{(k)}_\alpha,\, A\, e^{-\beta H_m} e^{(k)}_\alpha \rangle}{\int dk \sum_\alpha \| e^{-\beta H_m} e^{(k)}_\alpha \|^2} = \\ &= \int_{X^m_L} \langle g_{\alpha,k},\, A\, g_{\alpha,k} \rangle\, d\nu(\alpha, k), \end{aligned} \tag{V.27}$$

con $d\nu$ definita come nella (V.16). D'altra parte, se chiamiamo $A^m_L := \mathrm{Op}(a \circ \Pi^m_L)$, allora un semplice ragionamento che è spiegato meglio in seguito (vedi formule (V.33) e (V.34)), mostra che

$$\omega^m_{2\beta,L}(A^m_L) = \int_{\Lambda^m_L} (a \circ \Pi^m_L)(p, q) \left[e^{-2\beta \mathcal{H}_m(p)}\, dp dq \right]_N . \tag{V.28}$$

[9] Ricordiamo che normalizzato significa: $\omega^m_{\beta,L}(\mathbf{1}) = 1$.

[10] Maggiori informazioni sugli stati KMS si possono trovare, per esempio, in [Bra-Rob], Vol. 2, Sez. 5.3. Inoltre può essere interessante vedere [Nar-Thi 93], che studia l'esistenza di stati KMS sulla C^*-algebra di Weyl finito-dimensionale, per certe hamiltoniane notevoli.

[11] Si noti che di qui in poi useremo 2β al posto di β.

La Proposizione IV.1 implica allora:

$$\lim_{\substack{m,L\to\infty\\ m/L\to\rho}} \omega^m_{2\beta,L}(A^m_L) = P_{\rho,2\beta}(a). \tag{V.29}$$

In definitiva, se a, b sono simboli asintotici, abbiamo appena visto che il Teorema V.2 può essere riscritto come

$$\lim_{|t|\to\infty} \lim_{\substack{m,L\to\infty\\ m/L\to\rho}} \omega^m_{2\beta,L}\left(\Theta^m[t](A^m_L)\, B^m_L\right) = \lim_{\substack{m,L\to\infty\\ m/L\to\rho}} \omega^m_{2\beta,L}(A^m_L) \cdot \lim_{\substack{m,L\to\infty\\ m/L\to\rho}} \omega^m_{2\beta,L}(B^m_L). \tag{V.30}$$

Nello stesso spirito, il Teorema V.3 diventa

$$\begin{aligned} &\lim_{T\to\infty} \lim_{\substack{m,L\to\infty\\ m/L\to\rho}} \omega^m_{2\beta,L}((\Xi^m[T](A^m_L))^2) = \\ = \; &\lim_{\substack{m,L\to\infty\\ m/L\to\rho}} \omega^m_{2\beta,L}((\Xi^m[\infty](A^m_L))^2) = \\ = \; &\lim_{\substack{m,L\to\infty\\ m/L\to\rho}} (\omega^m_{2\beta,L}(A^m_L))^2, \end{aligned} \tag{V.31}$$

Osservazione. Non abbiamo definito un'algebra di osservabili quantistici per il sistema ad infinite particelle, limitandoci a lavorare in dimensione finita e a prendere il limite termodinamico solo alla fine. Se avessimo introdotto questa struttura astratta, allora le relazioni (V.30) e (V.31), per lo stato $\lim_{\substack{m,L\to\infty\\ m/L\to\rho}} \omega^m_{2\beta,L}$, sarebbero state confrontabili[12] con le Definizioni 4.42 e 4.43 di [Benatti]. Per alcuni spunti circa il problema di definire formalmente un tale oggetto, e di dimostrare l'esistenza di uno stato KMS, rimandiamo a [Nar-Thi 93].

Facciamo qualche ulteriore contronto fra i risultati di questa sezione e i corrispondenti del Capitolo III:

1. Una riformulazione dell'ergodicità simile alla Proposizione III.8 (vedi anche la (1.9) in [Gra-Mar 96]) non è stata adottata in questo caso vista la mole di dettagli tecnici che avrebbe richiesto. Infatti gli stati coerenti che abbiamo qui (vedi Sezione VI.2) sono indicizzati da $\lambda \in T^m_L \times \mathbb{R}^m \times [0, 1/L)^m =:$

[12]Diciamo "confrontabili" e non "uguali" perché in effetti non possiamo dare per scontate tutte le equivalenti definizioni di ergodicità quantistica e di mixing quantistico citate in [Benatti], visto che non abbiamo dimostrato la commutatività asintotica.

X_L^m, che non è isomorfo allo spazio di fase Λ_L^m. Ad ogni modo, per qualche scelta particolare di stati coerenti, si potrebbe certo calcolare in maniera esplicita $d\nu$ su X_L^m, e trovare uno spazio di misura, diciamo $(X, d\nu)$, che sia in qualche maniera il limite degli X_L^m; ma questa operazione appare inutilmente complicata e forse addirittura fuorviante. Tuttavia, la (V.31) e, in particolar modo, il Corollario V.4 esprimono la stessa idea del risultato citato, da un punto di vista fisico.

2. Un'altra differenza importante, pur se già osservata, è che qui siamo in grado di formulare l'ergodicità con la commutazione dei due limiti.

3. Come già sottolineato in [Gra-Mar 96], Sez. 1, Oss. 2, l'*approccio analitico* adottato dai due articoli gemelli, [Gra-Mar 96] e [Lenci 96], ha il vantaggio che nei membri destri delle equazioni che scriviamo (per esempio, le (V.30) e (V.31)) troviamo delle medie classiche. Nel caso del gas ideale, addirittura la media di Gibbs, con l'esatta hamiltoniana classica senza alcun fattore di correzione (al contrario di ciò che accade per la catena armonica).

V.4 Dimostrazioni

Il primo fatto chiave è il seguente

Lemma V.5 *Per ogni simbolo c definito su Λ_L^m,*

$$e^{2\pi itH_m}\mathrm{Op}(c)e^{-2\pi itH_m} = \mathrm{Op}(c \circ \phi_L^m[t])$$

Questo è il Teorema di Egorov esatto per il flusso temporale, introdotto nel Capitolo I e già usato nel Capitolo III. Non è difficile credere che esso debba funzionare anche qui che lo spazio delle fasi è cilindrico, visto che siamo sempre nel caso di flusso lineare e di quantizzazione di Weyl. Ad ogni buon conto, se ne può trovare una dimostrazione nella Sezione VI.3 dell'Appendice.

Applicando questo lemma a $(a \circ \Pi_L^m)$ e sfruttando l'osservazione (IV.4), otteniamo

$$e^{2\pi i t H_m} \mathrm{Op}(a \circ \Pi_L^m) e^{-2\pi i t H_m} = \mathrm{Op}(a \circ \phi_\infty[t] \circ \Pi_L^m). \tag{V.32}$$

Procediamo ora con le dimostrazioni dei Teoremi V.2 e V.3.

Dimostrazione del Teorema V.2. Alla luce della precedente relazione, chiamiamo $a_t := a \circ \phi_\infty[t]$. Qui e in seguito indichiamo con un apostrofo l'applicazione di immersione da Λ_L^m a Λ_∞, di modo che $a' := a \circ \Pi_L^m$ e così via. In parole povere, a' è semplicemente il nostro osservabile a visto nello spazio di fase finito-dimensionale Λ_L^m. Tramite le (V.14) e (V.16), la definizione di I, nell'enunciato del teorema, si rilegge come

$$I(t, L, m) = \frac{\int_{\Lambda_L^m} (e^{-\beta \mathcal{H}_m} \sharp\, a_t' \sharp\, b' \sharp\, e^{-\beta \mathcal{H}_m}) dp dq}{\int_{\Lambda_L^m} e^{-2\beta \mathcal{H}_m} dp dq}. \tag{V.33}$$

Usando la (V.10) due volte (la prima per permutare ciclicamente i fattori nella (V.33) e l'altra per eliminare uno dei due segni $\sharp$) si giunge a

$$I(t, L, m) = \int_{\Lambda_L^m} (a_t' \sharp\, b')(p, q) \left[e^{-2\beta \mathcal{H}_m(p)}\, dp dq \right]_N, \tag{V.34}$$

visto che ovviamente $e^{-\beta \mathcal{H}_m} \sharp\, e^{-\beta \mathcal{H}_m} = e^{-2\beta \mathcal{H}_m}$. Denotiamo con μ_L^m la misura canonica classica (a temperatura inversa 2β)[13] su Λ_L^m: $\mu_L^m(p, q) := L^{-m} (\pi/\beta)^{-m/2} e^{-\beta p^2}$, e con $\breve{\mu}^m$ la sua componente sullo spazio delle p: $\breve{\mu}^m(p) := (\pi/\beta)^{-m/2} e^{-\beta p^2}$.

Usando la (V.9) nella (V.34), dopo alcune elementari (e noiose) manipolazioni degli integrali, otteniamo

$$I(t, L, m) = \int_{\Lambda_L^m} [a_t' \,(b' *_L \Phi_L^m)](p, q)\, d\mu_L^m(p, q), \tag{V.35}$$

con

$$\Phi_L^m(p, q) = e^{\beta p^2} \frac{1}{L^m} \sum_{\xi \in (T_L^m)^*} e^{-\beta (p - \xi/2)^2}\, e^{2\pi i \xi \cdot q}, \tag{V.36}$$

dove $*_L$ indica la convoluzione nella variabile q su T_L^m. Bisogna prestare particolare attenzione a questa convoluzione *sul toro*, al fine di evitare errori: si veda la Sezione VI.4.

[13] O meglio la sua densità rispetto alla misura di Lebesgue.

Osserviamo che Φ_L^m è completamente fattorizzabile: possiamo usare il simbolo Φ_L per denotare ciascuno dei suoi fattori. Se $f(p_1,\ldots,p_m,q_1,\ldots,q_m) = f_1(p_1,q_1)\cdots f_m(p_m,q_m)$, allora

$$(f *_L \Phi_L^m)(p,q) = (f_1 *_L \Phi_L)(p_1,q_1)\cdots(f_m *_L \Phi_L)(p_m,q_m). \tag{V.37}$$

Questa proprietà ci tornerà utile nel proseguio della dimostrazione. Si vede anche che, se 1 è la funzione identicamente uguale ad 1 su Λ_L^m,

$$1 *_L \Phi_L^m = 1. \tag{V.38}$$

Dimostreremo ora l'enunciato del teorema a partire dalla (V.35), per b in un sottospazio denso di $L^2(\Lambda_\infty, P_{\rho,2\beta})$. Per far ciò, abbiamo bisogno della costruzione seguente.

Si fissi un intero positivo n e si consideri la funzione $\beta(p,q) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$,[14] cioè infinitamente differenziabile e a supporto compatto. Per $m > n$ si definisca l'applicazione:

$$N_{L,m}^{(n)}(\beta)(p_1,\ldots,p_m,q_1,\ldots,q_m) := \sum_{\substack{j_1,\ldots,j_n=1 \\ j_k \neq j_\ell}}^{m} \beta(p_{j_1},\ldots,p_{j_n},q_{j_1},\ldots,q_{j_n}). \tag{V.39}$$

Quindi $N_{L,m}^{(n)}(\beta)$ è una funzione definita su $\mathbb{R}^{2m}$, e in particolare su Λ_L^m. L'uso di questa applicazione è spiegato dal lemma seguente:

Lemma V.6 *Se $\beta(p,q)$ è una funzione limitata e a decrescita rapida su $\mathbb{R}^{2n}$, allora esiste una funzione $b \in L^2(\Lambda_\infty, P_{\rho,2\beta})$ tale che $N_{L,m}^{(n)}(\beta) = b \circ \Pi_L^m$. Inoltre valgono le seguenti proprietà:*

$$\int_{\Lambda_L^m} |(b\circ\Pi_L^m)(p,q)|^2 \, d\mu_L^m(p,q) \leq \left(\frac{m!}{(m-n)!} \sup_{(p',q')\in\Lambda_L^n} |\beta(p',q')|\right)^2; \tag{V.40}$$

$$\int_{\Lambda_L^m} (b\circ\Pi_L^m)(p,q)\, d\mu_L^m(p,q) = \frac{m!}{L^n(m-n)!}\int_{\Lambda_L^n} \beta(p',q')\, d\breve{\mu}^n(p')\, dq'. \tag{V.41}$$

[14] Da non confondersi con β, la temperatura inversa, che è un parametro fissato.

Dimostrazione. Entrambe le formule sono banali da verificare se si lascia $N_{L,m}^{(n)}(\beta)$ nei membri sinistri: difatti, i termini nella somma di cui alla (V.39) sono appunto $m!/(m-n)!$. Inoltre, riguardo alla disuguaglianza (V.40), si consideri che μ_L^m è una misura di probabilità.

Rimane da provare che esiste una funzione b come nell'enunciato del lemma. Consideriamo per un istante la seguente definizione:

$$M_{L,m}^{(n)}(\beta)(p_1,\ldots,p_m,q_1,\ldots,q_m) := \sum_{j_1=1}^{m} \cdots \sum_{j_n=1}^{m} \beta(p_{j_1},\ldots,p_{j_n},q_{j_1},\ldots,q_{j_n}), \quad \text{(V.42)}$$

che è simile alla (V.39), con l'unica differenza che la somma viene estesa anche ai termini incrociati. Come prima osservazione, si può notare che se $n=1$, le due applicazioni coincidono.

Denotiamo ora per semplicità $z := (p,q)$. Data la funzione β, chiamiamo $\beta^{(k)}$ la somma di tutte le funzioni ottenute da questa fissando k variabili uguali: essa è perciò definita su $\mathbb{R}^{2(n-k)}$. Facciamo un esempio per chiarire questa definizione: se $n=3$, allora

$$\begin{aligned} \beta^{(0)}(z_1,z_2,z_3) &:= \beta(z_1,z_2,z_3); \\ \beta^{(1)}(z_1,z_2) &:= \beta(z_1,z_1,z_2)+\beta(z_1,z_2,z_1)+\beta(z_2,z_1,z_1); \\ \beta^{(2)}(z_1) &:= \beta(z_1,z_1,z_1). \end{aligned} \quad \text{(V.43)}$$

In base a questo, è facile vedere che, separando i termini incrociati nella (V.42), si ottiene

$$M_{L,m}^{(n)}(\beta) = \sum_{k=0}^{n-1} N_{L,m}^{(n-k)}(\beta^{(k)}). \quad \text{(V.44)}$$

Se mostriamo che l'asserto in questione vale per $M_{L,m}^{(n)}$, cioè che esiste una $b \in L^2(\Lambda_\infty, P_{\rho,2\beta})$ tale che $M_{L,m}^{(n)}(\beta) = b \circ \Pi_L^m$, allora, per induzione (su n), avremo provato l'asserto anche per $N_{L,m}^{(n)}$. Infatti, abbiamo già detto che per $n=1$ le due applicazioni coincidono; mentre se, per ipotesi d'induzione, esistono funzioni $b^{(k)}$ ($k=1,\ldots,n-1$) tali che $N_{L,m}^{(n-k)}(\beta^{(k)}) = b^{(k)} \circ \Pi_L^m$, visto che lo stesso accade, per una certa altra funzione, anche al membro sinistro della (V.44), deve necessariamente esistere una $b^{(0)}$ tale che $N_{L,m}^{(n)}(\beta) = N_{L,m}^{(n)}(\beta^{(0)}) = b^{(0)} \circ \Pi_L^m$, che è quanto il lemma afferma.

Allora procediamo a mostrare l'affermazione di cui sopra. Supponiamo dapprima che

$$\beta(z_1, \dots, z_n) = \chi_{\Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n}(z_1, \dots, z_n) = \prod_{i=1}^{n} \chi_{\Delta_i}(z_i), \tag{V.45}$$

per una certa famiglia $\{\Delta_i\}$ di borealiani compatti di $\mathbb{R}^2$. Grazie alla proprietà di fattorizzazione si vede che, a partire dalla (V.42), possiamo riscrivere

$$M_{L,m}^{(n)}(\chi_{\Delta_1 \times \cdots \times \Delta_n})(z_1, \dots, z_m) = \prod_{i=1}^{n} M_{L,m}^{(1)}(\chi_{\Delta_i})(z_1, \dots, z_m). \tag{V.46}$$

Ognuno dei termini $M_{L,m}^{(1)}(\chi_{\Delta_i})$ prende valori interi da 0 a m. Specificatamente, esso conta il numero di particelle della configurazione $(z_1, \dots, z_m)$ aventi coordinate $z_i = (p_i, q_i)$ in Δ_i. Allora $M_{L,m}^{(1)}(\chi_{\Delta_i}) = f_{\Delta_i} \circ \Pi_L^m$, dove $f_{\Delta_i}(p, q)$ è appunto la funzione, definita su Λ_∞, che esprime il numero di particelle della configurazione infinita (p, q) aventi coordinate in Δ_i. Per quello che avevamo detto nella Sezione IV.2 del Capitolo IV, questa funzione sta certamente in $\mathcal{A}$; e anche in $L^2(\Lambda_\infty, P_{\rho,2\beta})$, visto che $\mu_L^m(\Delta_i) < +\infty$.

Ora, è ovvio che una β generica può essere approssimata, per esempio nella norma dell'estremo superiore, da una combinazione lineare di funzioni come nella (V.45) e l'affermazione è ancora valida ragionando per densità, ad esempio tramite la (V.40). C.V.D.

Sia $\mathcal{B}^{(n)} \in \mathcal{A}$ lo spazio delle funzioni b prodotte dal Lemma V.6 quando $\beta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$. D'ora in poi supporremo $b \in \mathcal{B}^{(n)}$, per cui $b' := b \circ \Pi_L^m = N_{L,m}^{(n)}(\beta)$. In questa maniera, proveremo il Teorema V.2 per $b \in \bigoplus_{finita} \mathcal{B}^{(n)}$. Ma questo è denso in $L^2(\Lambda_\infty, P_{\rho,2\beta})$ visto che, ricordando la dimostrazione del Lemma V.6, la chiusura di $\bigoplus_{k=0}^{n} \mathcal{B}^{(k)}$ contiene il prodotto di n funzioni come la f_{Δ_i}. D'altra parte queste generano $\mathcal{A}$ (vedi Sezione IV.2).

Sulla scorta di quanto detto sopra, ritorniamo alla (V.35): siccome $b' = N_{L,m}^{(n)}(\beta)$, allora $b' *_L \Phi_L^m = N_{L,m}^{(n)}(\beta *_L \Phi_L^n)$ [15] a causa delle citate proprietà di Φ_L^m

[15] Come prima, $*_L$ significa convoluzione nella variabile q su T_L^n. Mettiamo di nuovo in guardia il lettore rispetto alla possibile confusione dovuta al fatto che $\beta(p, q)$ è definita su $\mathbb{R}^{2n}$. Qualora essa si trovi in una $*_L$-convoluzione, deve essere considerata ristretta a $[-L/2, L/2)^n$ e periodica, secondo l'indentificazione $[-L/2, L/2)^n \simeq T_L^n$ (cfr. Sezione VI.4).

(le relazioni (V.36)-(V.38)). Se chiamiamo $\gamma_L := \beta *_L \Phi_L^n$, è ovvio che $\gamma_L \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ e quindi $N_{L,m}^{(n)}(\gamma_L) = c_L'$ per una certa $c_L \in L^2(\Lambda_\infty, P_{\rho,2\beta})$, in virtù del Lemma V.6. Questo ci permette di riscrivere la (V.35) come

$$I(t, L, m) = \langle a_t', c_L' \rangle_{L^2(\Lambda_L^m, \mu_L^m)}. \tag{V.47}$$

Se riusciamo a trovare un limite per c_L, abbiamo chiuso con la parte complicata di questa dimostrazione. Allo scopo, formuliamo un altro risultato tecnico.

Lemma V.7 *Esiste una $\gamma_\infty \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ tale che*

$$\sup_{\Lambda_L^n} |\gamma_\infty - \gamma_L| = \mathcal{O}(L^{-\infty}). \tag{V.48}$$

Inoltre

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} \gamma_\infty(p', q')\, d\breve{\mu}^n(p')\, dq' = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \beta(p', q')\, d\breve{\mu}^n(p')\, dq'. \tag{V.49}$$

Dimostrazione. Capitolo VI, Sezione VI.5.

In analogia con le notazioni precedenti, si chiami c_∞ l'osservabile in $L^2(\Lambda_\infty, P_{\rho,2\beta})$ ottenuto applicando il Lemma V.6 a γ_∞. Confrontando la (V.48) del Lemma V.7 con la (V.40), deduciamo che

$$\lim_{\substack{m,L\to\infty \\ m/L\to\rho}} \|c_\infty' - c_L'\|^2_{L^2(\Lambda_L^m, \mu_L^m)} = 0. \tag{V.50}$$

Dimenticando per convenienza il deponente nel simbolo di prodotto scalare, ciò significa che, quando $m, L \to \infty$, $m/L \to \rho$,

$$\begin{aligned} &|\langle a_t', c_L' \rangle - P_{\rho,2\beta}(a_t c_\infty)| \le \\ \le\ \ & \|a_t'\|^2 \|c_L' - c_\infty'\|^2 + |\mu_L^m(a_t' c_\infty') - P_{\rho,2\beta}(a_t c_\infty)| \to 0, \end{aligned} \tag{V.51}$$

per via della Proposizione IV.1 del Capitolo IV. Dallo stesso capitolo prendiamo l'altro ingrediente principale di questa dimostrazione, il risultato classico, cioè il Teorema IV.2. Si ottiene:

$$\lim_{|t|\to\infty} \lim_{\substack{m,L\to\infty \\ m/L\to\rho}} I(t, L, m) = P_{\rho,2\beta}(a) P_{\rho,2\beta}(c_\infty). \tag{V.52}$$

Ora, usando gli integrali di γ_∞ e β per confrontare gli integrali di c_∞ e b (si applichi la (V.49) nella (V.41)), vediamo che $\mu_L^m(c'_\infty) = \mu_L^m(b')$. Prendendo i limiti, $P_{\rho,2\beta}(c_\infty) = P_{\rho,2\beta}(b)$, la quale, insieme alla precedente relazione, completa la dimostrazione del Teorema V.2. C.V.D.

Dimostrazione del Teorema V.3. Prima di tutto si deve notare che nessuna delle due affermazioni nell'enunciato del Teorema V.3 può essere banalmente derivata dal Teorema V.2 (né la (V.31) è facile conseguenza della (V.30)). Questo fatto verrà visto meglio più avanti.

Usiamo la notazione sviluppata in precedenza: per esempio, $a'_t := a \circ \phi_\infty[t] \circ \Pi_L^m$. Inoltre, si denoti $a'_T := (1/2T) \int_{-T}^{T} a'_t dt$. La (V.32) prova che

$$\Xi^m[T]\,(A_L^m) = \mathrm{Op}(a'_T), \tag{V.53}$$

dove, come nella Sezione V.3, chiamiamo $A_L^m := \mathrm{Op}(a')$.

L'esistenza di $\Xi^m[\infty](A_L^m)$ è una conseguenza banale dell'evoluzione di Heisenberg: ce ne possiamo rendere conto facilmente guardando i suoi elementi di matrice rispetto alle basi $\{e_\alpha^{(k)}\} \subset L^2_{(k)}(T_L^m)$. Queste basi diagonalizzano l'hamiltoniana H_m, così come ogni operatore funzione delle sole P. Chiamiamo gli autovalori dell'hamiltoniana:

$$E_\alpha^{(k)} = \frac{1}{2}(\alpha+k)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i+k_i)^2. \tag{V.54}$$

Ora è semplice vedere che, $\forall\, k \in [0, 1/L)^m$, $\alpha, \gamma \in (T_L^m)^*$,

$$\langle e_\alpha^{(k)},\, \Xi^m[\infty](A_L^m)\, e_\gamma^{(k)} \rangle = \langle e_\alpha^{(k)},\, A_L^m\, e_\gamma^{(k)} \rangle\, \delta_{E_\alpha^{(k)}, E_\gamma^{(k)}}, \tag{V.55}$$

dove δ è la funzione di Kronecker. Questa formula mostra che $\Xi^m[\infty](A_L^m)$ è ben definito su $D(A_L^m)$.

A questo punto si potrebbe pensare di provare l'asserto riguardante $J(\infty, L, m)$ semplicemente sostituendo l'operatore $\Xi^m[\infty](A_L^m)$, invariante per Heisenberg, in $\mathrm{Op}(a')$ e $\mathrm{Op}(b')$, nel Teorema V.2. Non si può fare esattamente così, dato che quell'operatore non è in generale pseudo-differenziale. Tuttavia è ovvio che potrebbe essere approssimato, ad ogni livello di precisione, da operatori pseudo-differenziali, e il risultato seguirebbe da ragionamenti di densità. D'altra parte, come sottolineato nella Sezione V.3, non abbiamo definito un'appropriata C^*-algebra per il sistema ad infinite particelle. Perciò non è formalmente lecito parlare di densità, e si deve dimostrare il teorema direttamente.

Da un punto di vista informale, $\Xi^m[\infty](A_L^m)$ rappresenta la quantizzazione di $a'_\infty := \lim_{T\to\infty} a'_T$, che in generale non è un simbolo (potendo essere addirittura discontinuo). Ma semplici considerazioni basate sulla banalità della dinamica su Λ_L^m (vedi anche l'osservazione dopo l'enunciato di questo teorema), mostrano che quasi dappertutto (specificatamente per $p = (p_1, \dots, p_m)$ avente componenti razionalmente indipendenti) esso è dato da

$$c'(p,q) = c'(p) := \frac{1}{L^m} \int_{T_L^m} a'(p,q)\, dq \tag{V.56}$$

che è un simbolo. Inoltre, lo denotiamo con c' poiché si può facilmente trovare un $c \in \mathcal{A}$ tale che $c' = c \circ \Pi_L^m$. L'idea di questa dimostrazione è esattamente quella di far vedere che, in qualche senso, $\mathrm{Op}(c')$ è q. d. uguale a $\Xi^m[\infty](A_L^m)$, di modo che il primo possa essere sostituito al secondo nella definizione di $J(\infty, L, m)$, al fine di applicare il Teorema V.2 (si confronti inoltre la (V.31) con la (V.30)).

Prima notiamo alcune proprietà elementari di $\mathrm{Op}(c')$. Siccome $c'(p,q) = c'(p)$, $\mathrm{Op}(c')$ è diagonale sulle basi $\{e_\alpha^{(k)}\}$. I suoi elementi di matrice diagonali, usando la (V.26), si calcolano facilmente:

$$\langle e_\alpha^{(k)}, \mathrm{Op}(c')\, e_\alpha^{(k)} \rangle = c'(\alpha + k) = \frac{1}{L^m} \int_{T_L^m} a'(\alpha + k, q) dq = \langle e_\alpha^{(k)}, A_L^m\, e_\alpha^{(k)} \rangle. \tag{V.57}$$

Inoltre la (V.57), insieme con la (V.55), implica che $\mathrm{Op}(c')^{(k)} = (\Xi^m[\infty](A_L^m))^{(k)}$ [16] per quei $k \in [0, 1/L)^m$ per cui lo spettro di $H_m^{(k)}$ è semplice.

Utilizzando la (V.12) su una generica f_λ presa nell'insieme degli stati che verificano la (V.14), si può osservare che $w_\lambda(p,q)$ contiene una somma (eventualmente numerabile) di delte di Dirac in p. Questo semplice ragionamento mostra che, affiché $\{f_\lambda\}$ verifichi la (V.14), un fattore dello spazio di misura $(X_L^m, d\theta)$ deve essere $([0, 1/L)^m, d\tau(k))$, con $d\tau$ assolutamente continua rispetto alla misura di Lebesgue.[17] Quindi, se provassimo che $\sigma(H_m^{(k)})$ è semplice per quasi tutti i k (nel

[16] Si rammenti che con $A^{(k)}$ denotiamo $A_{|L^2_{(k)}(T_L^m)}$, come spiegato nella Sezione V.1.

[17] Questa è una manifestazione del fatto che tutte le fibre $L^2_{(k)}(T_L^m)$ devono essere prese in con-

senso di Lebesgue), allora

$$J(\infty, L, m) := \int_{X_L^m} \|(\mathrm{Op}(c') - P_{\rho,2\beta}(a))\, g_\lambda\|^2\, d\nu(\lambda) \tag{V.58}$$

e perciò potremmo applicare il Teorema V.2 con $a = b = c - P_{\rho,2\beta}(a)$, che è invariante per la dinamica di Heisenberg. Questo completerebbe la dimostrazione del primo asserto.

Riscalando la (V.54) di un fattore L^m, quello che vogliamo provare è il seguente

Lemma V.8

$$|\{k \in [0,1)^m \,|\, \exists j, n \in \mathbb{Z}^m \ \textit{tale che}\ (j+k)^2 = (n+k)^2\}| = 0.$$

Dimostrazione. [18] Pensiamo a questa affermazione come ad un problema puramente geometrico in $\mathbb{R}^m$: se esistono dei multi-indici j, n come sopra, allora $-k$ giace nell'iperpiano assiale del segmento che unisce j a n, cioè il luogo dei punti equidistanti da j e n. Per costruzione, c'è solo un'infinità numerabile di tali iperpiani. C.V.D.

Per quel che riguarda l'ultimo asserto del Teorema V.3, vediamo nuovamente che esso non può essere derivato come un corollario del teorema sul mixing, dato che stiamo prendendo il limite temporale di entrambi gli operatori. Però possiamo dare una dimostrazione diretta usando quelle stesse tecniche, insieme all'ergodicità classica (Teorema IV.2).

Esattamente come per le (V.33)-(V.34), possiamo scrivere

$$J(T, L, m) = \int_{\Lambda_L^m} [(a'_T - P_{\rho,2\beta}(a)) \sharp (a'_T - P_{\rho,2\beta}(a))]\,(p,q) \left[e^{-2\beta \mathcal{H}_m(p)}\, dpdq\right]_N , \tag{V.59}$$

---

siderazione, come accennato nell'Osservazione 1 all'inizio della Sezione V.1. Possiamo convincerci di questo anche guardando i due esempi di $\{f_\lambda\}$ che abbiamo scritto esplicitamente: la base di Fourier (nella Sezione V.3) e gli stati coerenti (nell'Appendice, Sezione VI.2). In entrambi i casi $(X_L^m, d\theta) = ([0, 1/L)^m, dk)) \times$ qualche misura.

[18] Ringrazio D. Dolgopyat per avermi fornito questa semplice dimostrazione.

avendo usato la (V.53). Siamo ormai pratici di questo oggetto e sappiamo che integrare (contro la misura di Gibbs) la composizione di Weyl di due funzioni significa integrare il prodotto delle due funzioni, una delle quali, però, deformata tramite una convoluzione (vedi le (V.34), (V.35) e (V.47)). Al limite termodinamico, questo equivale a dire che

$$\lim_{\substack{m,L\to\infty \\ m/L\to\rho}} J(T,L,m) = P_{\rho,2\beta}((a_T - P_{\rho,2\beta}(a))\, c^{(T)}), \tag{V.60}$$

dove $c^{(T)}$ è il limite delle "funzioni deformate" costruite a partire dalla $(a_T - P_{\rho,2\beta}(a))$. La sua esistenza è garantita dai Lemmi V.7 e V.6, che implicano la (V.50). Tramite la costruzione che abbiamo appena ricordato si può vedere che se $(a_T - P_{\rho,2\beta}(a))$ è limitata, allora anche $c^{(T)}$ lo è.

Un'osservazione è d'uopo qui: nella dimostrazione del Teorema V.2 abbiamo lavorato con funzioni appartenenti a $\mathcal{B}^{(n)}$, e queste sono illimitate per definizione. Ma un semplice argomento mostra che una a limitata, presa in $\mathcal{A} = \sigma(\bigoplus \mathcal{B}^{(n)})$, rimane limitata anche dopo il trattamento di cui sopra, visto che (in parole povere) viene deformata nella stessa maniera su ciascuna delle sue componenti $\mathcal{B}^{(n)}$.

Per finire, applichiamo la convergenza dominata nella (V.60), sfruttando il fatto che l'integrando è limitato e tende puntualmente a zero, per $T \to \infty$. Perció il limite in T della (V.60) prova l'ultima affermazione del Teorema V.3. C.V.D.

Capitolo VI

Appendice

Presentiamo in questo capitolo alcuni argomenti tecnici che sono stati omessi nella parte centrale della tesi.

VI.1 Dimostrazione del Lemma III.6

Tramite la (III.37), vediamo che $e^{-\mathcal{H}_{\beta,m}} \sharp\, a \,\sharp\, e^{-\mathcal{H}_{\beta,m}}$ può essere espressa come

$$(e^{-\mathcal{H}_{\beta,m}} \sharp\, a \,\sharp\, e^{-\mathcal{H}_{\beta,m}})(q,p) = C_1 \int_{\Lambda_m^4} a(x_1)\, e^{-u(q,p,x_1,x_2,x_3,x_4)}\, dx_1 dx_2 dx_3 dx_4, \qquad \text{(VI.1)}$$

dove u è una forma quadratica complessa su Λ_m^6 e l'integrale della (VI.1) è un integrale oscillante (C_1 è una costante complessa). Con un calcolo diretto si ottiene inoltre:

$$\int_{\Lambda_m^3} e^{-u(q,p,x_1,x_2,x_3,x_4)}\, dx_2 dx_3 dx_4 = C_2\, e^{-v(q,p,x_1)}, \qquad \text{(VI.2)}$$

per una certa v forma quadratica definita positiva e una costante C_2, questa volta reale. Questo fatto può essere mostrato anche senza bisogno di fare il calcolo: l'esistenza della costante complessa C_2 e della forma quadratica complessa nella (VI.2) è chiara. Se a è reale, allora $\mathrm{Op}(e^{-\mathcal{H}_{\beta,m}} \sharp\, a \,\sharp\, e^{-\mathcal{H}_{\beta,m}}) = \mathrm{Op}(e^{-\mathcal{H}_{\beta,m}})\mathrm{Op}(a)\mathrm{Op}(e^{-\mathcal{H}_{\beta,m}})$ è un operatore simmetrico e quindi il suo simbolo, $e^{-\mathcal{H}_{\beta,m}} \sharp\, a \,\sharp\, e^{-\mathcal{H}_{\beta,m}}$, deve essere reale. Questo implica che $C_2 e^{-v}$ è reale, e quindi lo sono sia C_2 che v. Proseguendo, si può vedere facilmente che l'applicazione $a \mapsto e^{-\mathcal{H}_{\beta,m}} \sharp\, a \,\sharp\, e^{-\mathcal{H}_{\beta,m}}$ è continua da $S^0(\Lambda_m)$ in $\mathcal{S}(\Lambda_m)$: guardando le (VI.1)-(VI.2) alla luce di questo fatto, ci si convince che la u è necessariamente definita positiva.

Fissando $a \equiv 1$, otteniamo dalle (III.15), (VI.1)-(VI.2):

$$C_1 C_2 \int_{\Lambda_m} e^{-v(q,p,x_1)}\, dx_1 = e^{-\widetilde{\mathcal{H}}_{2\beta,m}}. \tag{VI.3}$$

L'asserto segue dalle (VI.1)-(VI.3), se si scrive:

$$(e^{-\mathcal{H}_{\beta,m}} \sharp\, a \,\sharp\, e^{-\mathcal{H}_{\beta,m}})(q,p) = \left(C_1 C_2 \int_{\Lambda_m} e^{-v(q,p,x_1)} dx_1 \right) \int_{\Lambda_m} a(x_1) \left[e^{-v(q,p,x_1)} dx_1 \right]_N . \tag{VI.4}$$

C.V.D.

VI.2 Gli stati coerenti per il cilindro

Cominciamo questa sezione richiamando alcune nozioni sulla decomposizione di Bloch (V.2), seguendo [Ree-Sim] e [DeB-Gon 93]. L'idea è molto semplice: data una funzione $f \in L^2(\mathbb{R}^m)$, consideriamo la sua trasformata di Fourier $\widehat{f}(p)$, e selezioniamo da quest'ultima solo i termini con $p = \xi + k$, $(\xi \in (T_L^m)^*)$. Con questi costruiamo la funzione $f^{(k)}$ che chiaramente sta in $L^2_{(k)}(T_L^m)$. In altre parole:

$$f^{(k)}(x) := \frac{1}{L^m} \sum_{\xi \in (T_L^m)^*} \widehat{f}(\xi + k) e^{2\pi i (\xi + k)\cdot x}. \tag{VI.5}$$

Considerando i prodotti scalari negli spazi duali (rispettivamente $L^2(\mathbb{R}^m)$ e $\ell^2((\mathbb{Z}/L)^m + k)$), è facile scrivere la formula di decomposizione che giustifica la (V.2):

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^m)} = \int_{[0,1/L)^m} \langle f^{(k)}, g^{(k)} \rangle_{L^2_{(k)}(T_L^m)} dk. \tag{VI.6}$$

Una formula esplicita per $f^{(k)}$, più diretta della (VI.5), è ottenibile con l'aiuto della regola di sommazione di Poisson:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^m} e^{-2\pi i L n \cdot k} f(x + Ln). \tag{VI.7}$$

A questo punto possiamo procedere alla costruzione di un importante esempio di stati che soddisfano le ipotesi dei nostri teoremi. Scegliamo una famiglia di stati coerenti generalizzati sullo spazio delle fasi euclideo $2m$-dimensionale:

$$f_{(u,v)} := T(-u, v) f_0, \tag{VI.8}$$

come costruiti in [Perelomov], con $(u, v) \in \mathbb{R}^{2m}$ e $f_0 \in L^2(\mathbb{R}^m)$, di solito una gaussiana centrata nell'origine. Richiamando la precedente osservazione preliminare, diamo la seguente definizione.

Definizione VI.1 ([DeB-Gon 93]) *La famiglia* $f^{(k)}_{(u,v)}$*, dove* $(u, v, k) \in X^m_L := T^m_L \times \mathbb{R}^m \times [0, 1/L)^m$*, costruita come sopra a partire dalla* (VI.8)*, viene detta un* insieme di stati coerenti *su* Λ^m_L*.*

Dotiamo X^m_L della misura $d\theta(u, v, k) := du\, dv\, dk$. Controlliamo che questa costruzione verifica le ipotesi dei teoremi.

Lavorando sull'antitrasformata di Fourier di w_λ, cioè sulla funzione di Fourier-Wigner relativa allo stato f_λ, abbiamo:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Lambda^m_L} dudv \int_{[0,1/L)^m} dk \left\langle f^{(k)}_{(u,v)}, T^{(k)}(\eta,\xi) f^{(k)}_{(u,v)} \right\rangle_{L^2_{(k)}(T^m_L)} = \\
= \ & \int_{\Lambda^m_L} dudv \langle f_{(u,v)}, T(\eta,\xi) f_{(u,v)} \rangle_{L^2(\mathbb{R}^m)} = \\
= \ & \int_{\Lambda^m_L} dudv \langle T(-u,v) f_0, T(-u,v) T(\eta,\xi) f_0 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^m)} \, e^{2\pi i(\eta\cdot v + \xi\cdot u)} = \\
= \ & \int_{\Lambda^m_L} dudv \langle f_0, T(\eta,\xi) f_0 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^m)} \, e^{2\pi i(\eta\cdot v + \xi\cdot u)} = \\
= \ & \langle f_0, T(\eta,\xi) f_0 \rangle_{L^2(\mathbb{R}^m)} \, \delta_\xi \delta(\eta) = \delta_\xi \delta(\eta),
\end{aligned} \tag{VI.9}$$

che è un altro modo di verificare la (V.14). Il primo passaggio è giustificato dalla (VI.6) e il terzo dalle relazioni di commutazione del gruppo di Heisenberg.

Per finire, gli stati coerenti sono forse i più importanti fra le possibili scelte che si possono fare. Infatti essi sono introdotti per godere di questa proprietà: essere tanto *localizzati* quanto il principio d'intederminazione di Heisenberg consente (cfr. [DeB-Gon 93]). Se volessimo prendere il limite semiclassico, utilizzando la funzione di Wigner come una misura del grado di localizzazione di uno stato, vedremmo che

$$W_{f^{(k)}_{(u,v)}, f^{(k)}_{(u,v)}}(p, q) \longrightarrow \delta(p-u)\delta(q-v) \quad \text{per } \hbar \to 0; \tag{VI.10}$$

dove la dipendenza da $\hbar$ è implicita nella costruzione di $f^{(k)}_{(u,v)}$. Questo è il motivo per cui uno stato del genere è un buon analogo di un punto nello spazio delle fasi. Vediamo quindi, senza grande sorpresa, che il significato fisico delle nostre nozioni ergodiche quantistiche diviene più intuitivo (e più classico!) per piccoli $\hbar$..

VI.3 Dimostrazione del Lemma V.5

Verifichiamo l'uguaglianza in questione su tutti gli elementi di matrice rispetto alla base standard di $L^2_{(k)}(T^m_L)$, cioè $\{e^{(k)}_\alpha\}_{\alpha\in(T^m_L)^*}$, introdotta nella Sezione V.1. Si calcola facilmente che

$$T^{(k)}(\eta,\xi)e^{(k)}_\alpha = e^{2\pi i\eta\cdot(\xi/2+\alpha+k)}e^{(k)}_{\alpha+\xi}. \tag{VI.11}$$

Se ora denotiamo $c^t(p,q) := c\circ\phi^m_L[t] = c(p,q+pt)$, la trasformata di Fourier di questa funzione è data da $\widehat{c^t}(\eta,\xi) = \widehat{c}(\eta-\xi t,\xi)$. Per cui, sostituendo nella (V.7) e cambiando variabile,

$$\mathrm{Op}(c^t) := \frac{1}{L^m}\sum_{\xi\in(T^m_L)^*}\int_{\mathbb{R}^m}\widehat{c}(\eta,\xi)\,T(\eta+\xi t,\xi)\,d\eta. \tag{VI.12}$$

Affinché l'asserto valga per ogni c, una condizione necessaria e sufficiente è che $\forall\alpha,\gamma\in(T^m_L)^*$,

$$\langle e^{(k)}_\alpha, T(\eta+\xi t,\xi)e^{(k)}_\gamma\rangle = \langle e^{(k)}_\alpha, e^{2\pi itH_m}T(\eta,\xi)e^{-2\pi itH_m}e^{(k)}_\gamma\rangle. \tag{VI.13}$$

Usando la (VI.11), scriviamo al membro sinistro

$$\langle e^{(k)}_\alpha, T(\eta+\xi t,\xi)e^{(k)}_\gamma\rangle = e^{2\pi i(\eta+\xi t)\cdot(\xi/2+\gamma+k)}\,\delta_{\alpha,\gamma+\xi}. \tag{VI.14}$$

Siccome $P^{(k)}e^{(k)}_\alpha = (\alpha+k)e^{(k)}_\alpha$, al membro destro abbiamo

$$\begin{aligned} &\langle e^{(k)}_\alpha, e^{2\pi itH_m}T(\eta,\xi)e^{-2\pi itH_m}e^{(k)}_\gamma\rangle = \\ =\;& e^{\pi i(\alpha+k)^2t}\,e^{-\pi i(\gamma+k)^2t}\,e^{2\pi i\eta\cdot(\xi/2+\gamma+k)}\,\delta_{\alpha,\gamma+\xi} \\ =\;& e^{2\pi i((\xi/2+\gamma+k)\cdot\xi t+(\xi/2+\gamma+k)\cdot\eta)}\,\delta_{\alpha,\gamma+\xi}, \end{aligned} \tag{VI.15}$$

dove abbiamo sostituito ad α il suo valore $\gamma+\xi$. Questa relazione verifica la (VI.13). C.V.D.

VI.4 Convoluzioni su tori e su spazi euclidei

Lo scopo di questa sezione è di chiarificare il significato del simbolo $*_L$, che indica la convoluzione nella variabile q su T_L^m, qualora essa sia applicata a funzioni che in principio sono definite su insiemi più grandi. Inoltre è utile capire come essa sia collegata alla $*_\infty$, l'ordinaria convoluzione su $\mathbb{R}^m$, quando mandiamo $L \to \infty$.

Siccome qui gli argomenti sono essenzialmente descrittivi, ci specializziamo al caso monodimensionale, senza perdere di generalità. Se f è una funzione sommabile definita su $\mathbb{R}$, denotiamo con $f^{(L)}$ la sua *restrizione periodica*, cioè la funzione, *definita ancora su* $\mathbb{R}$, periodica di periodo L, che coincide con f su $[-L/2, L/2)$. Allora, se g è una funzione sufficientemente "buona", definiamo

$$\begin{aligned}(f *_L g)(x) \;&:=\; (f^{(L)} * g^{(L)})(x) = \int_{-L/2}^{L/2} f^{(L)}(y) g^{(L)}(x-y)\, dy = \\ &=\; \int_{-L/2}^{L/2} f(y) g^{(L)}(x-y)\, dy. \qquad \text{(VI.16)}\end{aligned}$$

Quindi, per esempio, $(f *_L g)(x) \neq \int_{-L/2}^{L/2} f(y) g(x-y) dy$. Se $L \to \infty$, comunque, ci aspettiamo che queste due quantità siano all'incirca uguali, almeno per $x \in \mathbb{R}$ fissato. In effetti, richiedendo ad f e a g alcune proprietà, si può provare un utile lemma. Si chiami $S_R := [-R, R]$.

Lemma VI.2 *Supponiamo che* $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ *e che* $\operatorname{supp} f \subseteq S_R$. *Assumiamo inoltre che* $|g|$ *tenda monotonicamente a zero all'infinito. Definendo*

$$h(x) = (f *_L g - f *_\infty g)(x),$$

si ha che, per L *sufficientemente grande,*

$$h(x) \begin{cases} \leq M(\,|g(-L/2)| + |g(L/2-R)|\,) & \text{per } x \in [-L/2, -L/2+R) \\ = 0 & \text{per } x \in [-L/2+R, L/2-R] \\ \leq M(\,|g(L/2)| + |g(-L/2+R)|\,) & \text{per } x \in (L/2-R, L/2] \end{cases}$$

con $M := R \max |f|$.

Dimostrazione. Prendiamo L talmente grande che $L/2 > R$ e $|g|$ è crescente su $(-\infty, -L/2+R]$ e decrescente su $[L/2-R, +\infty)$.

Guardando la (VI.16) e ricordando l'ipotesi su f, possiamo scrivere

$$(f *_L g)(x) = \int_{S_R} f(y) g^{(L)}(x-y)\, dy. \tag{VI.17}$$

Per cui

$$h(x) = \int_{S_R} f(y)(g^{(L)} - g)(x-y)\, dy. \tag{VI.18}$$

Ora, $g^{(L)}(x-y)$ coincide con $g(x-y)$ quando $x-y \in S_{L/2}$, cioè quando $y \in [x - L/2, x + L/2]$. Perciò la (VI.18) si riscrive come

$$h(x) = \int_{S_R \setminus (x + S_{L/2})} f(y)(g^{(L)} - g)(x-y)\, dy. \tag{VI.19}$$

Si vede facilmente che, se $x \in [-L/2 + R, L/2 - R]$, $S_R \subseteq (x + S_{L/2})$. In questo caso $h(x) = 0$ e una parte dell'enunciato è dimostrata. Se $x \in [-L/2, -L/2 + R)$, usando la nuova variable $z = x - y$ nella (VI.18), otteniamo

$$\begin{aligned} |h(x)| &= \left| \int_{x-R}^{-L/2} f(x-z)(g^{(L)} - g)(z) dz \right| \leq \\ &\leq \max |f| \int_{-L/2-R}^{-L/2} (|g^{(L)}(z)| + |g(z)|) dz. \end{aligned} \tag{VI.20}$$

Considerato che, per definizione, se $z < -L/2$, $g^{(L)}(z) = g(z + L)$, la monotonicità di $|g|$ implica il primo caso nell'enunciato del lemma. Il terzo è ovviamente analogo. C.V.D.

VI.5 Dimostrazione del Lemma V.7

In questa sezione, come già in altri casi, denotiamo con (p, q) tutte le coordinate canoniche, siano essere definite su Λ_L^m, su $\mathbb{R}^{2n}$, o su Λ_L^1. È forse bene notare che, nella dimostrazione del Teorema V.2, le variabili n-dimensionali sono indicate con (p', q').

Qui l'idea è vedere che, per n fissato, la funzione Φ_L^n, definita come nella (V.36), diventa sempre più simile, in Λ_L^n, a

$$\Phi_\infty^n(p, q) \;=\; e^{\beta p^2} \int_{\mathbb{R}^n} d\xi \; e^{-\beta(p - \xi/2)^2} \, e^{2\pi i \xi \cdot q} =$$

$$\begin{aligned} &= e^{\beta p^2} e^{4\pi i p \cdot q} \left(\frac{4\pi}{\beta} \right)^{n/2} e^{-(4\pi^2/\beta) q^2} = \\ &= e^{\beta p^2} e^{4\pi i p \cdot q} \upsilon^n(q), \end{aligned} \tag{VI.21}$$

dove $\upsilon(q) := \sqrt{4\pi/\beta}\, e^{-(4\pi^2/\beta)q^2}$. Più avanti useremo ripetutamente la stima asintotica $\upsilon(L/2) = \mathcal{O}(L^{-\infty})$.

Comunque sia, Φ^n_∞ è definita dal fatto di avere lo stesso spettro di Fourier di Φ^n_L, opportunamente esteso a tutto $\mathbb{R}^n$. Se denotiamo con $\widetilde{\cdot}$ la trasformata di Fourier nelle q su T^n_L, questo equivale a dire che, per $\xi \in (T^n_L)^* = (\mathbb{Z}/L)^n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi^n_\infty(p,q)\, e^{-2\pi i \xi \cdot q}\, dq = e^{\beta p^2}\, e^{-\beta(p-\xi/2)^2} =: \widetilde{\Phi}^n_L(p,\xi). \tag{VI.22}$$

Perciò il miglior candidato per γ_∞ è $\beta *_\infty \Phi^n_\infty$ (il simbolo $*_\infty$ rappresenta la convoluzione ordinaria su $q \in \mathbb{R}^n$, come spiegato nella Sezione VI.4). Per prima cosa, γ_∞ verifica la (V.49): questa è una conseguenza del fatto che $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi^n_\infty = 1$, che si verifica facilmente. Dimostriamo ora la (V.48).

Tenendo a mente l'avvertimento della Sezione VI.4, la disuguaglianza fondamentale sarà:

$$\begin{aligned} \sup_{\Lambda^n_L} |\gamma_L - \gamma_\infty| &= \sup_{\Lambda^n_L} |\beta *_L \Phi^n_L - \beta *_\infty \Phi^n_\infty| \le \\ &\le \sup_{\Lambda^n_L} |\beta *_L (\Phi^n_L - \Phi^n_\infty)| + \sup_{\Lambda^n_L} |\beta *_L \Phi^n_\infty - \beta *_\infty \Phi^n_\infty|. \end{aligned} \tag{VI.23}$$

Il termine più a destra può essere trattato facilmente, usando la (VI.21) e il Lemma VI.2. Se $(p,q) \in \Lambda^n_L$,

$$|\,(\beta *_L \Phi^n_\infty - \beta *_\infty \Phi^n_\infty)(p,q)\,| \le M \upsilon^n \left(\frac{L}{2} - R \right) = \mathcal{O}(L^{-\infty}), \tag{VI.24}$$

dove $M \simeq \max(|\beta(p,q)| e^{\beta p^2})$ e R è il raggio della sfera contenente $\operatorname{supp} \beta$. Riguardo all'altro termine nella (VI.23), usiamo le idee esposte all'inizio di questa sezione a proposito di Φ^n_∞. Iniziamo col notare che $\| \cdot \|_{L^1(T^n_L, dq)} \le L^{n/2} \| \cdot \|_{L^2(T^n_L, dq)}$. Abbiamo allora:

$$\sup_{q \in T^n_L} |\beta *_L (\Phi^n_L - \Phi^n_\infty)(p,q)| \le \sup_{q \in T^n_L} |\beta(p,q)|\, L^{n/2}\, \|(\Phi^n_L - \Phi^n_\infty)(p,\cdot)\|_{L^2(T^n_L, dq)}. \tag{VI.25}$$

Si noti che β ha supporto compatto. Si può inoltre vedere che

$$\|(\Phi_L^n - \Phi_\infty^n)(p_1, \dots, p_n, \cdot)\|^2_{L^2(T_L^n, dq)} = \prod_{i=1}^{n} \|(\Phi_L - \Phi_\infty)(p_i, \cdot)\|^2_{L^2(T_L, dq_i)}, \tag{VI.26}$$

visto che Φ_L^n e Φ_∞^n sono completamente fattorizzabili: abbiamo chiamato, naturalmente, Φ_L e Φ_∞ le loro versioni monodimensionali, delle quali ci occuperemo subito. Come già anticipato, siamo un po' imprecisi ed usiamo di nuovo il simbolo (p, q) per (p_i, q_i). Ora

$$\|(\Phi_L - \Phi_\infty)(p, \cdot)\|^2_{L^2(T_L)} = \frac{1}{L} \sum_{\xi \in (\mathbb{Z}/L)} |\widetilde{\Phi}_L(p, \xi) - \widetilde{\Phi}_\infty(p, \xi)|^2, \tag{VI.27}$$

con $\widetilde{\Phi}_\infty(p, \xi) = \int_{-L/2}^{L/2} \Phi_\infty(p, q) e^{-2\pi i \xi q} dq$. Riguardando la (VI.22) ed utilizzando la definizione (VI.21), possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
& |\widetilde{\Phi}_L(p, \xi) - \widetilde{\Phi}_\infty(p, \xi)| = \\
= \quad & \left| \int_{\mathbb{R} \setminus T_L} \Phi_\infty(p, q)\, e^{-2\pi i \xi q}\, dq \right| = \\
= \quad & 2e^{\beta p^2} \left| \int_{L/2}^{+\infty} \upsilon(q) \, \cos(2\pi(\xi - 2p)q)\, dq \right| = \\
= \quad & 2e^{\beta p^2} \left| \left[\frac{\upsilon(q) \, \sin(2\pi(\xi - 2p)q)}{2\pi(\xi - 2p)} \right]_{L/2}^{+\infty} - \int_{L/2}^{+\infty} \frac{\upsilon'(q) \, \sin(2\pi(\xi - 2p)q)}{2\pi(\xi - 2p)}\, dq \right| \leq \\
\leq \quad & e^{\beta p^2} g(\xi - 2p) \upsilon(L/2),
\end{aligned} \tag{VI.28}$$

dove $g(x)$ è una funzione continua definita su $\mathbb{R}$, che si comporta asintoticamente come $|x|^{-1}$. Si noti che, quando $L \to \infty$, $(1/L) \sum_{\xi \in (\mathbb{Z}/L)} g^2(\xi - 2p) \to \int_{\mathbb{R}} g^2(\xi) d\xi =: K$. Perciò, considerando la (VI.25) e mettendo insieme le (VI.26), (VI.27) e (VI.28), abbiamo:

$$\begin{aligned}
& \sup_{(p,q) \in \Lambda_L^n} |\beta *_L (\Phi_L^n - \Phi_\infty^n)(p, q)| \leq \\
\leq \quad & L^{n/2} \sup_{(p,q) \in \Lambda_L^n} |\beta| \sup_{|p| < R} \|(\Phi_L^n - \Phi_\infty^n)(p, \cdot)\|_{L^2(T_L^n, dq)} \leq \\
\leq \quad & \left(e^{2\beta R^2} (K + 1) \upsilon^2(L/2)\, L \right)^{n/2} \sup |\beta| = \mathcal{O}(L^{-\infty}),
\end{aligned} \tag{VI.29}$$

dato che β ha supporto compatto. Inserendo le (VI.24) e (VI.29) nella disuguaglianza principale (VI.23), si completa la dimostrazione. C.V.D.

Bibliografia

[Arn-Ave] V. I. Arnold e A. Avez, *Ergodic Problems of Classical Mechanics*, W. A. Benjamin, New York, 1968;

[Benatti] F. Benatti, *Deterministic Chaos in Infinite Quantum Systems*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1993;

[Ber-Shu] F. A. Berezin e M. S. Shubin, *The Schrödinger Equation*, Kluwer Academic, Amsterdam, 1991;

[Ber-Tab 77] M. V. Berry e M. Tabor, *Level clustering in the regular spectrum*, Proc. Royal Soc. London A **356** (1977), 375-394;

[Boh-Gia-Sch 84] O. Bohigas, M. J. Giannoni e C. Schmit, *Characterization of Chaotic Quantum Spectra and Universality of Level Clustering of Level Fluctuation Laws*, Phys. Rev. Lett. **52** (1984), 1-4;

[BPPSS 85] C. Boldrighini, A. Pellegrinotti, E. Presutti, Ya. G. Sinai, M. R. Soloveichik, *Ergodic Properties of a Semi-Infinite One-Dimensional System of Statistical Mechanics*, Commun. Math. Phys. **101**(3) (1985), 363-382;

[Bra-Rob] O. Bratteli e D. W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics, Vol. I and II*, Text and Monographs in Physics, Springer-Verlag, New York, 1987;

[Cor-Fom-Sin] I. P. Cornfeld, S. V. Fomin e Ya. G. Sinai, *Ergodic Theory*, Springer-Verlag, New York, 1982;

[Chirikov 86] B. V. Chirikov, *Transient Chaos in Quantum and Classical Mechanics*, Found. Phys. **16**(1) (1986), 39-49;

[Colin de V. 85] Y. Colin de Verdière, *Ergodicité et fonctions propres du Laplacien*, Commun. Math. Phys. **102**(3) (1985), 497-502;

[DeB-Gon 93] S. de Bièvre e J. A. Gonzáles, *Semiclassical Behaviour of Coherent States on the Circle*, in Proceedings of 11th workshop on geometric methods in physics (S. T. Ali, I. M. Mladenov, A. Odzijewicz eds.), Bialowieza, Poland, World Scientific, 1993;

[Deg-Gra-Iso 95] M. Degli Esposti, S. Graffi e S. Isola, *Classical Limit of the Quantized Hyperbolic Toral Automorphisms*, Commun. Math. Phys. **167** (1995), 471-507;

[Folland] G. B. Folland, *Harmonic Analysis in Phase Space*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1988;

[Gia-Vor-Zin] M. J. Giannoni, A. Voros e J. Zinn-Justin, editori, *Chaos and Quantum Physics*, Les Houches Summer School, North-Holland, Amsterdam, 1991;

[Gol-Leb-Aiz 74] S. Goldstein, J. L. Lebowitz e M. Aizenman, *Ergodic properties of infinite systems*, in Proceedings of the 1973 Battelle Rencontre (J.Moser ed.), Lectures Notes in Physics **38** (1974), 112-143;

[Gol-Leb-Rav 82] S. Goldstein, J. L. Lebowitz e K. Ravishankar, *Ergodic Properties of a System in Contact with a Heat Bath: a One-Dimensional Model.*, Commun. Math. Phys. **85**(3) (1982), 419-427;

[Gra-Mar 96] S. Graffi e A. Martinez, *Ergodic Properties of Infinite Harmonic Crystals: An Analytic Approach*, J. Math. Phys. **37**(10) (1996), 5111-5135;

[Gutzwiller] M. C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin, 1990;

[Helffer 94] B. Helffer, *Universal Estimates for the Kac Operator in the Convex Case*, Commun. Math. Phys. **161** (1994), 631-642;

[Hel-Mar-Rob 87] B. Helffer, A. Martinez e D. Robert, *Ergodicité et limite semi-classique*, Commun. Math. Phys. **109** (1987), 313-326;

[Hurt] N. E. Hurt, *Quantum Chaos and Mesoscopic Systems*, Kluwer Academic, 1997;

[Jon-Pre 96] G. Jona-Lasinio e C. Presilla, *Chaotic Properties of Quantum Many Body Systems in the Thermodynamic Limit*, Phys. Rev. Lett. **77** (1996), 4322-4325;

[Jon-Pre-Cap 92] G. Jona-Lasinio, C. Presilla e F. Capasso, *Chaotic Quantum Phenomena without Classical Counterpart*, Phys. Rev. Lett. **68** (1992), 2269-2273;

[Kos-Min-Sin 93] D. V. Kosygin, A. A. Minasov e Ya. G. Sinai, *Statistical Properties of the Spectra of Laplace-Beltrami Operators on Liouville Surfaces*, Russian Math. Surveys **48**(4) (1993), 1-142 ;

[Lan-Leb 74] O. E. Lanford III e J. L. Lebowitz, *Time Evolution and Ergodic Properties of Harmonic Systems*, in Proceedings of the 1973 Battelle Rencontre (J.Moser ed.), Lectures Notes in Physics **38** (1974), 144-177;

[Lebowitz 72] J. L. Lebowitz, *Hamiltonian Flows and Rigorous Results in Nonequilibrium Statistical Mechanics*, in Statistical Mechanics, New Concepts, New Problems, New Applications (S. A. Rice, K. F. Freed, J. C. Light eds.), University of Chicago Press, Chicago, 1972;

[Lenci Tesi] M. Lenci, *Sulla nozione di ergodicità quantistica*, Tesi di Laurea in Fisica, Università di Bologna, 1993;

[Lenci 96] M. Lenci, *Ergodic Properties of the Quantum Ideal Gas in the Maxwell-Boltzmann Quantization*, J. Math. Phys. **37**(10) (1996), 5136-5157;

[Mañé] R. Mañé, *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1986;

[Mar-Mon-Wei] A. A. Maradudin, E. W. Montroll e G. H. Weiss (con I. P. Ipatova), *Theory of Lattice Dynamics in the Harmonic Approximation*, Academic Press, 1963;

[Nar-Thi 89] H. Narnhofer e W. Thirring, *Mixing Propertiers of Quantum Systems*, J. Stat. Phys. **89**(3-4) (1993), 811-825;

[Nar-Thi 93] H. Narnhofer e W. Thirring, *KMS states for the Weyl algebra*, Lett. Math. Phys. **27**(2) (1993), 133-142;

[Perelomov] A. M. Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications*, Texts and Monographs in Physics, Springer-Verlag, 1986;

[Ree-Sim] M. Reed e B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics, Vol. IV: Analysis of Operators*, Academic Press, 1978;

[Robert] D. Robert, *Autour de l'Analyse Semiclassique*, Birkhhauser, Boston, 1987;

[Ruelle] D. Ruelle, *Statistical Mechanics: Rigorous Results*, W. A. Benjamin, New York, 1969;

[Sarnak] P. Sarnak, *Arithmetic Quantum Chaos*, Schur Lectures, Tel Aviv, 1994;

[Shiryayev] A. N. Shiryayev, *Probability*, Springer-Verlag, GTM 95, New York, 1984;

[Schnirelman 74] A. Schnirelman, *Ergodic Properties of the Eigenfunctions*, Usp. Math. Nauk. **29** (1974), 181-182;

[Shubin] A. M. Shubin, *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1987;

[Sinai] Ya. G. Sinai, *Introduction to Ergodic Theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1976;

[Sinai 79] Ya. G. Sinai, *Ergodic Properties of the Lorentz Gas*, Func. Anal. Appl. **13**(3) (1979), 192-202;

[Sjöstrand 92] J. Sjöstrand, *Exponential Convergence of the First Eigenvalue Divided by the Dimension for Certain Sequences of Schrödinger Operators*, in Méthodes Semiclassiques, Vol.2, Astérisque **210** (1992);

[Szasz 96] Ya. Szasz, *Boltzmann's Ergodic Hypothesis, a Conjecture for Centuries?*, Studia Scientiarum Math. Hungarorum **31** (1996), 192-202;

[Titulaer 73] U. M. Titulaer, *Ergodic Properties of Infinite Harmonic Systems*, Physica **70** (1973), 257-275, 276-297, 456-483;

[Vol-Sin 71] K. L. Volkovyski e Ya. G. Sinai, *Ergodic Properties of an Ideal Gas with Infinitely Many Degrees of Freedom*, Funct. Anal. Appl. **5** (1971), 185-187;

[Von Neumann 29] J. Von Neumann, *Beweis des Ergodensatzes und des H-Theorems in der Neuen Mechanik*, Zschr. f. Physik **57** (1929), 30-70;

[Walters] P. Walters, *An introduction to ergodic theory*, Springer-Verlag, GTM 79, New York, 1982;

[Zelditch 87] S. Zelditch, *Uniform Distribution of Eigenfunctions on Compact Hyperbolic Surfaces*, Duke Math. J. **55** (1987), 919-941;

[Zelditch 92] S. Zelditch, *Quantum Ergodicity on the Sphere*, Commun. Math. Phys. **146** (1992), 61-71;

[Zelditch 96] S. Zelditch, *Quantum Ergodicity of C^*-dynamical Systems*, Commun. Math. Phys. **177**(2) (1996), 507-528;