

04788 - FONDAMENTI DI MATEMATICA (A-L), A.A. 2006/07
Esame scritto, 2 dicembre 2006

Nome: _____
Cognome: _____
Matricola: _____

Punteggio:

ISTRUZIONI: Su questo foglio vanno scritte **solo** le soluzioni, nello spazio dell'esercizio corrispondente, oppure, per gli esercizi che la richiedono, una dimostrazione sintetica. Riconsegnare **tutti** i fogli usati durante il compito. Nonostante il punteggio massimo ottenibile sia di 160 punti, il voto sarà espresso in 150esimi.

1. **[18 pt]** Sia data una funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. Cerchiare le affermazioni necessariamente vere:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

(b) $f(0) = 1$

(c) c'è un intorno U di 0 tale che, $\forall x \in U \setminus \{0\}$, $f(x) > 0$

(d) la funzione è continua in 0

(e) la funzione è definita in 0

(f) la funzione non può essere dispari

2. **[15 pt]** Mostrare che ogni polinomio P di grado 3 deve avere almeno una radice reale, cioè almeno un $x \in \mathbb{R}$ tale che $P(x) = 0$.

3. **[10 pt]** Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabile su tutto \mathbb{R} . Sapendo che $f(0) = 1$, $f(2) = 6$ e $f(4) = 3$, dimostrare che esiste un $x \in \mathbb{R}$ tale che $f'(x) = 1/2$.

4. **[10 pt]** Risolvere:

(a) $x^2 - 2x + 2 = 0$

(b) $x^2 - 2x + 2 \geq 0$

5. **[15 pt]** Determinare il codominio di $f(x) = \tan x$, con $D(f) = \left[0, \frac{\pi}{2} \left[\cup \right] \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right]$.

6. [10 pt] Calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \operatorname{sen}^2 x - 3x^3}{x + 2\operatorname{sen} x} =$

7. [30 pt] Studiare la funzione $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, definita da $f(x) = x^{-1} e^x$. In particolare determinare:

(a) gli asintoti verticali e orizzontali

(b) $f'(x) =$

(c) gli intervalli di crescita e decrescenza

(d) i punto di massimo e di minimo relativi

(e) $f''(x) =$

(f) gli intervalli di concavità e convessità

(g) i punto di flesso

Inoltre, si disegni qui sotto il grafico di f .

8. [20 pt] Calcolare i seguenti integrali (definiti o indefiniti):

(a) $\int x\sqrt{2-x^2} dx =$

(b) $\int_{-1}^0 \frac{x}{x+2} dx =$

9. [22 pt] Trovare l'area della regione di piano delimitata dalla parabola $y = x^2/4$ e dalla retta $3x - 2y - 4 = 0$.

10. [10 pt] Se $g(x, y) = \cos(3xy^3 + y)$, calcolare

(a) $\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) =$

(b) $\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) =$