

04788 - FONDAMENTI DI MATEMATICA (A-L), A.A. 2006/07
Esame scritto, 16 dicembre 2006

Nome: _____
Cognome: _____
Matricola: _____

Punteggio:

ISTRUZIONI: Su questo foglio vanno scritte **solo** le soluzioni, nello spazio dell'esercizio corrispondente, oppure, per gli esercizi che la richiedono, una dimostrazione sintetica. Riconsegnare **tutti** i fogli usati durante il compito. Nonostante il punteggio massimo ottenibile sia di 160 punti, il voto sarà espresso in 150esimi.

1. [15 pt] Sia S l'insieme delle squadre di calcio attualmente militanti in Serie A. Sia C l'insieme dei calciatori attualmente militanti in Serie A. Stabilire se le seguenti relazioni sono funzioni. Se sì, valutare se sono funzioni iniettive e/o suriettive.

(a) la relazione $C \rightarrow S$ fra un calciatore e la sua squadra d'appartenenza

(b) la relazione $C \rightarrow \mathbb{N}$ fra un calciatore e il suo numero di maglia

(c) se C_X è l'insieme dei calciatori della squadra X (dove $X \in S$), la relazione $C_X \rightarrow \mathbb{N}$ fra un calciatore e il suo numero di maglia

(d) la relazione $S \rightarrow \mathbb{N}$ fra una squadra ed il numero di scudetti vinti

(e) la relazione $S \rightarrow \mathbb{N}$ fra una squadra e l'anno in cui ha vinto l'ultimo scudetto

2. [10 pt] Scrivere la definizione corretta di $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, dove sia x_0 che ℓ sono numeri reali.

3. [10 pt] Dimostrare che, se g e h sono due funzioni continue $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tali che $g(a) > h(a)$ e $g(b) < h(b)$, allora $\exists c \in]a, b[$ tale che $g(c) = h(c)$.

4. [20 pt] Calcolare i seguenti limiti:

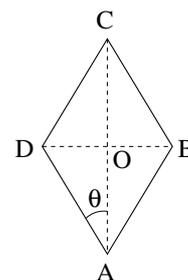
(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + 2x^3)^{1/x} =$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + x^6 - 4x}{x^3 + \log_{10}(-x)} =$

5. [10 pt] Scrivere l'equazione dell'unica retta tangente al grafico della funzione logaritmo naturale che ha pendenza 1.
6. [30 pt] Calcolare i seguenti integrali (che possono essere definiti, indefiniti o impropri):
- (a) $\int_0^4 \frac{5}{6-x} dx =$
- (b) $\int_0^1 x^2 e^x dx =$
- (c) $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \log x} dx =$
7. [35 pt] Studiare la funzione $f(x) = \log x/x$, definita sul dominio naturale. In particolare determinare:
- (a) il dominio naturale
- (b) le intersezioni con l'asse delle x
- (c) gli asintoti verticali e orizzontali
- (d) $f'(x) =$
- (e) gli intervalli di crescita e decrescenza
- (f) i punto di massimo e di minimo relativi
- (g) $f''(x) =$
- (h) gli intervalli di concavità e convessità
- (i) i punto di flesso

Inoltre, si disegni qui sotto il grafico di f .

8. [20 pt] Fra tutti i rombi di lato 1, trovare quello con la massima area.
[Suggerimento: Far variare l'angolo θ come mostrato in figura.]



9. [10 pt] Calcolare

$$\frac{d}{dx} \int_x^1 \arctan(z + z^2) dz =$$