

04788 - FONDAMENTI DI MATEMATICA (A-L), A.A. 2006/07

Esame scritto, 27 marzo 2007

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola: _____

Punteggio:

ISTRUZIONI: Su questo foglio vanno scritte **solo** le soluzioni, nello spazio dell'esercizio corrispondente, oppure, per gli esercizi che la richiedono, una dimostrazione sintetica. Riconsegnare **tutti** i fogli usati durante il compito.

Nonostante il punteggio massimo ottenibile sia di 160 punti, il voto sarà espresso in 150esimi.

1. [10 pt] Rappresentare in forma trigonometrica il numero complesso $z = 2\sqrt{3} + 2i$.
2. [10 pt] Scrivere il codominio della funzione $f(x) = \log_{10}(x^2)$, dove $D(f) =]0, 100]$.
3. [15 pt] Dimostrare che se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sono due funzioni iniettive, allora anche $g \circ f$ è iniettiva.

4. [30 pt] Calcolare i seguenti limiti:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x^2) - 1}{x^2 + x^4} =$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x + 3e^{-x}}{x^5 + e^x} =$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 - \sqrt{4x^4 + 5}) =$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x =$$

5. [15 pt] Determinare il valore, o i valori, della costante $k \in \mathbb{R}$ tali che sia continua la funzione

$$f(x) = \begin{cases} k^3 e^{kx} - k^2 \sin x - \cos(k^3 x), & x \leq 0 \\ \frac{\sin(kx)}{x} + \frac{kx^3 - x}{k^2 x^2 + x}, & x > 0 \end{cases}$$

6. [15 pt] Vero o falso: Se f è una funzione definita in un intorno di 0 e tale che $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$ allora la derivata in 0 esiste e vale $f'(0) = 0$. Motivare la risposta con una breve spiegazione.

7. [35 pt] Studiare la funzione $f(x) = e^{1/x}$, definita sul dominio naturale. In particolare determinare:
- (a) il dominio naturale
 - (b) gli asintoti verticali e orizzontali
 - (c) $f'(x) =$
 - (d) gli intervalli di crescita e decrescenza
 - (e) i punto di massimo e di minimo relativi
 - (f) $f''(x) =$
 - (g) gli intervalli di convessità e concavità
 - (h) i punti di flesso

Inoltre, si disegni qui sotto il grafico di f .

8. [15 pt] Scrivere l'enunciato del Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale [sia la parte riguardante la cosiddetta funzione integrale di f che la parte riguardante il calcolo dell'integrale definito di f .]

Usare tale teorema per calcolare

$$\frac{d}{dx} \int_1^x \arctan(t + t^2) dt =$$

9. [15 pt] Calcolare i seguenti integrali (che possono essere definiti, indefiniti o impropri):

(a) $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx =$

(b) $\int x^3 \ln x dx =$