04788 - FONDAMENTI DI MATEMATICA (A-L)

A.A. 2006/07

Esercizi di ripasso, foglio n. 3

1. **(Esercizio importante anche come teoria)** Dimostrare che, se f è differenziabile in $x_0 \in D(f)$, la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ ha equazione

$$y - f(x_0) = f'(x_0)[x - x_0] \quad \Longleftrightarrow \quad y = f'(x_0)x + [f(x_0) - f'(x_0)x_0],$$

dove, come si vede, $x_0, f(x_0), f'(x_0)$ sono costanti e x, y sono le coordinate (variabili) nel piano cartesiano.

2. Usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale, calcolare le seguenti derivate:

(a) $f'(1)$, ove $f(x) = x^3$

(b) $f'(2)$, ove $f(x) = \sqrt{x}$

(c) $f'(0)$, ove $f(x) = \tan x$

3. Calcolare le derivate (intese come funzioni derivate) delle seguenti funzioni:

(a) $f(x) = \ln(x^4 + 1)$

(b) $f(x) = \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}$

(c) $f(x) = xe^{x^2}$

(d) $f(x) = \frac{1}{\log_{10} x}$

(e) $f(x) = \sin(\ln(x^2))$

(f) $f(x) = 2^{\cos x}$

(g) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$

(h) $f(x) = x^2 e^x \sin x$

(i) $f(x) = \exp(\ln(x^2))$

4. Vero o falso: assumendo f derivabile ovunque, se f ha derivata nulla in x_0 , allora x_0 è un punto di massimo o di minimo relativo.

5. Vero o falso: nel punto di massimo locale di una funzione differenziabile, la derivata prima si annulla.

6. Calcolare le derivate prima e seconda delle seguenti funzioni:

(a) $f(x) = \exp(x^3)$

(b) $f(x) = \log_3 x$

(c) $f(x) = \tan(2x)$

7. Calcolare la derivata di ordine 100 della funzione seno. [Suggerimento: Si cominci con la derivata prima, poi seconda, poi terza, ecc. ecc., e si intuisca come vanno le cose.]

8. Si consideri una striscia di strada ove la posizione sia indicata con la variabile p (per esempio, p può rappresentare la distanza in km da un certo punto fissato O ; p sarà preso positivo o negativo a seconda che il punto considerato stia da una parte o dall'altra di O). Se t è la variabile che misura il tempo, per esempio in ore, la posizione di un'auto sulla strada può essere descritta da una funzione $p(t)$. Si assuma che $p(t)$ sia derivabile. Supponendo che al tempo t_0 e al tempo $t_1 > t_0$ l'auto si trovi nella stessa posizione, dimostrare che c'è un tempo intermedio fra t_0 e t_1 in cui la velocità dell'auto è nulla.

9. Trovare il massimo ed il minimo delle seguenti funzioni negli intervalli indicati:

(a) $f(x) = x^2$, su $[1, 2]$

(b) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$, su $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$

(c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$, su $\left[-\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right]$

10. Il consumo orario di una certa automobile, in funzione della sua velocità v , è dato da

$$C_h(v) = 200\sqrt{v} + \frac{v^2}{10},$$

dove C_h è misurato in litri all'ora (l/h) e v in chilometri all'ora (km/h). Determinare la velocità $\bar{v}$ che minimizza il consumo al kilometro $C_{km}(v)$, essendo quest'ultimo misurato in l/km.

[Suggerimento per ricavare la funzione C_{km} : si supponga, tanto per fissare le idee, che in una certa ora l'auto abbia tenuto una velocità costante v . In quell'ora il mezzo ha consumato $C_h(v)$ litri e ha percorso v kilometri. Quindi, quanti litri al kilometro ha consumato?]

11. Studiare le seguenti funzioni, disegnandone poi il grafico:

(a) $f(x) = x e^x$

(b) $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$

(c) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

(d) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$, definita su $D(f) = [0, 2\pi]$

[Per la derivata seconda potrebbe essere conveniente ricordarsi le formule di duplicazione, cioè le formule per $\operatorname{sen}(2x)$ e $\operatorname{cos}(2x)$.]