

15578 - MATEMATICA II, A.A. 2006/07

Esame scritto, 8 gennaio 2008

Nome: _____
 Cognome: _____
 Matricola: _____

Punteggio:

--

ISTRUZIONI: Su questo foglio vanno scritte **tutte le soluzioni ottenute e solo quelle**, nello spazio dell'esercizio corrispondente (**n.b.:** una soluzione può anche essere un grafico, per esempio, o una dimostrazione sintetica, a seconda degli esercizi). Riconsegnare **tutti** i fogli usati durante il compito.

Nonostante il punteggio massimo ottenibile sia di 160 punti, il voto sarà espresso in 150esimi.

1. [25 pt] Determinare la convergenza o meno dei seguenti integrali impropri. Nel caso in cui l'integrale sia calcolabile, fornirne il valore.

(a) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(2x+1)^4} dx$

(b) $\int_0^3 \frac{1+x}{x-x^3} dx$

(c) $\int_{-\infty}^0 e^{3x^3} dx$

2. [20 pt] Basandosi (per esempio) sulla conoscenza di serie di potenze notevoli, scrivere le serie di potenze, centrate in $x_0 = 0$, relative a ciascuna delle seguenti funzioni. Per ognuna di esse, determinare anche il raggio di convergenza r .

(a) $f(x) = x^2 e^{2x}$

(b) $f(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$

3. [25 pt] Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 - y^2} =$

(b) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{1}{x^2 y^2 z} =$

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1}{x^2 y^2 - x^4 y^4} =$

[Suggerimento per (c): Quale dei due termini al denominatore conta di più?]

4. [15 pt] In una certa località di montagna, la quota sul livello del mare (cioè l'altezza) di un punto di coordinate planari (cioè orizzontali) (x, y) è data da $z = 1000 - 5x^2 - 3y^4 + xy^2$. Supponiamo che un alpinista si trovi nel punto di coordinate planari $(x_0, y_0) = (1, 1)$ (cioè nel punto di coordinate spaziali $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 993)$). In che direzione planare $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ (con $\|\vec{u}\| = 1$) deve muoversi l'alpinista per salire la montagna il più velocemente possibile? [In altre parole, qual'è la direzione di massima pendenza nel punto (x_0, y_0) ?]

5. [20 pt] Calcolare il volume del solido di \mathbb{R}^3 compreso fra i piani verticali $x = 0$, $y = 0$, $x = 2\pi$, $y = \pi$, e i grafici delle funzioni $f(x, y) = 1 + xy^2$, $g(x, y) = \sin x$.

6. [15 pt] Calcolare $\int_{\mathbb{R}^2} x^2 e^{-x^2-y^2} dx dy$. [Suggerimento: $\cos^2 \varphi = \frac{1 + \cos(2\varphi)}{2}$].

7. [15 pt] Risolvere l'equazione differenziale $\frac{dy}{dx} + x^3 y - 2x^3 = 0$.

8. [25 pt] Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 9y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$