

# 15578 - MATEMATICA II, A.A. 2006/07

Esame scritto, 19 giugno 2007

Nome: \_\_\_\_\_  
Cognome: \_\_\_\_\_  
Matricola: \_\_\_\_\_

Punteggio:

**ISTRUZIONI:** Su questo foglio vanno scritte **solo** le soluzioni, nello spazio dell'esercizio corrispondente (**n.b.:** una soluzione può anche essere un grafico, per esempio, o una dimostrazione sintetica, a seconda degli esercizi). Riconsegnare **tutti** i fogli usati durante il compito.

Nonostante il punteggio massimo ottenibile sia di 160 punti, il voto sarà espresso in 150esimi.

1. [30 pt] Determinare la convergenza o meno dei seguenti integrali impropri:

(a)  $\int_0^{+\infty} x e^{-3x} dx$

(b)  $\int_0^2 (2x + 4x^3 + x^4)^{-1/3} dx$

(c)  $\int_{-\infty}^{-3} e^{x^3} (\cos x + x) dx$

2. [20 pt] Stabilire se le seguenti serie convergono assolutamente, condizionalmente, oppure non convergono:

(a)  $\sum_{n=4}^{\infty} (-1)^n \frac{n!}{n^n}$

(b)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{\sqrt{n+3}}$

3. [15 pt] Determinare l'intervallo di convergenza della serie  $\sum_{m=0}^{\infty} (m+1) x^m$ .

Sommare tale serie, cioè trovarne il limite come funzione di  $x$  nell'intervallo di convergenza.

4. [10 pt] Sia  $A \subset \mathbb{R}^2$  l'unione di tutte le rette  $x = 1/n$ , per  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Fare un disegno approssimativo di  $A$ .

Determinare l'insieme dei punti di accumulazione di  $A$ .

5. [20 pt] Scrivere l'equazione  $p(x, y)$  del piano tangente al grafico di  $f(x, y) = e^{x^2y}$  nel punto  $(-1, 1)$ .

6. [15 pt] Sia  $\varphi(u) = e^{-2u}$  e  $f(x, y, z, t) = xyz^3t^2 + \cos(zt)$ . La funzione  $\varphi \circ f$  è una funzione  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Determinare  $m, n$ .

Scrivere il differenziale della  $\varphi \circ f$  in un punto generico.

7. [15 pt] Se  $D$  è la regione limitata del piano compresa fra le curve  $y = |x|$  e  $x^2 + y^2 = 4$ , calcolare

$$\int_D (x^2y + y^3) dx dy =$$

8. [15 pt] Trovare la soluzione generale dell'equazione differenziale  $y'' - 6y' + 10y = 0$ .

9. [20 pt] Risolvere il seguente problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y' = -x^2y^2 - y^2 \\ y(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$