

15578 - MATEMATICA II, A.A. 2006/07

Esame scritto, 3 luglio 2007

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola: _____

Punteggio:

--

ISTRUZIONI: Su questo foglio vanno scritte **solo** le soluzioni, nello spazio dell'esercizio corrispondente (**n.b.:** una soluzione può anche essere un grafico, per esempio, o una dimostrazione sintetica, a seconda degli esercizi). Riconsegnare **tutti** i fogli usati durante il compito.

Nonostante il punteggio massimo ottenibile sia di 160 punti, il voto sarà espresso in 150esimi.

1. [20 pt] Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x^2 - y^2}{x - y} =$

(b) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{1}{x^2 y^2 z^2} =$

2. [20 pt] Stabilire se le seguenti serie convergono o meno:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n 2^n}{(2n)!}$

(b) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k - k^3}$

3. [20 pt] Siano $\vec{v}$ e $\vec{w}$ due vettori di $\mathbb{R}^2$ che formano un angolo θ fra di loro.

Scrivere la formula che lega $\|\vec{v}\|$ a $\vec{v} \cdot \vec{v}$.

Scrivere la formula che lega θ al prodotto scalare e/o alle norme dei due vettori.

Usare le formule scritte sopra, insieme alla linearità del prodotto scalare rispetto a ciascuno dei fattori, per risolvere il seguente quesito:

Dati due vettori unitari $\vec{u}, \vec{s} \in \mathbb{R}^2$, i quali formano un angolo di $\pi/3$ fra di loro, qual'è la lunghezza di $\vec{u} + \vec{s}$?

4. [15 pt] Trovare tutti i punti critici della $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$.

5. **[15 pt]** Sia R il rettangolo $[a, b] \times [c, d]$ e $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione il cui valore assoluto è integrabile su R . Mostrare che, se f si fattorizza come $f(x, y) = g(x)h(y)$, allora

$$\int_R f(x, y) \, dx dy = \int_R g(x)h(y) \, dx dy = \int_a^b g(x) \, dx \cdot \int_c^d h(y) \, dy.$$

6. **[25 pt]** Nello spazio (x, y, z) , trovare il volume del solido delimitato dalle seguenti superfici: il piano (x, z) ; il piano (y, z) ; il piano verticale di equazione $x + y = 1$; la superficie di equazione $z = x^2$; il piano di equazione $z = -2y$.

7. **[20 pt]** Trovare la soluzione generale dell'equazione lineare omogenea $y^{(4)} - 4y = 0$.

Trovare la soluzione generale dell'equazione lineare non omogenea $y^{(4)} - 4y = 2$.

8. **[25 pt]** Risolvere il seguente problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y' = -\frac{2y}{x} + 4x \\ y(1) = 3 \end{cases}$$