15578 - MATEMATICA II, A.A. 2006/07

Esercizi del corso, foglio n. 3

Serie di potenze

1. Determinare l'intervallo di convergenza delle seguenti serie di potenze. Per ciascuna di esse, poi, dire qual è il raggio di convergenza e l'intervallo aperto di convergenza (altrimenti detto 'interno dell'intervallo convergenza').

   (a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2n^4\,(x-3)^n$

   (b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sqrt{5^n}}{(2n)!}\,(x+\sqrt{2})^n$

   (c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{(3n)!}\,x^n$

   (d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\log_{10} n}\,(x-1)^n$

   (e) $\displaystyle\sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-4)^n}{n^2-n}\,x^n$

2. Calcolare, sotto forma di serie di potenze, le seguenti derivate o integrali (definiti o indefiniti). Per ciascun conto, dire per quali x esso è valido.

   (a) $\displaystyle\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n^2}$

   (b) $\displaystyle\int \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{n^2+n}\,x^n\right) dx$

   (c) $\displaystyle\frac{d^2}{dx^2}\sum_{n=2}^{\infty} (\ln n)(x+\sqrt{3})^n$

   (d) $\displaystyle\int_0^2 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{4}\right)^n\right) dx$

   (e) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x}\,dx$

   (f) $\displaystyle\frac{d}{dx}\,e^{2x}$

   (g) $\displaystyle\frac{d}{dx}\,\sin x$

3. Calcolare, sotto forma di serie di potenze, le seguenti derivate o integrali, senza specificare l'insieme delle x per cui il calcolo è legittimo.

   (a) $\displaystyle\int_{1/2}^{3/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty}(x-1)^{2n}\right) dx$

   (b) $\displaystyle\frac{d^2}{dx^2}\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$

4. Tramite opportune sostituzioni e/o aggiustamenti algebrici, esprimere le seguenti funzioni come serie di potenze. Per ciascuna di esse determinare inoltre l'intervallo di convergenza.

   Es.: $\dfrac{x^2}{1+x} = x^2 \dfrac{1}{1-(-x)} = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+2} = \sum_{m=2}^{\infty} (-1)^m x^m$, *converge in* $]-1,1[$.

   (a) $(1-x^2)^{-1}$

   (b) $e^{3(x-2)}$

   (c) $x\cos(x-\pi)$ *[Se fosse* $(x-\pi)\cos(x-\pi)$ *sarebbe più facile. Allora cosa si può fare?]*

   (d) $e^{x^2} - \cos x$

   (e) $\dfrac{2}{(1-x)^3}$ *[Derivare* $f(x) = (1-x)^{-1}$ *un numero sufficiente di volte]*

   (f) $\dfrac{1}{(1-x^2)^3}$ *[Utilizzare l'esercizio precedente]*

   (g) $-\ln(1-x)$ *[Serie nota]*

   (h) $\ln(1+x)$

   (i) $\dfrac{1}{x}$ *[Notare che* $x = 1 + (x-1)$*]*

5. Sommare le seguenti serie di potenze (cioè trovarne il limite per ogni x tale che la serie converge). Queste serie sono riconducibili, tramite derivazione, integrazione o manipolazioni algebriche, a serie note.

   (a) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$ *[Confrontare con l'esercizio precedente]*

   (c) $\sum_{n=0}^{\infty} n\, x^{n-1}$

   (d) $\sum_{n=0}^{\infty} n\, x^n$

   (e) $\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, x^{n-2}$

   (f) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$ *[Notare che* $n^2x^n = (n^2-n)x^n + nx^n$ *e confrontare con gli esercizi precedenti]*

   (g) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2^n}{n!}\, x^n$

   (h) $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\dfrac{2^{2n+1}}{3^{n+2}}}\, \dfrac{x^n}{n!}$

   (i) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{2n+2}}{(2n+1)!}$

   (j) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{x^{4n}}{(2n)!}$