15578 - MATEMATICA II, A.A. 2006/07
Esercizi del corso, foglio n. 4

n-uple ordinate, punti, vettori, intorni in $\mathbb{R}^n$

1. Dimostrare che l'operazione di prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$ è lineare, cioè, $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ e $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2) \cdot \vec{w} = a_1\vec{v}_1 \cdot \vec{w} + a_2\vec{v}_2 \cdot \vec{w}$

2. Calcolare la distanza fra i seguenti punti di $\mathbb{R}^3$: $P = (1, 2, -1)$ e $Q = (0, 5, 1)$.

3. Nel piano $\mathbb{R}^2$, qual è il punto P sulla retta $y = x - 1$ che ha minima distanza da $Q = (0, 7)$? Qual'è questa distanza minima?

4. In $\mathbb{R}^3$ trovare un vettore $\vec{v}$ ortogonale a $\vec{w} = (1, -2, 0)$ e a $\vec{s} = (0, 1, 1)$.

5. Sul piano cartesiano si tracci la circonferenza unitaria. Si traccino poi tre rette a caso passanti per l'origine e si indichino con $P_1, P_2, \ldots, P_6$ i sei risultanti punti di intersezione con la circonferenza unitaria. Si dimostri che, interpretando i punti come coppie ordinate, si ha $P_1 + P_2 + \ldots + P_6 = 0$.

6. Si dice che due vettori non nulli $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ hanno la stessa direzione (e verso) se l'uno è multiplo dell'altro, con costante positiva; cioè se $\exists c > 0$ tale che $\vec{v} = c\vec{w}$. (Questo fatto è geometricamente ovvio in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, ma in più alta dimensione dobbiamo <u>definire</u> questo concetto, tramite la definizione appena data, perché non possiamo fare appello a costruzioni visive.)

   Dimostrare che se $\vec{v}, \vec{w}$ hanno la stessa direzione (e verso), allora $\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\|$.

7. Scrivere il vettore $\vec{u} \in \mathbb{R}^4$ che ha la stessa direzione (e verso) di $\vec{v} = (1, -4, 0, 2\sqrt{2})$, ma norma unitaria (cioè uguale ad 1).

8. [**Più difficile degli altri**] Mostrare che, dati due vettori $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$, vale $\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\| \cos\theta$, dove θ è l'angolo compreso fra i due vettori.

9. Dire se i seguenti sottinsiemi di $\mathbb{R}^n$ (con n che varia da domanda a domanda) sono aperti, chiusi, o nessuno dei due:

   (a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x - 2\}$
   (b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 2, |y| \leq 1\}$
   (c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x - 3| < 2, |y - 2| \leq 1\}$
   (d) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 < x^2 + y^2 + z^2 < 4\}$
   (e) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 < 1, z = 0\}$

10. Dimostrare che l'unione di due insiemi aperti è un insieme aperto.

11. Dimostrare che l'interserzione di due insiemi aperti è un insieme aperto.

12. Usare gli esercizi precedenti per dimostrare che sia l'unione che l'intersezione di due insiemi chiusi sono insiemi chiusi.

13. In $\mathbb{R}^2$, determinare l'insieme dei punti di accumulazione di $\mathbb{Q}^2 = \{(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2 \mid r_1, r_2 \in \mathbb{Q}\}$.

14. In $\mathbb{R}^3$, determinare l'insieme dei punti di accumulazione di $U((0, 0, 0), 1) \setminus \{(0, 0, 0)\}$, cioè la sfera aperta di centro l'origine, raggio 1, privata dell'origine.

15. [**Più difficile degli altri**] Dato $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si ottenga l'insieme B togliendo da A un numero finito di punti. Dimostrare che A e B hanno gli stessi punti di accumulazione.