15578 - MATEMATICA II, A.A. 2006/07
Esercizi del corso, foglio n. 6

Differenziabilità

1. Date le seguenti funzioni a due o più variabili, calcolare le derivate parziali indicate:

   (a) $f(x,y) = x^2 + \tan(xy)$,

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \ , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$$

   (b) $f(x,y,z) = \sin x + x \log_{10}(y^2 + z)$,

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \ , \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) =$$

   (c) $f(x,y) = e^{xy^2}$,

   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \ , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) =$$

2. Spiegare perché la f è differenziabile nel punto P indicato. Inoltre trovare df_P, il differenziale della f in P:

   (a) $f(x,y) = x^2 + xy^4; \quad P = (1,2)$

   (b) $f(x,y,z) = \ln(x - 3y^3 + z^2); \quad P = (1,0,1)$

   (c) $f(x,y,z) = \sin(xyz) + \tan(x^3 + y - z); \quad P = (1,\pi,1)$

   (d) $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \|\vec{x}\|; \quad P = (1,1,\ldots,1)$

   (e) $f(x,y) = e^{x^2\sqrt{y}}; \quad P = (x,y)$, con $y > 0$ *[cioè trovare il differenziale in un punto generico]*

3. [**Ripasso di Matematica I**] Per le seguenti funzioni di una variabile, scrivere l'equazione $y = \ell(x)$ della retta tangente al grafico di f nel punto x_0 indicato. Poi, magari con l'ausilio di una calcolatrice, valutare sia la funzione $f(x)$ che la $\ell(x)$ nei punti x_1, x_2, ecc. indicati.

   (a) $f(x) = \sin x; \quad x_0 = 0; \quad x_1 = \pi/6,\ x_2 = 0.1$

   (b) $f(x) = \sqrt{x}; \quad x_0 = 4; \quad x_1 = 4.1,\ x_2 = 4.01,\ x_3 = 4.001$

   (c) $f(x) = \ln x; \quad x_0 = 1; \quad x_1 = 0.8,\ x_2 = 0.98,\ x_3 = 0.998$

4. Per le seguenti funzioni di due variabili, scrivere l'equazione $z = p(x,y)$ del piano tangente al grafico di f nel punto (x_0, y_0) indicato. Poi, magari con l'ausilio di una calcolatrice, valutare sia la funzione $f(x,y)$ che la $p(x,y)$ nei punti (x_i, y_i) indicati ($i \geq 1$).

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^4; \quad (x_0,y_0) = (1,1); \quad (x_1,y_1) = (1.1,1),\ (x_2,y_2) = (1,1.1),\ (x_3,y_3) = (1.01,1.01)$

   (b) $f(x,y) = e^{xy^2}; \quad (x_0,y_0) = (1,0); \quad (x_1,y_1) = (1,-0.1),\ (x_2,y_2) = (0.9,0)$

   (c) $f(x,y) = 2x - 3y + 1; \quad (x_0,y_0) = (2,1); \quad (x_1,y_1) = (2.1,0.9),\ (x_2,y_2) = (2.01,0.99),\ (x_3,y_3) = (2.001,0.999)$

   (d) $f(x,y) = \arctan(x^3 y); \quad (x_0,y_0) = (1,-1); \quad (x_1,y_1) = (1,-1.2),\ (x_2,y_2) = (1,-1.02)$

5. Calcolare $\vec{\nabla} f(P)$, cioè il gradiente della f nel punto P.

   (a) $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y}{y + 1}; \quad P = (1, 0)$

   (b) $f(x, y, z) = \cos(x + y^2 + \pi z^3) + z \tan(x^2 - y); \quad P = (0, 0, 1)$

   (c) $f(x, y, z, t) = x^2 y^3 z t^{-2}; \quad P = (\sqrt{3}, -1, 3, \sqrt[3]{2})$

   (d) $f(x, y, z) = \dfrac{2}{(x + y + z)^3}; \quad P = (x, y, z)$

   (e) $f(x, y, z) = \dfrac{\arctan(x^4 y + x)}{z^2 + 1}; \quad P = (x, y, z)$