

Derivate direzionali, funzioni composte, punti critici

1. Calcolare la derivata direzionale di f in P , nella direzione di $\vec{v}$:

(a) $f(x, y) = \frac{x^2 + y}{y + 1}$; $P = (1, 0)$; $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

(b) $f(x, y) = e^{xy} + 2x$, $P = (1, 0)$; $\vec{v} = (-1, 2)$

(c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$; $P = (1, 1, 1)$; $\vec{v} = (0, 2, -2)$

2. Calcolare le seguenti derivate direzionali di $f(x, y) = x^2 + xy^4$ nel punto $P = (1, 2)$:

(a) nella direzione del segmento orientato $\vec{PQ}$, dove $Q = (2, 1)$,

(b) nella direzione da P verso l'origine.

3. Trovare il vettore unitario $\vec{u}$ tale che sia massima la derivata direzionale $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P)$ nel punto P . Calcolare tale derivata direzionale.

(a) $f(x, y) = \sin(2x - y)$; $P = (0, 0)$

(b) $f(x, y) = \frac{1}{x^2y - x}$; $P = (1, 2)$

(c) $f(x, y, z) = \frac{2}{(x + y + z)^3}$; $P = (2, 1, -1)$

(d) $f(x, y) = \cos(x^2 + 2y^2)$; $P = \left(\frac{\sqrt{\pi}}{3}, \frac{\sqrt{\pi}}{3}\right)$

4. Scrivere il differenziale della $\varphi \circ f$ in un punto generico, dove la funzione a più variabili f e la funzione ad una variabile φ sono date da:

(a) $f(x, y, z) = -3x + y - 2z$; $\varphi(t) = t^4$

(b) $f(x, y) = \sin x + e^{xy}$; $\varphi(t) = \ln t$

(c) $f(x, y) = e^x + 2xy + y^3$; $\varphi(t) = \arctan t$

(d) $f(x, y, z) = \frac{x + y}{z}$; $\varphi(t) = t^2 + \sin t$

5. Scrivere il differenziale (in un punto generico) delle seguenti funzioni:

(a) $f(x, y) = \ln(\sin x + e^{xy})$

(b) $f(x, y) = \arctan(e^x + 2xy + y^3)$

(c) $f(x, y, z) = \sqrt[3]{\frac{xy + z}{1 + z^3}}$

(d) $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \exp\left(\sum_{k=1}^n x_k^k\right)$

6. Calcolare la derivata di $F(t) = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t))$, essendo le funzioni f e $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ date da:
- (a) $f(x, y) = e^{xy}; \quad \varphi_1(t) = \sin t; \quad \varphi_2(t) = t^2$
 - (b) $f(x, y, z) = x^2 + y + z^4; \quad \varphi_1(t) = \ln t; \quad \varphi_2(t) = 1 + t^2; \quad \varphi_3(t) = t^3$
 - (c) $f(x, y, z) = xyz^2; \quad \varphi_1(t) = t^6; \quad \varphi_2(t) = e^{t^2}; \quad \varphi_3(t) = t^{-3}$
 - (d) $f(x, y) = x^2y + xy^2; \quad \varphi_1(t) = \sin t; \quad \varphi_2(t) = \tan t$
7. Determinare tutti i punti critici delle seguenti funzioni:
- (a) $f(x, y) = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$
 - (b) $f(x, y, z) = 4 - 2x^2 - 3y^2 - z^2$
 - (c) $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + y^3$
 - (d) $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^3$
 - (e) $f(x, y) = \sin x(e^y + e^{-y})$
 - (f) $f(x, y, z) = x^4 - 2x^3 + y^2$ *[Non è un errore: f non dipende esplicitamente da z .]*
 - (g) $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{-x^2 - y^2}$
8. In $\mathbb{R}^3$ si chiami σ il piano di equazione $z = x + 2y + 1$ e Q il punto $(1, 2, -1)$. Si calcoli la minima distanza di σ da Q , cioè la minima distanza $\overline{PQ}$ al variare del punto $P = (x, y, x + 2y + 1)$ in σ .
9. Determinare l'unico punto critico di $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2$ e dedurre se si tratta di un punto di massimo relativo, minimo relativo o sella.
10. Trovare i cinque punti critici di $f(x, y) = \sin x \sin y$, supponendo la f definita sul quadrato aperto $Q = \{(x, y) \mid 0 < x < 2\pi, 0 < y < 2\pi\}$. Inoltre, ragionando sulla forma particolare di $f(x, y)$, dedurre quali di questi punti sono di massimo relativo, di minimo relativo o di sella.
11. Spiegare perché, per le seguenti funzioni, il punto critico $(0, 0)$ deve essere un punto di sella:
- (a) $f(x, y) = x^4 + y^3$
 - (b) $f(x, y) = xy$