15578 - MATEMATICA II, A.A. 2006/07
Esercizi del corso, foglio n. 8

Integrali in due variabili

1. Per i seguenti domini $D \subset \mathbb{R}^2$, si determinino le sezioni verticali $S_x(D)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, e quelle orizzontali $S_y(D)$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Tutti i domini sono considerati chiusi.

   (a) $D = [a, b] \times [c, d]$

   (b) $D = \overline{U}((0,0), r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\} \quad (r > 0)$

   (c) $D = \overline{U}((1,1), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$

   (d) D è il triangolo di vertici $(0,0)$; $(2,2)$; $(0,2)$

   (e) D è il triangolo di vertici $(0,0)$; $(2,2)$; $(0,1)$

   (f) D è la regione del I quadrante compresa fra le iperboli $xy = 1$ e $xy = 4$

   (g) D è la regione limitata compresa fra le curve $x = |y|$ e $x = y^2$

   (h) D è il semipiano al di sopra dell'asse x

   (i) D è il semipiano a destra della retta $y = 3x$

2. Calcolare $\displaystyle\int_D f(x, y)\, dxdy$, dove:

   (a) $f(x, y) = xy(x + y)$; $\quad D = [0,1]^2 = [0,1] \times [0,1]$

   (b) $f(x, y) = \sqrt{y} + x - 3xy^2$; $\quad D = [0,1] \times [1,3]$

   (c) $f(x, y) = \sin(x + y)$; $\quad D = [0, \pi/2]^2 = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$

   (d) $f(x, y) = x\cos(x + y)$; $\quad D$ è il triangolo di vertici $(0,0)$; $(\pi, 0)$; (π, π)

   (e) $f(x, y) = e^x$; $\quad D$ è il triangolo di vertici $(0,0)$; $(1,0)$; $(\frac{1}{2}, 1)$

   (f) $f(x, y) = x^3 y$; $\quad D$ è la regione limitata del piano (x, y) compresa fra le curve $y = x^2$ e $y = (1-x)^2$

   (g) $f(x, y) = y^2 \cos x$; $\quad D$ è la regione del piano (x, y) compresa fra la curva $y = \sin x$ e il segmento $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dell'asse x

   (h) $f(x, y) = \sqrt{x + 2y + 1}$; $\quad D$ è la regione limitata del piano (x, y) compresa fra le curve $x = 2y$ e $x = y^2$

   (i) $f(x, y) = \dfrac{x}{y}$; $\quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq y \leq 2;\ y \leq x \leq y^2\}$

   (j) $f(x, y) = e^{x+y}$; $\quad D$ è il quadrato di vertici $(1,0)$; $(0,1)$; $(-1,0)$; $(0,-1)$

   (k) $f(x, y) = \dfrac{1}{(x+2)^2 (y+1)^3}$; $\quad D$ è il I quadrante

   (l) $f(x, y) = e^{-xy^2}$; $\quad D = [0, +\infty[\times [1, +\infty[$

   (m) $f(x, y) = e^{-x-y}$; $\quad D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 3;\ x \geq y\}$

3. Si consideri l'integrale doppio
$$I = \int_{-1}^{1} \int_{|y|}^{1} e^{-x^2} dx\ dy.$$
Questo corrisponde a $I = \int_D e^{-x^2}\, dxdy$ per una certa regione del piano D. Si disegni D. Inoltre, invertendo l'ordine di integrazione (cioè usando sezioni verticali invece che orizzontali) si calcoli I.

4. Usando le coordinate polari, calcolare $\int_D f(x,y)\,dxdy$, dove:

   (a) $f(x,y) = 1$; $\quad D = \overline{U}((0,0), r) \quad (r > 0)$
   (b) $f(x,y) = 3 - 3\sqrt{x^2+y^2}$; $\quad D = \overline{U}((0,0), 1)$ è il disco unitario chiuso
   (c) $f(x,y) = x^2$; $\quad D = \overline{U}((0,0), 2) \setminus U((0,0), 1)$ è la corona circolare centrata nell'origine di raggio interno 1 e raggio esterno 2
   (d) $f(x,y) = x^2y + y^3$; $\quad D$ è la regione limitata del piano compresa fra le curve $y = |x|$ e $x^2 + y^2 = 4$
   (e) $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$; $\quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le y \le x\}$
   (f) $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$; $\quad D = \mathbb{R}^2$
   (g) $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{(x^2+y^2)^4}$; $\quad D$ è il I quadrante

5. Riscrivere l'integrale doppio

$$I = \int_{-3}^{3} \int_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \sin(x^2+y^2)\,dy\ \ dx$$

   come un integrale su un dominio D nel piano. Poi calcolare I tramite trasformazione in coordinate polari.

6. Calcolare il volume dei seguenti solidi $\mathcal{S}$:

   (a) $\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ y^2 \le z \le 1 + \sin(\pi x)\}$
   (b) $\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2 - x,\ x + y \le z \le 10 - x + 2y\}$
   (c) $\mathcal{S}$ è il tronco di parallelepipedo limitato dai piani $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ e $z = -x - 2y$
   (d) $\mathcal{S}$ è il solido illimitato compreso fra i grafici di $g(x,y) = (1+x^2)^{-1}(1+y^2)^{-1}$ e $f(x,y) = -(x^2+y^2)^{-2}$
   (e) $\mathcal{S}$ è il solido illimitato compreso fra i grafici di $g(x,y) = (1+x^2)^{-1}(1+y^2)^{-1}$ e $f(x,y) = (1+4x^2)^{-1}(1+4y^2)^{-1}$
   (f) $\mathcal{S}$ è il cilindro di raggio $r > 0$ e altezza $h > 0$ *[Suggerimento: Posizionare il cilindro in modo che il disco di base giaccia sul piano (x,y) con centro nell'origine.]*
   (g) $\mathcal{S}$ è la sfera di raggio $r > 0$ *[Suggerimento: Considerare la sfera centrata nell'origine e calcolare il volume del solo emisfero superiore.]*
   (h) $\mathcal{S} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 0 \le x^2+y^2 \le r^2,\ 0 \le z \le h - \frac{h}{r}\sqrt{x^2+y^2}\right\}$ $\quad (r, h > 0)$ *[Di che solido si tratta?]*

7. Sia R il rettangolo $[a,b] \times [c,d]$ e $f : R \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione il cui valore assoluto è integrabile su R. Mostrare che, se f si fattorizza come $f(x,y) = g(x)h(y)$, allora

$$\int_R f(x,y)\,dxdy = \int_R g(x)h(y)\,dxdy = \int_a^b g(x)\,dx \cdot \int_c^d h(y)\,dy.$$