

# 04788 - FONDAMENTI DI MATEMATICA (A-L)

A.A. 2007/08

## Esercizi di ripasso, foglio n. 1

1. Determinare:

(a)  $\inf \left\{ \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$

(b)  $\sup \left\{ \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$

(c)  $\max [0, 4[$

(d)  $\max ([0, 4[ \cup \{5\})$

(e)  $\sup \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 < 2\}$

2. L'età di una persona, in anni, alla mezzanotte del 31 dicembre 2006, è una funzione dall'insieme delle persone viventi all'insieme dei numeri naturali  $\mathbb{N}$ ?

3. La relazione che associa ad ogni persona il suo numero di cellulare è una funzione  $P \rightarrow C$ , dove  $P$  è l'insieme della persone e  $C$  è l'insieme dei numeri naturali di 10 cifre?

La relazione che associa ad ogni numero naturale  $n$  di 10 cifre la persona che possiede il cellulare col numero  $n$  è una funzione  $C \rightarrow P$ ?

*[Attenzione alla seconda domanda!]*

4. Determinare quali di queste relazioni sono funzioni.

(a) la relazione, fra l'insieme dei comuni italiani e l'insieme delle persone residenti in Italia, che lega un comune a ciascuno dei suoi residenti;

(b) la relazione, fra l'insieme delle persone residenti in Italia e l'insieme dei comuni italiani, che lega ciascuna persona al proprio comune di residenza;

(c) la relazione, fra l'insieme delle persone residenti in Italia e l'insieme degli edifici presenti sul suolo italiano, che lega ciascuna persona alla propria casa di proprietà;

(d) la relazione, fra l'insieme dei cittadini italiani e l'insieme dei passaporti italiani validi, che lega ciascun cittadino al proprio passaporto;

(e) la relazione, fra l'insieme dei passaporti italiani validi e l'insieme dei cittadini italiani, che lega ciascun passaporto al proprio possessore.

5. Trovare il dominio naturale di:

(a)  $f(x) = \sqrt{3 - x - 2x^2}$

(b)  $f(x) = e^{\tan x}$

(c)  $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

(d)  $f(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{\log_3 x}$

(e)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{|\sin x|}}$

6. Trovare il codominio delle seguenti funzioni. I casi meno semplici potrebbero richiedere un minimo di studio di funzione per avere un'idea approssimativa del grafico.
- (a)  $f(x) = e^{x^2}$ , ove  $D(f) = [0, 1]$
  - (b)  $f(x) = x^3 + 1$ , ove  $D(f) = \mathbb{R}^+$
  - (c)  $f(x) = -x^2$ , ove  $D(f) = [-1, 1]$
  - (d)  $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ , ove  $D(f) = [-1, 1]$
7. La funzione  $\tan$  (cioè  $x \mapsto \tan x$ ) è crescente sul suo dominio naturale? Perché?
8. Vero o falso: se, per ogni retta orizzontale nel piano cartesiano, questa interseca il grafico di  $f$  in al più un punto, la funzione  $f$  è iniettiva.
9. Dimostrare che, se  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  è strettamente decrescente, allora  $f$  è iniettiva.
10. Dire se le seguenti funzioni sono iniettive e/o suriettive. Nel caso siano biettive, dare una formula per la funzione inversa  $x = f^{-1}(y)$  (o, con notazione più elegante,  $y = f^{-1}(x)$ ).
- (a)  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ,  $f(x) = \sqrt{x - 1}$
  - (b)  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ,  $f(x) = |x - 2|$
  - (c)  $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$
  - (d)  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow ]1, +\infty[$ ,  $f(x) = 2^{x^4}$
  - (e)  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$
11. Dimostrare che la funzione  $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$ , definita sul dominio naturale (che è...) è iniettiva. Poi, assumendo che l'insieme di arrivo sia esattamente il codominio, determinare una formula per  $f^{-1}$ .