04788 - FONDAMENTI DI MATEMATICA (A-L)
A.A. 2007/08
Esercizi di ripasso, foglio n. 2

1. Scrivere la definizione corretta di $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

2. Vero o falso: $U(x_0, r) = U^+(x_0, r) \cup U^-(x_0, r)$.

3. Calcolare i seguenti limiti *[Nota: Alcuni di questi limiti potrebbero richiedere la regola di De L'Hôpital, o considerazioni da essa derivate.]*:

   (a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{(\sin x)^2}{x}$

   (b) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 2}\right)$

   (c) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^3 + \sqrt{2}\,x + 4\sin x}{(x-2)^2}$

   (d) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{7/2} + \sqrt{x}}{5x^{10} + 4x^3 - 12}$

   (e) $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} \frac{x + e^x}{x^3 - 2x}$

   (f) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$

   (g) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \tan(x^{-1})$

   (h) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

   (i) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}$

   (j) $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} \frac{\ln x}{(x-1)^2}$

   (k) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{2x} + 4e^x - 16x^4 + 2x}{e^x + x^2}$

   (l) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{10^x}{\log_{10} x}$

   (m) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{10^x + x}{\log_{10} x + 7^x}$

   (n) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{3e^x + x^2}{\sqrt{x^2 - 2x}}$

   (o) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left(1 + x^2\right)^{1/x}$

   (p) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (1 + x)^{1/x^2}$

   (q) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (2 + x)^{1/x}$

   (r) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2^{x^2}}$

4. Vero o falso: se f è una funzione derivabile su tutto $\mathbb{R}$, allora $\max\limits_{[0,1]} f$ e $\min\limits_{[0,1]} f$ esistono.

5. Per le seguenti funzioni, stabilire i punti di discontinuità. Per ciascuno di essi calcolare il limite destro e il limite sinistro.

   (a) $f(x) = \dfrac{x+1}{|x+1|}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} x^2+5, & x<2 \\ 5, & x=2 \\ 3^x, & x>2 \end{cases}$

   (c) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x \ln x, & 0 < x \le 1 \\ \dfrac{x-1}{x^2-1}, & x>1 \end{cases}$

   (d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

   (e) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\tan(x^2)}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$

   (f) $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ *[Attenzione!]*

6. Determinare il valore delle costanti $a, b \in \mathbb{R}$ tali che sia continua la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x+1}, & x<0 \\ 2a, & x=0 \\ \dfrac{\sin(bx)}{x}, & x>0 \end{cases}$$

7. Dimostrare che l'equazione $x^4 + e^x - 4\cos x = 0$ ha almeno due soluzioni reali.

8. Vero o falso: se una funzione continua su $[0,10]$ è tale che $f(0)=2$ e $f(10)=1$, allora $\forall \ell \in [1,2]$ $\exists c \in [0,10]$ tale che $f(c)=\ell$.

9. **(Più difficile degli altri)** Una definizione alternativa di intervallo è la seguente: $I \subseteq \mathbb{R}$ è un intervallo se, presi tre numeri qualsiasi $x_1 < x_2 < x_3$, con $x_1, x_3 \in I$, allora anche $x_2 \in I$.

   Usare questa definizione e il Corollario di Bolzano per dimostrare la seguente affermazione: Se f è una funzione continua definita su un intervallo I, allora anche il suo codominio è un intervallo.