04788 - FONDAMENTI DI MATEMATICA (A-L)
A.A. 2007/08
Esercizi di ripasso, foglio n. 3

1. Usando la definizione di derivata come limite del rapporto incrementale, calcolare le seguenti derivate:

   (a) $f'(1)$, ove $f(x) = x^3$

   (b) $f'(2)$, ove $f(x) = \sqrt{x}$

   (c) $f'(0)$, ove $f(x) = \tan x$

   (d) $f'(x_0)$, con x_0 generico, ove $f(x) = \dfrac{1}{x}$

2. Calcolare le derivate (intese come funzioni derivate) delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x) = \ln(x^4 + 1)$

   (b) $f(x) = \dfrac{\cos x}{\cos x + \sin x}$

   (c) $f(x) = xe^{x^2}$

   (d) $f(x) = \dfrac{1}{\log_{10} x}$

   (e) $f(x) = \sin\big(\ln(x^2)\big)$

   (f) $f(x) = 2^{\cos x}$

   (g) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$

   (h) $f(x) = x^2\, e^x \sin x$

   (i) $f(x) = \exp(\ln(x^2))$

3. Vero o falso: assumendo f derivabile ovunque, se f ha derivata nulla in x_0, allora x_0 è un punto di massimo o di minimo relativo.

4. Vero o falso: nel punto di massimo locale di una funzione differenziabile, la derivata prima si annulla.

5. Calcolare le derivata prima e seconda delle seguenti funzioni:

   (a) $f(x) = \exp(x^3)$

   (b) $f(x) = \log_3 x$

   (c) $f(x) = \tan(2x)$

6. Calcolare la derivata di ordine 102 della funzione seno. *[Suggerimento: Si cominci con la derivata prima, poi seconda, poi terza, ecc. ecc., e si intuisca come vanno le cose.]*

7. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $y = \sin x$ nel punto $x = \pi/6$.

8. Il grafico della funzione $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$, definita sul dominio naturale, ha due soli punti, (x_1, y_1) e (x_2, y_2), dove la tangente al grafico è orizzontale. Trovare questi due punti.

9. Scrivere l'equazione di quella retta tangente al grafico di $f(x) = 1 - x^2$ (in un punto da determinarsi) che è parallela alla bisettrice del I e III quadrante. *[Suggerimento: Che pendenza ha una retta parallela alla bisettrice del I e III quadrante?]*

10. Si consideri una striscia di strada ove la posizione sia indicata con la variabile p (per esempio, p può rappresentare la distanza in km da un certo punto fissato O; p sarà preso positivo o negativo a seconda che il punto considerato stia da una parte o dall'altra di O). Se t è la variabile che misura il tempo, per esempio in ore, la posizione di un'auto sulla strada può essere descritta da una funzione $p(t)$. Si assuma che $p(t)$ sia derivabile. Supponendo che al tempo t_0 e al tempo $t_1 > t_0$ l'auto si trovi nella stessa posizione, dimostrare che c'è un tempo intermedio fra t_0 e t_1 in cui la velocità dell'auto è nulla.