

04788 - FONDAMENTI DI MATEMATICA (A-L)

A.A. 2007/08

Esercizi di ripasso, foglio n. 4

1. Trovare il massimo ed il minimo delle seguenti funzioni negli intervalli indicati:

(a) $f(x) = x^2$, su $[1, 2]$

(b) $f(x) = \sin^2 x$, su $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$

(c) $f(x) = 2x^3 - 3x^2$, su $\left[-\frac{1}{4}, \frac{5}{4}\right]$

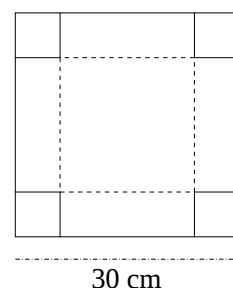
2. Si hanno a disposizione 20 m di rete da recinzione per recintare 3 lati di un orto di forma rettangolare (il quarto lato è costituito dal muro della casa). Trovare le dimensioni (lunghezza e larghezza) dell'orto che massimizzano la sua superficie, tenuto conto del vincolo dato all'inizio.
3. Il consumo orario di una certa automobile, in funzione della sua velocità v , è dato da

$$C_h(v) = 200\sqrt{v} + \frac{v^2}{10},$$

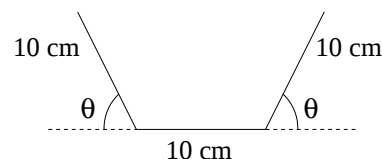
dove C_h è misurato in litri all'ora (l/h) e v in chilometri all'ora (km/h). Determinare la velocità $\bar{v}$ che minimizza il consumo al kilometro $C_{km}(v)$, essendo quest'ultimo misurato in l/km.

[Suggerimento per ricavare la funzione C_{km} : si supponga, tanto per fissare le idee, che in una certa ora l'auto abbia tenuto una velocità costante v . In quell'ora il mezzo ha consumato $C_h(v)$ litri e ha percorso v kilometri. Quindi, quanti litri al kilometro ha consumato?]

4. Dato un pezzo di cartone quadrato, di $30 \text{ cm} \times 30 \text{ cm}$, si vuole costruire una scatola senza coperchio (avente cioè solo la base e le 4 facce laterali). La costruzione avviene tagliando ed eliminando 4 quadrati agli angoli del pezzo di cartone (vedi figura) e poi "tirando su" le 4 alette che si sono formate, che verranno unite con del nastro adesivo. Determinare il massimo volume della scatola che si può costruire in questa maniera.

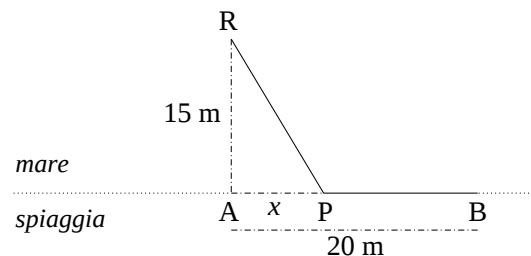


5. Quella mostrata in figura è la sezione trasversale di una grondaia. I tre segmenti di cui è composta hanno tutti lunghezza 10 cm. Determinare l'angolo θ (vedi figura) in maniera tale che la portata della grondaia sia massima.



[Suggerimento: Risulterà utile ricordare la formula per l'area del trapezio, che è $A = (B + b)h/2$, dove B è la base maggiore, b è la base minore e h è l'altezza del trapezio.]

6. Un bagnino si trova nel punto B della figura quando vede una ragazza annaspere in mare nel punto R. Per raggiungere la ragazza, il bagnino corre sulla battigia, alla velocità di $v_b = 4$ m/s, fino al punto P indicato, dopodiché nuota fino al punto R alla velocità di $v_a = 4/\sqrt{26}$ m/s. Sapendo che la distanza di R dalla spiaggia, cioè la lunghezza $\overline{AR}$, è di 15 m, mentre $\overline{AB} = 20$ m, dove va collocato il punto P in maniera da minimizzare il tempo impiegato dal bagnino per raggiungere la ragazza?



[Suggerimento: Porre $x = \overline{AP}$, come in figura.]

7. Studiare le seguenti funzioni, disegnandone poi il grafico:

(a) $f(x) = x e^x$

(b) $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x}}$

(c) $f(x) = \frac{1}{\ln x}$

(d) $f(x) = \sin^2 x$, definita su $D(f) = [0, 2\pi]$

[Per la derivata seconda potrebbe essere conveniente ricordarsi le formule di duplicazione, cioè le formule per $\sin(2x)$ e $\cos(2x)$.]