

04788 - FONDAMENTI DI MATEMATICA (A-L), A.A. 2007/08

Esame scritto, 24 giugno 2008

Nome: _____
Cognome: _____
Matricola: _____

Punteggio:

--

ISTRUZIONI: Su questo foglio vanno scritte **solo** le soluzioni, nello spazio dell'esercizio corrispondente, oppure, per gli esercizi che la richiedono, una dimostrazione sintetica. Riconsegnare **tutti** i fogli usati durante il compito. Nonostante il punteggio massimo ottenibile sia di 160 punti, il voto sarà espresso in 150esimi.

1. [10 pt] Scrivere la definizione corretta di $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$, dove sia x_0 che ℓ sono numeri reali.

2. [15 pt] Scrivere l'enunciato del Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale [sia la parte riguardante la cosiddetta funzione integrale di f che la parte riguardante il calcolo dell'integrale definito di f .]

Usare tale teorema per calcolare

$$\frac{d}{dy} \int_1^y \log(x^2 + x^3) dx =$$

3. [25 pt] Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 2x + \cos x}{x^4 + 2^x} =$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + x - e^x}{x^{3/2}} =$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\ln x}{x^2}\right) =$

4. [20 pt] Calcolare i seguenti integrali (che possono essere definiti, indefiniti o impropri):

(a) $\int x \cos x dx =$

(b) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)^4} dx =$

5. **[35 pt]** Studiare la funzione $f(x) = \arctan x^2$, definita sul dominio naturale. In particolare determinare:

- (a) gli asintoti verticali e orizzontali
- (b) $f'(x) =$
- (c) gli intervalli di crescita e decrescenza
- (d) i punti di massimo e di minimo relativi
- (e) $f''(x) =$
- (f) l'ascissa (cioè la coordinata x) di ciascun punto di flesso

Inoltre, si disegni qui sotto il grafico di f .

6. **[25 pt]** Sia $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ -2x \log x, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

- (a) Dimostrare che la f è continua.
- (b) Trovare il massimo e il minimo della f in $[0, 1]$.

7. **[20 pt]** Sia f la funzione che vale $f(x) = \sin x$ e che è definita sul dominio $[0, 2\pi]$. Determinare l'area della regione del piano compresa fra il grafico della f e la retta $y = 1/2$.

8. **[10 pt]** Calcolare le seguenti derivate parziali seconde, per $h(x, y) = \ln(x^3 + y)$:

- (a) $\frac{\partial h}{\partial x}(x, y) =$
- (b) $\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(x, y) =$