15578 - MATEMATICA II, A.A. 2007/08
Esercizi di ripasso, foglio n. 1

n-uple ordinate, punti, vettori, prodotti scalare e vettoriale

1. Se $P = (2, 3)$, $Q = (-3, 1)$, scrivere le componenti del vettore $\overrightarrow{PQ}$.

2. Calcolare la distanza fra i seguenti punti di $\mathbb{R}^3$: $P = (1, 2, -1)$ e $Q = (0, 5, 1)$.

3. Nel piano $\mathbb{R}^2$, qual è il punto P sulla retta $y = x - 1$ che ha minima distanza da $Q = (0, 7)$? Qual'è questa distanza minima?

4. In $\mathbb{R}^3$ trovare un vettore $\vec{v}$ ortogonale a $\vec{w} = (1, -2, 0)$ e a $\vec{s} = (0, 1, 1)$.

5. Dimostrare che l'operazione di prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$ è lineare, cioè, $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ e $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2) \cdot \vec{w} = a_1\vec{v}_1 \cdot \vec{w} + a_2\vec{v}_2 \cdot \vec{w}$

6. Sul piano cartesiano si tracci la circonferenza unitaria. Si traccino poi tre rette a caso passanti per l'origine e si indichino con $P_1, P_2, \ldots, P_6$ i sei risultanti punti di intersezione con la circonferenza unitaria. Si dimostri che, interpretando i punti come coppie ordinate, si ha $P_1 + P_2 + \ldots + P_6 = (0, 0)$.

7. Si dice che due vettori non nulli $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ hanno la stessa direzione e verso se l'uno è multiplo dell'altro, con costante positiva; cioè se $\exists c > 0$ tale che $\vec{v} = c\vec{w}$. (In $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, questa definizione coincide con il significato intuitivo che si attibuisce ai concetti primitivi di direzione e verso, ma in più alta dimensione possiamo solo <u>definire</u> la nozione di stessa direzione e stesso verso, perché non possiamo fare appello a costruzioni visive.)

   Dimostrare che se $\vec{v}, \vec{w}$ hanno la stessa direzione (e verso), allora $\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \, \|\vec{w}\|$.

8. Nel piano siano dati i punti $P = (2, 1)$, $Q = (1, 2)$. Determinare uno degli infiniti punti $R \neq P$ tali che $\overrightarrow{PR}$ sia ortogonale a $\overrightarrow{PQ}$.

9. Scrivere il vettore $\vec{u} \in \mathbb{R}^4$ che ha la stessa direzione (e verso) di $\vec{v} = (1, -4, 0, 2\sqrt{2})$, ma norma unitaria (cioè uguale ad 1).

10. Dimostrare che, per tutti i $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, si ha $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{v} = 0$.