15578 - MATEMATICA II, A.A. 2007/08
Esercizi di ripasso, foglio n. 6

Differenziabilità

1. Date le seguenti funzioni a due o più variabili, calcolare le derivate parziali indicate:

   (a) $f(x,y) = x^2 + \tan(xy)$,

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) =$$

   (b) $f(x,y,z) = \sin x + x\log_{10}(y^2+z)$,

   $$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \,, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) =$$

   (c) $f(x,y) = e^{xy^2}$,

   $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \,, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) =$$

   Per questa f, determinare inoltre $Hf(1,1)$, cioè l'hessiana di f nel punto $(1,1)$.

2. Spiegare perché la f è differenziabile nel punto P indicato. Inoltre trovare df_P, il differenziale della f in P:

   (a) $f(x,y) = x^2 + xy^4$; $\quad P = (1,2)$
   (b) $f(x,y,z) = \ln(x - 3y^3 + z^2)$; $\quad P = (1,0,1)$
   (c) $f(x,y,z) = \sin(xyz) + \tan(x^3 + y - z)$; $\quad P = (1,\pi,1)$
   (d) $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} = \|\vec{x}\|$; $\quad P = (1,1,\ldots,1)$

3. **[Ripasso di Matematica I]** Per le seguenti funzioni di una variabile, scrivere l'equazione $y = \ell(x)$ della retta tangente al grafico di f nel punto x_0 indicato. Poi, magari con l'ausilio di una calcolatrice, valutare sia la funzione $f(x)$ che la $\ell(x)$ nei punti x_1, x_2, ecc. indicati.

   (a) $f(x) = \sin x$; $\quad x_0 = 0$; $\quad x_1 = \pi/6$, $x_2 = 0.1$
   (b) $f(x) = \sqrt{x}$; $\quad x_0 = 4$; $\quad x_1 = 4.1$, $x_2 = 4.01$, $x_3 = 4.001$

4. Per le seguenti funzioni di due variabili, scrivere l'equazione $z = p(x,y)$ del piano tangente al grafico di f nel punto (x_0,y_0) indicato. Poi, magari con l'ausilio di una calcolatrice, valutare sia la funzione $f(x,y)$ che la $p(x,y)$ nei punti (x_i,y_i) indicati ($i \geq 1$).

   (a) $f(x,y) = x^2 + y^4$; $\quad (x_0,y_0) = (1,1)$; $\quad (x_1,y_1) = (1.1,1)$, $(x_2,y_2) = (1,1.1)$, $(x_3,y_3) = (1.01,1.01)$
   (b) $f(x,y) = e^{xy^2}$; $\quad (x_0,y_0) = (1,0)$; $\quad (x_1,y_1) = (1,-0.1)$, $(x_2,y_2) = (0.9,0)$
   (c) $f(x,y) = 2x - 3y + 1$; $\quad (x_0,y_0) = (2,1)$; $\quad (x_1,y_1) = (2.1,0.9)$, $(x_2,y_2) = (2.01,0.99)$, $(x_3,y_3) = (2.001,0.999)$

5. Calcolare $\vec{\nabla} f(P)$, cioè il gradiente della f nel punto P.

   (a) $f(x,y) = \dfrac{x^2+y}{y+1}; \quad P = (1,0)$

   (b) $f(x,y,z) = \cos(x+y^2+\pi z^3) + z\tan(x^2-y); \quad P = (0,0,1)$

   (c) $f(x,y,z,t) = x^2y^3zt^{-2}; \quad P = (\sqrt{3}, -1, 3, \sqrt[3]{2})$

   (d) $f(x,y,z) = \dfrac{2}{(x+y+z)^3}; \quad P = (x,y,z)$

   (e) $f(x,y,z) = \dfrac{\arctan(x^4y+x)}{z^2+1}; \quad P = (x,y,z)$

6. Per le seguenti funzioni scrivere il differenziale e il gradiente (in un punto generico).

   (a) $f(x,y) = \ln(\sin x + e^{xy})$

   (b) $f(x,y) = \arctan(e^x + 2xy + y^3)$

   (c) $f(x,y,z) = \sqrt[3]{\dfrac{xy}{1+z^3}}$

   (d) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^k\right)$