15578 - MATEMATICA II, A.A. 2007/08
Esame scritto, 3 giugno 2008

Nome: ______________________________

Cognome: ______________________________ Punteggio:

Matricola: ______________________________

ISTRUZIONI: *Su questo foglio vanno scritte* ***tutte le soluzioni ottenute e solo quelle****, nello spazio dell'esercizio corrispondente (****n.b.:*** *una soluzione può anche essere un grafico, per esempio, o una dimostrazione sintetica, a seconda degli esercizi). Riconsegnare* ***tutti*** *i fogli usati durante il compito.*
Nonostante il punteggio massimo ottenibile sia di 160 punti, il voto sarà espresso in 150esimi.

1. **[15 pt]** Della trasformazione lineare $L_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (ciò significa che $L_A(\vec{v}) = A\vec{v}$) si sa che $L_A(2,0) = (2,0,6)$ e $L_A(1,1) = (5,5,3)$. Determinare A.

2. **[15 pt]** Calcolare la matrice inversa di $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. **[25 pt]** Della seguente matrice trovare tutti gli autovalori e gli autovettori (tralasciando il calcolo degli autovettori corrispondenti ad eventuali autovalori complessi).
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

4. **[15 pt]** Si assuma che la matrice $A \in M(n,n)$ possiede una base $\mathcal{B} := \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ di autovettori (con i corrispondenti autovalori $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, i quali possono essere in parte ripetuti). Sia C la matrice $n \times n$ formata dai vettori colonna $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ (cioè, l'i-esima colonna di C è il vettore colonna $\vec{v}_i$). È un fatto, che non dimostriamo, che la matrice C è invertibile.

   Dimostrare che $C^{-1}AC = \Lambda$, dove Λ è la matrice diagonale che contiene sulla diagonale i numeri $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

   [Suggerimento: Un metodo per conoscere gli elementi di una matrice è quello di moltiplicarla per i vettori della base canonica...]

5. **[20 pt]** Calcolare i seguenti limiti, se esistono:

   (a) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{1}{x^2y^2z^4} =$

   (b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} =$

6. **[15 pt]** Scrivere l'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y) = \ln(x^2+y)$ nel punto $(2,-1)$.

7. **[15 pt]** Determinare il dominio naturale di $f(x,y) = \ln(y-x) - \ln y$ e disegnarlo sul piano (x,y).

8. **[20 pt]** Trovare e classificare, con il metodo dell'hessiana, tutti i punti critici di $f(x,y) = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$

9. **[20 pt]** Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$