15578 - MATEMATICA II, A.A. 2007/08

Esame scritto, 24 giugno 2008

Nome: _____
Cognome: _____
Matricola: _____

Punteggio:

ISTRUZIONI: Su questo foglio vanno scritte **tutte le soluzioni ottenute e solo quelle**, nello spazio dell'esercizio corrispondente (**n.b.:** una soluzione può anche essere un grafico, per esempio, o una dimostrazione sintetica, a seconda degli esercizi). Riconsegnare **tutti** i fogli usati durante il compito.

Nonostante il punteggio massimo ottenibile sia di 160 punti, il voto sarà espresso in 150esimi.

1. [15 pt] Adottando la notazione per cui, data una matrice $A \in M(n, n)$, si scrive A^n per indicare $AA \cdots A$ (n volte) e A^{-n} per indicare $A^{-1}A^{-1} \cdots A^{-1}$ (n volte, sempre che la matrice A^{-1} esista), si semplifichi il membro destro della seguente espressione (per delle generiche matrici invertibili A, B, C):

$$D = AAAB^3B^{-2}A^{-1}C^{-1}C^{-1}A^{-1}C^2.$$

Inoltre, nel caso specifico di $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, si calcoli il determinante di D .

2. [20 pt] Siano $\vec{f}_1 = (1, -1)$, $\vec{f}_2 = (1, 1)$ e $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$. Si definisca la trasformazione lineare $L_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, al solito, come $L_A(\vec{v}) = A\vec{v}$. Determinare la matrice rappresentativa di L_A sulla base $\mathcal{B} = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2\}$.

3. [15 pt] Sia A una matrice $n \times n$ di cui $\bar{\lambda}$ è un autovalore. Dimostrare che l'insieme di tutti gli autovettori relativi a $\bar{\lambda}$ (aggiungendo eccezionalmente anche il vettore nullo) è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$.

4. [25 pt] Della seguente matrice trovare tutti gli autovalori e gli autovettori (tralasciando il calcolo degli autovettori corrispondenti ad eventuali autovalori complessi).

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5. [20 pt] Calcolare la derivata direzionale di $f(x, y, z) = e^{-x^2+y-4z}$, nel punto $P = (2, 0, 1)$ secondo la direzione (e verso) che da P va verso l'origine.

Determinare inoltre la massima derivata direzionale di f in P .

6. [15 pt] Determinare tutti i punti critici di $f(x, y) = x(y - 1)^2$, disegnandoli poi sul piano (x, y) .

7. [15 pt] Scrivere l'hessiana di $f(x, y) = (x + 2y)^3$ nel punto $(x_0, y_0) = (1/2, -1/2)$.

8. [15 pt] Risolvere l'equazione differenziale $\frac{dy}{dx} - 2y - e^x = 0$.

9. [20 pt] Risolvere l'equazione differenziale $y'' - 4y' + 5y = 10$.