

04788 - FONDAMENTI DI MATEMATICA (A-L)

A.A. 2008/09

Esercizi di ripasso, foglio n. 1

1. Determinare:

(a) $\inf \left\{ \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$

(b) $\sup \left\{ \frac{1}{n^2} \mid n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$

(c) $\max [0, 4[$

(d) $\max ([0, 4[\cup \{5\})$

(e) $\sup \{r \in \mathbb{Q} \mid r^2 < 2\}$

2. L'età di una persona, in anni, alla mezzanotte del 31 dicembre 2006, è una funzione dall'insieme delle persone viventi all'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$?

3. La relazione che associa ad ogni persona il suo numero di cellulare è una funzione $P \longrightarrow C$, dove P è l'insieme delle persone e C è l'insieme dei numeri naturali di 10 cifre?

La relazione che associa ad ogni numero naturale n di 10 cifre la persona che possiede il cellulare col numero n è una funzione $C \longrightarrow P$?

[Attenzione alla seconda domanda!]

4. Determinare quali di queste relazioni sono funzioni.

(a) la relazione, fra l'insieme dei comuni italiani e l'insieme delle persone residenti in Italia, che lega un comune a ciascuno dei suoi residenti;

(b) la relazione, fra l'insieme delle persone residenti in Italia e l'insieme dei comuni italiani, che lega ciascuna persona al proprio comune di residenza;

(c) la relazione, fra l'insieme delle persone residenti in Italia e l'insieme degli edifici presenti sul suolo italiano, che lega ciascuna persona alla propria casa di proprietà;

(d) la relazione, fra l'insieme dei cittadini italiani e l'insieme dei passaporti italiani validi, che lega ciascun cittadino al proprio passaporto;

(e) la relazione, fra l'insieme dei passaporti italiani validi e l'insieme dei cittadini italiani, che lega ciascun passaporto al proprio possessore.

5. Trovare il dominio naturale di:

(a) $f(x) = \sqrt{3 - x - 2x^2}$

(b) $f(x) = e^{\tan x}$

(c) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

(d) $f(x) = \frac{\ln(x^2 - 1)}{\log_3 x}$

(e) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{|\sin x|}}$

6. Trovare il codominio delle seguenti funzioni. I casi meno semplici potrebbero richiedere un minimo di studio di funzione per avere un'idea approssimativa del grafico.
- (a) $f(x) = e^{x^2}$, ove $D(f) = [0, 1]$
 - (b) $f(x) = x^3 + 1$, ove $D(f) = \mathbb{R}^+$
 - (c) $f(x) = -x^2$, ove $D(f) = [-1, 1]$
 - (d) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, ove $D(f) = [-1, 1]$
7. La funzione $\tan$ (cioè $x \mapsto \tan x$) è crescente sul suo dominio naturale? Perché?
8. Vero o falso: se, per ogni retta orizzontale nel piano cartesiano, questa interseca il grafico di f in al più un punto, la funzione f è iniettiva.
9. Dimostrare che, se $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ è strettamente decrescente, allora f è iniettiva.
10. Dire se le seguenti funzioni sono iniettive e/o suriettive. Nel caso siano biettive, dare una formula per la funzione inversa $x = f^{-1}(y)$ (o, con notazione più elegante, $y = f^{-1}(x)$).
- (a) $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $f(x) = \sqrt{x - 1}$
 - (b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $f(x) = |x - 2|$
 - (c) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$
 - (d) $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow]1, +\infty[$, $f(x) = 2^{x^4}$
 - (e) $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$, $f(x) = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$
11. Dimostrare che la funzione $f(x) = \exp\left(\frac{1}{x}\right)$, definita sul dominio naturale (che è...?) è iniettiva. Poi, assumendo che l'insieme di arrivo sia esattamente il codominio, determinare una formula per f^{-1} .