

04788 - FONDAMENTI DI MATEMATICA (A-L)

A.A. 2008/09

Esercizi di ripasso, foglio n. 2

1. Scrivere la definizione corretta di $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.
2. Vero o falso: $U(x_0, r) = U^+(x_0, r) \cup U^-(x_0, r)$.
3. Calcolare i seguenti limiti [Nota: Alcuni di questi limiti potrebbero richiedere la regola di De L'Hôpital, o considerazioni da essa derivate.]:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)^2}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 2} \right)$

(c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 + \sqrt{2}x + 4 \sin x}{(x - 2)^2}$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{7/2} + \sqrt{x}}{5x^{10} + 4x^3 - 12}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + e^x}{x^3 - 2x}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} \tan(x^{-1})$

(h) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}$

(i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1}$

(j) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x}{(x - 1)^2}$

(k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x} + 4e^x - 16x^4 + 2x}{e^x + x^2}$

(l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10^x}{\log_{10} x}$

(m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10^x + x}{\log_{10} x + 7^x}$

(n) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3e^x + x^2}{\sqrt{x^2 - 2x}}$

(o) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^2)^{1/x}$

(p) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x)^{1/x^2}$

(q) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (2 + x)^{1/x}$

(r) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2^{x^2}}$

4. Vero o falso: se f è una funzione derivabile su tutto $\mathbb{R}$, allora $\max_{[0,1]} f$ e $\min_{[0,1]} f$ esistono.
5. Per le seguenti funzioni, stabilire i punti di discontinuità. Per ciascuno di essi calcolare il limite destro e il limite sinistro.

(a) $f(x) = \frac{x+1}{|x+1|}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 5, & x < 2 \\ 5, & x = 2 \\ 3^x, & x > 2 \end{cases}$

(c) $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x \ln x, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{x-1}{x^2-1}, & x > 1 \end{cases}$

(d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

(e) $f(x) = \begin{cases} \frac{\tan(x^2)}{x^2}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

(f) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$, definita su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ [Attenzione!]

6. Determinare il valore delle costanti $a, b \in \mathbb{R}$ tali che sia continua la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 2^{x+1}, & x < 0 \\ 2a, & x = 0 \\ \frac{\sin(bx)}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

7. Dimostrare che l'equazione $x^4 + e^x - 4 \cos x = 0$ ha almeno due soluzioni reali.