

04788 - FONDAMENTI DI MATEMATICA (A-L), A.A. 2008/09

Esame scritto, 29 gennaio 2009

Nome: _____
Cognome: _____
Matricola: _____

Punteggio:

--

ISTRUZIONI: Su questo foglio vanno scritte **solo** le soluzioni, nello spazio dell'esercizio corrispondente, oppure, per gli esercizi che la richiedono, una dimostrazione sintetica. Riconsegnare **tutti** i fogli usati durante il compito.

Nonostante il punteggio massimo ottenibile sia di 160 punti, il voto sarà espresso in 150esimi.

1. [16 pt] Determinare il codominio delle seguenti funzioni.

(a) $f : \left[-\frac{\pi}{4}, \pi\right] \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) = \sin x$

(b) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, con $f(x) = x^3 + 2x$

2. [20 pt] Determinare quali delle seguenti funzioni sono iniettive. Per quelle che lo sono, assumendo che l'insieme di arrivo sia esattamente il codominio, scrivere la funzione inversa. Per le altre, spiegare perché non sono iniettive.

(a) $f(x) = e^{\sqrt{x+1}}$

(b) $f(x) = x^2 - 4x$

3. [16 pt] Assumendo di sapere cos'è il sup (cioè l'estremo superiore) di un insieme, scrivere la definizione di $\sup_A f$, dove $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $A \subseteq D(f)$.

Inoltre determinare $\sup_{]1,2[} x^{-2} =$

4. [28 pt] Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{3x - \ln x^2} =$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 + 4x^3 + \log_3 x}{10^{-x} - 6x} =$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\log \sin x - \log x) =$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\log(6x) - \log \sin(3x)) =$

5. **[15 pt]** Calcolare il massimo ed il minimo della funzione $f(x) = e^{x^4-2x^2}$ sull'intervallo $[2, 3]$.
6. **[35 pt]** Studiare la funzione $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$, definita sul dominio naturale. In particolare determinare:
- (a) il dominio naturale
 - (b) gli intervalli di positività e negatività
 - (c) gli asintoti verticali e orizzontali
 - (d) $f'(x) =$
 - (e) gli intervalli di crescita e decrescenza
 - (f) i punti di massimo e di minimo relativi
 - (g) $f''(x) =$

Inoltre, si disegni qui sotto il grafico di f .

7. **[20 pt]** Calcolare i seguenti integrali (che possono essere definiti o indefiniti):

(a) $\int_1^2 \frac{x-1}{x} =$

(b) $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} =$

8. **[10 pt]** Determinare i punti di discontinuità della seguente funzione. Per ciascuno di essi calcolare il limite destro ed il limite sinistro.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x \ln x, & 0 < x \leq 1 \\ \frac{x-1}{x^2-1}, & x > 1 \end{cases}$$