

04788 - FONDAMENTI DI MATEMATICA (A-L), A.A. 2008/09

Esame scritto, 7 luglio 2009

Nome: _____

Cognome: _____

Matricola: _____

Punteggio:

--

ISTRUZIONI: Su questo foglio vanno scritte **solo** le soluzioni, nello spazio dell'esercizio corrispondente, oppure, per gli esercizi che la richiedono, una dimostrazione sintetica. Riconsegnare **tutti** i fogli usati durante il compito.

Nonostante il punteggio massimo ottenibile sia di 160 punti, il voto sarà espresso in 150esimi.

1. [15 pt] Determinare max, min, sup, inf dei seguenti insiemi:

(a) $A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$

(b) $A =]1, 3] \cup]4, 7]$

(c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x^2 < 3\}$

2. [15 pt] Scrivere la definizione di $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, con x_0 e L reali.

3. [15 pt] Scrivere la definizione di derivata della funzione f in x_0 .

Usare tale definizione per calcolare la derivata di $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ in $x_0 = 1$.

4. [15 pt] Calcolare i seguenti limiti:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x^8}{x^7} =$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3 + \cos x}}{3x + 1} =$

5. [20 pt] Il consumo orario di una certa automobile, in funzione della sua velocità v , è dato da

$$C_h(v) = 200\sqrt{v} + \frac{v^2}{10},$$

dove C_h è misurato in litri all'ora (l/h) e v in chilometri all'ora (km/h). Determinare la velocità $\bar{v}$ che minimizza il consumo al kilometro $C_{km}(v)$, essendo quest'ultimo misurato in l/km.

[Suggerimento per ricavare la funzione C_{km} : si supponga, tanto per fissare le idee, che in una certa ora l'auto abbia tenuto una velocità costante v . In quell'ora il mezzo ha consumato $C_h(v)$ litri e ha percorso v chilometri. Quindi, quanti litri al kilometro ha consumato?]

6. [40 pt] Studiare la funzione $f(x) = \frac{x}{\log x + 1}$, definita sul dominio naturale. In particolare determinarne:

(a) il dominio naturale

(b) gli asintoti verticali e orizzontali

(c) $f'(x) =$

(d) gli intervalli di crescita e decrescenza

(e) i punti di massimo e di minimo relativi

(f) $f''(x) =$

(g) i punti di flesso

Inoltre, si disegni qui sotto il grafico di f .

7. [15 pt] Calcolare i seguenti integrali (che possono essere definiti o indefiniti):

(a) $\int_0^6 \frac{3}{8-x} dx =$

(b) $\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx =$

8. [15 pt] Trovare l'area della regione del piano delimitata dalle curve $y = x^2/3$ e $4x - 3y - 3 = 0$.

9. [10 pt] Spiegare perché non esiste una funzione derivabile $f : [1, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(1) = 1$, $f(2) = 3$ e $f'(x) \leq 1$ per tutti gli x del dominio.