

n -uple ordinate, punti, vettori, prodotti scalare e vettoriale

1. Se $P = (2, 3)$, $Q = (-3, 1)$, scrivere le componenti del vettore \overrightarrow{PQ} .
2. Calcolare la distanza fra i seguenti punti di \mathbb{R}^3 : $P = (1, 2, -1)$ e $Q = (0, 5, 1)$.
[Suggerimento: Questa ha a che fare con il vettore \overrightarrow{PQ}].
3. Nel piano \mathbb{R}^2 , qual è il punto P sulla retta $y = x - 1$ che ha minima distanza da $Q = (0, 7)$? Qual'è questa distanza minima?
4. In \mathbb{R}^3 trovare un vettore \vec{v} ortogonale a $\vec{w} = (1, -2, 0)$ e a $\vec{s} = (0, 1, 1)$.
5. Dimostrare che l'operazione di prodotto scalare in \mathbb{R}^n è lineare in ciascuna delle sue variabili. In altre parole, $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ e $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $(a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2) \cdot \vec{w} = a_1\vec{v}_1 \cdot \vec{w} + a_2\vec{v}_2 \cdot \vec{w}$.
6. Sul piano cartesiano si tracci la circonferenza unitaria. Si traccino poi tre rette a caso passanti per l'origine e si indichino con P_1, P_2, \dots, P_6 i sei risultanti punti di intersezione con la circonferenza unitaria. Si dimostri che, interpretando i punti come coppie ordinate, si ha $P_1 + P_2 + \dots + P_6 = (0, 0)$.
7. Si dice che due vettori non nulli $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$ hanno la stessa direzione e verso se l'uno è multiplo dell'altro, con costante positiva; cioè se $\exists c > 0$ tale che $\vec{v} = c\vec{w}$. (In \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 , questa definizione coincide con il significato intuitivo che si attribuisce ai concetti primitivi di direzione e verso, ma in più alta dimensione possiamo solo definire la nozione di stessa direzione e stesso verso, perché non possiamo fare appello a costruzioni visive.)
Dimostrare che se \vec{v}, \vec{w} hanno la stessa direzione (e verso), allora $\vec{v} \cdot \vec{w} = \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|$.
8. Nel piano siano dati i punti $P = (2, 1)$, $Q = (1, 2)$. Determinare uno degli infiniti punti $R \neq P$ tali che \overrightarrow{PR} sia ortogonale a \overrightarrow{PQ} .
9. Scrivere il vettore $\vec{u} \in \mathbb{R}^4$ che ha la stessa direzione (e verso) di $\vec{v} = (1, -4, 0, 2\sqrt{2})$, ma norma unitaria (cioè uguale ad 1).
10. Dimostrare che, per tutti i $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, si ha $(\vec{v} \times \vec{w}) \cdot \vec{v} = 0$.